



Structures de Poisson sur les Algèbres de Polynômes, Cohomologie et Déformations

F. Butin

► To cite this version:

F. Butin. Structures de Poisson sur les Algèbres de Polynômes, Cohomologie et Déformations. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. Français. NNT : . tel-00444232

HAL Id: tel-00444232

<https://theses.hal.science/tel-00444232>

Submitted on 6 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

DIPLOME DE DOCTORAT (Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale InfoMaths

Institut Camille Jordan

Thèse de doctorat
Spécialité Mathématiques
présentée par

Frédéric BUTIN

Structures de Poisson sur les Algèbres de Polynômes, Cohomologie et Déformations

Soutenue publiquement le 13 novembre 2009 devant le jury :

Claude ROGER	Professeur des Universités	Lyon	Directeur de thèse
Gadi PERETS	Maître de Conférences	Lyon	Codirecteur de thèse
Jacques ALEV	Professeur des Universités	Reims	Rapporteur
Volodymyr BAVULA	Professeur des Universités	Sheffield	Rapporteur
Gilles HALBOUT	Professeur des Universités	Montpellier	Rapporteur
Roland BERGER	Professeur des Universités	Saint-Etienne	Examineur
Serge PARMENTIER	Maître de Conférences	Lyon	Examineur

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

DIPLOME DE DOCTORAT (Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale InfoMaths

Institut Camille Jordan

Thèse de doctorat
Spécialité Mathématiques
présentée par

Frédéric BUTIN

Structures de Poisson sur les Algèbres de Polynômes, Cohomologie et Déformations

Soutenue publiquement le 13 novembre 2009 devant le jury :

Claude ROGER	Professeur des Universités	Lyon	Directeur de thèse
Gadi PERETS	Maître de Conférences	Lyon	Codirecteur de thèse
Jacques ALEV	Professeur des Universités	Reims	Rapporteur
Volodymyr BAVULA	Professeur des Universités	Sheffield	Rapporteur
Gilles HALBOUT	Professeur des Universités	Montpellier	Rapporteur
Roland BERGER	Professeur des Universités	Saint-Etienne	Examineur
Serge PARMENTIER	Maître de Conférences	Lyon	Examineur

Remerciements

C'est avec plaisir que je remercie ici tous ceux qui, par leur appui, leur aide, leur présence, m'ont soutenu dans la réalisation de ce travail.

Mes premiers remerciements vont à mes directeurs de thèse. Je veux leur exprimer ma gratitude pour le temps qu'ils m'ont consacré, pour leur grande disponibilité et leur efficacité. Le bureau de Claude Roger m'a toujours été ouvert et ses anecdotes savoureuses sur les mathématiques ont pimenté nos nombreuses rencontres ! Je le remercie très chaleureusement. J'adresse les mêmes remerciements à Gadi Perets, lui aussi toujours très proche de moi. Je n'imaginai pas, lorsqu'il était mon professeur d'algèbre en Maîtrise, qu'il encadrerait ma thèse !

Mes remerciements vont aussi à Jacques Alev : son article sur l'Homologie de Poisson m'a interpellé et m'a donné l'envie d'orienter mes premières recherches vers ce sujet. Il s'en est suivi une rencontre très fructueuse qui m'a conforté dans la voie que je désirais prendre.

Grâce à Christian Fronsdal, j'ai eu l'opportunité de travailler sur un thème qui lui est cher. Quant à Daniel Sternheimer, il a prêté une attention toute particulière à ces travaux sur la quantification des orbites minimales ; qu'ils en soient spécialement remerciés.

Jacques Alev, Volodymyr Bavula et Gilles Halbout ont donné leur accord pour être rapporteurs de ma thèse : je leur adresse tous mes remerciements pour le travail efficace qu'ils ont accompli.

Je remercie vivement les membres du jury qui ont bien voulu me faire l'honneur de participer à ma soutenance.

Je suis reconnaissant à Serge Parmentier de m'avoir apporté une aide précieuse en acceptant de façon très sympathique de relire les articles que j'ai publiés en anglais.

Merci aussi à mes professeurs qui, tout au long de mon cursus, ont su me faire goûter la rigueur et la beauté des raisonnements mathématiques et m'ont ainsi donné le désir de travailler dans ce domaine.

Merci enfin à ma famille, particulièrement à mes parents pour leur soutien constant, et merci à mes amis : les bons moments partagés m'ont procuré une détente tout à fait propice à mon travail de recherche.

Table des matières

Introduction	1
0.1 Correspondance de McKay	2
0.1.1 Cas où $r = 2$	2
0.1.2 Cas où $r = 3$	3
0.1.3 Cas où $r \geq 4$	4
0.2 Quantification par déformation	4
0.2.1 Quantification et star-produits	4
0.2.2 Quantification des variétés de Poisson	4
 1 Préliminaires	 7
1.1 Quantification par déformation	7
1.2 Homologie, cohomologie de Hochschild et déformations	13
1.2.1 Cohomologie de Hochschild	14
1.2.2 Homologie de Hochschild	15
1.2.3 Homologie de Hochschild réduite	15
1.2.4 Cohomologie de Hochschild et déformations d'algèbres associatives	16
1.2.5 Le Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg	18
1.2.6 La décomposition BGS de la (co)homologie de Hochschild	18
1.2.7 Application de la décomposition BGS aux star-produits	25
1.3 Homologie et cohomologie de Poisson	26
1.3.1 Homologie de Poisson	26
1.3.2 Cohomologie de Poisson	27
1.4 Polynômes multivariés	28
1.4.1 Bases de Gröbner	28
1.4.2 Invariants sous l'action d'un groupe fini	30

2	Homologie et cohomologie de Hochschild des surfaces de Klein	37
2.1	Introduction	39
2.1.1	Cohomologies et quotients d'algèbres de polynômes	39
2.2	Présentation du complexe de Koszul	41
2.2.1	Théorème de Kontsevich et notations	41
2.2.2	Cas particulier où $n = 1$ et $m = 1$	43
2.3	Cas $n = 2$, $m = 1$. — Courbes singulières du plan	43
2.3.1	Courbes singulières du plan	43
2.3.2	Description des espaces de cohomologie	44
2.3.3	Calculs explicites dans le cas particulier où f a des variables séparées	45
2.3.4	Calculs explicites pour D_k et E_7	48
2.3.5	Homologie	49
2.4	Cas $n = 3$, $m = 1$. — Surfaces de Klein	51
2.4.1	Surfaces de Klein	51
2.4.2	Description des espaces de cohomologie	54
2.4.3	Calculs explicites dans le cas particulier où f a des variables séparées	55
2.4.4	Calculs explicites pour D_k et E_7	59
2.4.5	Homologie	61
2.5	Le cas de la dimension 4	63
2.5.1	Description des espaces de cohomologie	64
3	Homologie de Poisson en degré 0	69
3.1	Introduction	70
3.1.1	Exemples où $\dim HP_0(S^G) \neq \dim HH_0(A^G)$	72
3.2	Résultats sur $B_n - C_n$ et D_n	74
3.2.1	Définitions et notations	75
3.2.2	Vecteurs de plus haut poids 0	76
3.2.3	Equation de Berest-Etingof-Ginzburg	80
3.2.4	Construction de graphes associés aux polynômes invariants	88
3.3	Etude de $B_2 - C_2$, $D_2 = A_1 \times A_1$, $B_3 - C_3$, et $D_3 = A_3$	94
3.3.1	Etude de B_2 et D_2	95
3.3.2	Etude de B_3 — Vecteurs de plus haut poids 0	96
3.3.3	Etude de B_3 — Equation de Berest-Etingof-Ginzburg	96
3.3.4	Etude de D_3	104
3.4	Produits en couronne	105
3.4.1	Définitions et notations	105
3.4.2	Etude de \mathfrak{S}_n	106
3.5	Calculs formels	108
3.5.1	Définitions	108
3.5.2	Vérification du calcul des Propositions 3.3.1 et 3.3.2	109
3.5.3	Vérification des identités de la Proposition 3.3.5	110
3.5.4	Vérification des calculs de la Proposition 3.3.8	110

4	Déformation par quantification sur les orbites nilpotentes minimales	111
4.1	Introduction	112
4.1.1	Cadre de l'étude	112
4.1.2	Terminologie	112
4.1.3	Résultats	113
4.1.4	Travaux récents apparentés	114
4.1.5	Plan du chapitre	114
4.2	Homologie et cohomologie de Hochschild de certaines variétés singulières	115
4.2.1	Cas des relations quadratiques : les variétés coniques	115
4.2.2	Cas d'une unique relation quadratique : le cône simple	117
4.2.3	Cas d'une unique relation polynomiale	119
4.3	Introduction aux star-produits \mathfrak{g} -invariants sur les orbites coadjointes	120
4.3.1	Origine du problème	120
4.3.2	Définition des star-produits \mathfrak{g} -invariants	121
4.3.3	Exemples liés à \mathfrak{so}_n	122
4.4	Orbites minimales, représentations, et idéaux de Joseph	124
4.4.1	Orbites adjointes et coadjointes	124
4.4.2	Orbites nilpotentes et idéaux de Joseph	126
4.4.3	Orbites coadjointes de $\mathfrak{so}(2, 1)$	127
4.4.4	Orbite minimale de \mathfrak{sl}_n	128
4.4.5	Orbites minimales de \mathfrak{sp}_{2n} , \mathfrak{so}_n et \mathfrak{g}_2	129
4.4.6	Représentations associées et idéaux de Joseph	129
4.5	Star-produits \mathfrak{g} -invariants sur l'orbite minimale d'une algèbre de Lie simple	133
4.5.1	Calcul de l'homologie	133
4.5.2	Principe de correspondance pour les star-produits \mathfrak{g} -invariants	134
4.5.3	Calculs pour \mathfrak{sl}_n — Idéal de Joseph et modules de plus haut poids	138
4.5.4	Calculs pour \mathfrak{so}_n — Idéal de Joseph et modules de plus haut poids	140
4.5.5	Calculs uniformes pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles	143
5	Correspondance de McKay pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$	147
5.1	Introduction	148
5.1.1	Cadre d'étude et résultats	148
5.1.2	Organisation du chapitre	149
5.2	Loi de branchement pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$	149
5.2.1	La série de Poincaré est une fraction rationnelle	149
5.2.2	Résultats pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$	151
5.2.3	Cas exceptionnels	153
5.3	Loi de branchement pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$	155
5.3.1	Notations et objectif	155
5.3.2	Analogie avec les séries de Fourier	156
5.3.3	La série de Poincaré est une fraction rationnelle	156
5.4	Résultats explicites pour les séries infinies — Types A , B , C , D	162
5.4.1	Série A	162
5.4.2	Série B	167
5.4.3	Série C — Groupes triédraux	176
5.4.4	Série D	185

5.5	Sous-groupes exceptionnels de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$	186
5.5.1	Type E	186
5.5.2	Type F	188
5.5.3	Type G	188
5.5.4	Type H	189
5.5.5	Type I	190
5.5.6	Type J	190
5.5.7	Type K	191
5.5.8	Type L	192
A	Démonstration de trois propositions du Chapitre 4	193
A.1	Démonstration de la Proposition 4.5.6	193
A.2	Démonstration de la Proposition 4.5.9	195
A.3	Démonstration de la Proposition 4.5.11	196
B	Calcul des séries $P_\Gamma(t)$ et $P_\Gamma(t, u)$	199
B.1	Sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$	199
B.1.1	Type D — Groupes binaires diédraux	199
B.2	Sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$	201
B.2.1	Type A_2	201
B.2.2	Type BTa	203
B.2.3	Série C	205
C	Résultats pour les sous-groupes finis exceptionnels de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$	209
C.1	Type E	209
C.2	Type F	210
C.3	Type G	211
C.4	Type H	217
C.5	Type I	218
C.6	Type J	218
C.7	Type K	221
C.8	Type L	225

Introduction

Considérons un système mécanique donné par une variété de Poisson M , et notons $\mathcal{F}(M)$ l'algèbre (commutative) des fonctions régulières sur M , appelées observables. Il est important d'avoir une description quantique de ce système, autrement dit de le *quantifier*, en vue d'obtenir des résultats plus “précis” que ceux de la mécanique classique. La quantification géométrique, qui permet de construire explicitement un espace de Hilbert et une algèbre (non commutative) d'opérateurs sur cet espace, ne peut pas toujours s'appliquer en raison des conditions très fortes qu'elle nécessite : en fait, elle ne permet de quantifier qu'un nombre limité d'observables classiques. C'est pourquoi d'autres procédés de quantification ont été introduits, comme la quantification par déformation, décrite par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer en 1978 dans l'article fondateur [BFF⁺78] : au lieu de construire une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert, il s'agit d'obtenir une déformation formelle de la multiplication de $\mathcal{F}(M)$, donnée par l'algèbre des séries formelles $\mathcal{F}(M)[[\hbar]]$, munie du star-produit associatif (mais non commutatif)

$$f * g = \sum_{j=0}^{\infty} m_j(f, g) \hbar^j \tag{1}$$

où les applications m_j sont bilinéaires et où m_0 est la multiplication de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$. La quantification est alors donnée par l'application qui associe à tout élément $f \in \mathcal{F}(M)$ l'opérateur formel $\hat{f} : g \mapsto f * g$.

• La *quantification par déformation* et la *correspondance de McKay* constituent les deux grands thèmes de notre étude, qui porte sur des variétés algébriques singulières, des quotients d'algèbres de polynômes et des algèbres de polynômes invariants sous l'action d'un groupe fini. Comme outils, nous utilisons principalement la cohomologie de Poisson, la cohomologie de Hochschild et la théorie des représentations. Certains calculs formels sont effectués avec **Maple** et **GAP**.

- Dans toute la suite, nous étudions des *variétés algébriques singulières*, de la forme

$$M = \{\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n / f_1(\mathbf{z}) = \dots = f_m(\mathbf{z}) = 0\},$$

où les éléments f_1, \dots, f_m appartiennent à $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

Notons $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ l'idéal engendré par les polynômes f_1, \dots, f_m . L'algèbre des fonctions régulières sur M est alors

$$\mathcal{F}(M) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle.$$

— Par exemple, l'ensemble $M = \mathbb{C}^r / G$ des orbites de \mathbb{C}^r sous l'action d'un sous-groupe fini G de $\mathbf{SL}_r \mathbb{C}$ est une variété algébrique singulière, et $\mathcal{F}(M) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]^G$ (voir le Chapitre 5). Deux cas particuliers de telles variétés singulières M retiennent notre attention :

▷ $M = (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}') / W$, \mathfrak{h} étant une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple de rang $n \in \mathbb{N}^*$, et W son groupe de Weyl (voir le Chapitre 3).

▷ $M = (\mathbb{C}^2)^n / G$, G étant un produit en couronne de la forme $G = \Gamma \curvearrowright \mathfrak{S}_n = \Gamma^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, et Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2 \mathbb{C}$ (voir le Chapitre 3). Les surfaces de Klein en constituent un cas particulier (voir le Chapitre 2).

— Un autre exemple de variété algébrique singulière est donné par la clôture de l'orbite nilpotente minimale d'une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie (voir le Chapitre 4).

0.1 Correspondance de McKay

Soit Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_r \mathbb{C}$. La correspondance de McKay *géométrique* consiste à construire une bijection entre l'ensemble des représentations irréductibles de Γ et une base de la cohomologie de \hat{X} , où $\hat{X} \rightarrow X = \mathbb{C}^r / \Gamma$ est une résolution *crépante* de \mathbb{C}^r / Γ (pour la définition, voir [Rei02]).

Notons $\{\gamma_0, \dots, \gamma_l\}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de Γ , et $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbf{SL}_r \mathbb{C}$ sa représentation naturelle. Les décompositions uniques $\gamma_j \otimes \gamma = \bigoplus_{i=0}^l a_{ij} \gamma_i$ définissent une matrice $A^{(1)} := (a_{ij})_{(i,j) \in [0,l]^2} \in \mathbf{M}_{l+1} \mathbb{N}$.

0.1.1 Cas où $r = 2$

- Dans le cas où $r = 2$, le problème de la correspondance de McKay géométrique est complètement résolu, et la correspondance de McKay *algébrique*, la première connue historiquement, établit une bijection entre les algèbres de Lie simples de types A , D et E , et les sous-groupes finis Γ de $\mathbf{SL}_2 \mathbb{C}$, eux-mêmes liés aux solides de Platon.

Grâce à la théorie des invariants, on obtient $\mathbb{C}[z_1, z_2]^\Gamma \simeq \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] / \langle f_\Gamma \rangle$, où f_Γ est un polynôme quasi-homogène à singularité isolée en l'origine. La surface singulière $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 / f_\Gamma(\mathbf{z}) = 0\}$ est la surface de Klein associée au groupe Γ .

- Dans le Chapitre 2, nous considérons les surfaces de Klein du point de vue cohomologique. A cet effet, pour $j \in \mathbb{N}$, notons $HH^j(A_\Gamma)$ (resp. $HH_j(A_\Gamma)$) le j -ème espace de cohomologie (resp. homologie) de Hochschild de $A_\Gamma := \mathbb{C}[z_1, z_2] / \langle f_\Gamma \rangle$, et notons ∇f_Γ le gradient de f_Γ et μ_Γ le nombre de Milnor de la singularité définie par f_Γ . Nous démontrons en particulier

que $HH^0(A_\Gamma) \simeq HH_0(A_\Gamma) \simeq A_\Gamma$, $HH^1(A_\Gamma) \simeq (\nabla f_\Gamma \wedge A_\Gamma^3) \oplus \mathbb{C}^{\mu_\Gamma}$, $HH_1(A_\Gamma) \simeq \nabla f_\Gamma \wedge A_\Gamma^3$, $HH^2(A_\Gamma) \simeq A_\Gamma \oplus \mathbb{C}^{\mu_\Gamma}$, $HH_2(A_\Gamma) \simeq A_\Gamma^3 / (\nabla f_\Gamma \wedge A_\Gamma^3)$ et $HH^j(A_\Gamma) \simeq HH_j(A_\Gamma) \simeq \mathbb{C}^{\mu_\Gamma}$ pour $j \geq 3$.

Pour les calculs, nous développons une sorte de généralisation du Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg au cas de variétés non lisses (suggérée par M. Kontsevich dans l'appendice de l'article [FK07]), et nous utilisons la division multivariée et les bases de Gröbner.

- Selon McKay, il existe une algèbre de Lie simple \mathfrak{g}_Γ telle que $A^{(1)} = 2I_{l+1} - C(\widetilde{\mathfrak{g}}_\Gamma)$, où $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Gamma$ est l'algèbre de Kac-Moody affine associée à \mathfrak{g}_Γ et $C(\widetilde{\mathfrak{g}}_\Gamma)$ la matrice de Cartan de $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Gamma$. En outre, l'application $\Gamma \mapsto \mathfrak{g}_\Gamma$ réalise une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme des algèbres de Lie simples complexes de types A , D et E .

Considérons une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, notons ϖ_1 le poids fondamental correspondant, et π_n la représentation irréductible de plus haut poids $n\varpi_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $\pi_n|_\Gamma$ de π_n au sous-groupe Γ se décompose sous la forme $\pi_n|_\Gamma = \bigoplus_{i=0}^l m_i(n)\gamma_i$. Soit (e_0, \dots, e_l) la base canonique de \mathbb{C}^{l+1} , et soient

$$v_n := \sum_{i=0}^l m_i(n)e_i \in \mathbb{C}^{l+1} \quad \text{et} \quad P_\Gamma(t) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n \in (\mathbb{C}[[t]])^{l+1}.$$

Kostant calcule, dans l'article [Kos85], la série $P_\Gamma(t)$, en utilisant l'élément de Coxeter de l'algèbre de Kac-Moody $\widetilde{\mathfrak{g}}_\Gamma$ associée à Γ via la correspondance de McKay, et une décomposition de la matrice $A^{(1)}$ comme somme de deux éléments du groupe de Weyl. Dans le Chapitre 5, nous calculons aussi cette série, mais par une méthode directe qui ne fait pas référence à la correspondance de McKay.

0.1.2 Cas où $r = 3$

- Dans le cas où $r = 3$, le problème de la correspondance de McKay géométrique est aussi résolu, en prenant par exemple pour résolution \hat{X} le schéma de Hilbert $G - \text{Hilb}(\mathbb{C}^3)$, mais contrairement au cas où $r = 2$, il n'existe pas de véritable analogue algébrique.

- Nous étendons la méthode utilisée par Kostant au cas où $r = 3$: considérons une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, et notons ϖ_1, ϖ_2 les poids fondamentaux, et $\pi_{m,n}$ la représentation irréductible de plus haut poids $m\varpi_1 + n\varpi_2$. Alors la restriction $\pi_{m,n}|_\Gamma$ de $\pi_{m,n}$ à Γ se décompose sous la forme $\pi_{m,n}|_\Gamma = \bigoplus_{i=0}^l m_i(m, n)\gamma_i$. Soit (e_0, \dots, e_l) la base canonique de \mathbb{C}^{l+1} , et soient

$$v_{m,n} := \sum_{i=0}^l m_i(m, n)e_i \in \mathbb{C}^{l+1} \quad \text{et} \quad P_\Gamma(t, u) := \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n} t^m u^n \in (\mathbb{C}[[t, u]])^{l+1}.$$

En notant $P_\Gamma(t, u)_i$ les coefficients du vecteur $P_\Gamma(t, u)$, nous montrons que les séries $P_\Gamma(t, u)_i$ sont des fractions rationnelles que nous calculons.

- En vue d'obtenir une sorte de correspondance de McKay algébrique en dimension 3, nous associons à tout sous-groupe Γ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ une matrice de Cartan généralisée C_Γ . Nous représentons son

graphe et donnons sa décomposition comme somme de produits de réflexions simples associées à des ensembles formés de racines deux à deux orthogonales, généralisant ainsi l'observation de Kostant pour $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$.

0.1.3 Cas où $r \geq 4$

Pour $r \geq 4$, il existe de nombreux résultats partiels mais aucune théorie générale. Le schéma de Hilbert réalise une résolution crépante du quotient $V(\mathbb{C}^2)^n / G$, où G est un produit en couronne de la forme $G = \Gamma \curvearrowright \mathfrak{S}_n = \Gamma^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, et où Γ est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Le schéma de Hilbert est également utile dans l'étude des résolutions des singularités de $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}') / W$, où \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple et W son groupe de Weyl, mais il n'est pas toujours une résolution crépante de $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}') / W$.

0.2 Quantification par déformation

0.2.1 Quantification et star-produits

- Le calcul de la cohomologie de Hochschild est une première étape en vue de la classification des star-produits, l'ensemble des classes de star-produits du premier ordre étant en bijection avec le deuxième espace de cohomologie.

En complément des surfaces de Klein déjà évoquées, nous traitons le cas des courbes singulières du plan, de la forme $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 / f(\mathbf{z}) = 0\}$, où f est un polynôme quasi-homogène avec une singularité isolée de *modalité nulle* (pour la définition, voir [AVGZ86]). Nous calculons l'homologie et la cohomologie de Hochschild de l'algèbre de fonctions $\mathbb{C}[z_1, z_2] / \langle f \rangle$ sur la variété singulière.

- Le cadre du Chapitre 4 est légèrement différent, puisque le groupe considéré n'est plus fini : étant donné une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} , parmi les trois orbites nilpotentes canoniques sous l'action de son groupe adjoint, l'orbite minimale est l'orbite non nulle de plus petite dimension. C'est une variété symplectique lisse et sa clôture de Zariski est une variété algébrique singulière. Nous nous intéressons à la quantification par déformation équivariante et construisons des star-produits \mathfrak{g} -invariants sur la clôture de l'orbite minimale, en utilisant la décomposition de Barr-Gerstenhaber-Schack de l'homologie et de la cohomologie de Hochschild, ainsi que des résultats sur les invariants des groupes classiques.

Nous explicitons également les générateurs de l'idéal de Joseph associé à cette orbite et calculons les caractères infinitésimaux.

0.2.2 Quantification des variétés de Poisson

- La quantification par déformation d'une algèbre de Poisson A , munie d'un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ de degré -2 peut être vue comme la construction d'une algèbre associative filtrée $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{\leq n}$ dont l'algèbre graduée $\mathrm{Gr}(B)$ est A , telle que pour tout $(a, b) \in B_{\leq m} \times B_{\leq n}$, $ab - ba \in B_{\leq m+n-2}$, et $\mathrm{Gr}_{m+n-2}(ab - ba) = \{\mathrm{Gr}_m(a), \mathrm{Gr}_n(b)\}$. Il est intéressant pour cela de comparer l'homologie et la cohomologie de Poisson de l'algèbre de Poisson A à l'homologie et à la cohomologie de Hochschild de sa déformation B . C'est une question que nous étudions en

particulier dans le Chapitre 3.

- Etant donné \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple de dimension finie et de rang n , \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , et W son groupe de Weyl, nous nous intéressons à l'homologie de Poisson en degré 0 de l'algèbre de Poisson $\mathbb{C}[V]^W$, déjà évoquée en début d'introduction, où $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$.

L'action du groupe W sur V induit aussi une action de W sur l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{C})$.

Dans le Chapitre 3, nous établissons des résultats généraux sur l'espace d'homologie de Poisson en degré 0, noté $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$, dans le cas où \mathfrak{g} est du type $B_n - C_n$ ou D_n . Ces résultats vont dans le sens de la conjecture de J. Alev, selon laquelle l'égalité $\dim HP_0(\mathbb{C}[V]^G) = \dim HH_0(A_n(\mathbb{C})^G)$ est vraie dans les deux cas suivants :

▷ $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$, \mathfrak{h} étant une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} de rang $n \in \mathbb{N}^*$, et G son groupe de Weyl.

▷ $V = (\mathbb{C}^2)^n$, G étant un produit en couronne $G = \Gamma \smile \mathfrak{S}_n = \Gamma^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, et Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$.

- Cette conjecture suscite un intérêt toujours actuel puisqu'en juin 2009, Etingof et Schedler ont déduit d'un résultat général une preuve de la conjecture d'Alev dans l'article [ES09] pour les produits en couronne et les groupes de Weyl de type $B_n - C_n$. Le problème reste cependant ouvert pour les groupes de Weyl des autres types.

- Pour calculer $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$, nous utilisons une équation fonctionnelle introduite dans l'article [BEG04] et montrons que, si R_n est l'opérateur de Reynolds étendu en un endomorphisme de $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}]$ qui est $\mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{t}]$ -linéaire, alors la détermination de $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$ équivaut à la résolution, dans $\mathbb{C}[V]_{\mathfrak{sl}_2}^W$, de l'équation

$$E_n(P) := R_n\left((\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) P(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t})\right) = 0, \quad (2)$$

où $\mathbb{C}[V]_{\mathfrak{sl}_2}^W$ est l'espace des éléments qui sont annulés par l'action de \mathfrak{sl}_2 .

Dans le cas de B_n , la dimension du 0-ème espace d'homologie de Hochschild de $A_n(\mathbb{C})^W$ est le nombre $\pi(n)$ de partitions de l'entier n (voir [AFLS00]). Nous explicitons alors $\pi(n)$ solutions de l'équation (2). Pour cela, nous définissons des graphes associés aux éléments de $\mathbb{C}[V]_{\mathfrak{sl}_2}^W$ et, par un moyen récursif, nous construisons, à partir des solutions déjà connues pour B_m avec $m < n$, des solutions de l'équation (2) pour B_n , en prenant des unions disjointes de graphes solutions.

- En utilisant les résultats ci-dessus, nous traitons les rangs 2 et 3 et calculons l'espace d'homologie de Poisson en degré 0 dans les cas où \mathfrak{g} est du type B_2 (\mathfrak{so}_5), D_2 (\mathfrak{so}_4), puis B_3 (\mathfrak{so}_7), et $D_3 = A_3$ ($\mathfrak{so}_6 \simeq \mathfrak{sl}_4$). Nous retrouvons, par une méthode différente, le résultat établi par J. Alev et L. Foissy, selon lequel la dimension de $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$ est égale à 2 pour B_2 et 1 pour D_2 . Pour le rang 3, nous montrons qu'elle est égale à 3 pour $B_3 - C_3$ et à 1 pour $D_3 = A_3$.

L'ensemble de cette étude a donné lieu aux publications [But08b], [But09], [FRB09], ainsi qu'à [BP09].

CHAPITRE 1

Préliminaires

1.1 Quantification par déformation

Soient M une variété et $\mathcal{F}(M)$ l'algèbre des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur M . On dit que M est une variété de Poisson si $\mathcal{F}(M)$ est munie d'une structure d'algèbre de Lie $\{\cdot, \cdot\}$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, l'application $g \mapsto \{f, g\}$ est une dérivation de $\mathcal{F}(M)$, i. e.

$$\forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M), \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \quad (1.1)$$

Par exemple, en prenant $M = \mathbb{R}^{2n}$ et en notant $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ les coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^{2n} , le crochet

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right)$$

fait de M une variété de Poisson.

Un autre exemple classique de variété de Poisson — exemple qui sera largement utilisé dans le Chapitre 4 — est donné par le dual d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}')$ et $\xi \in \mathfrak{g}'$, on note $\delta_\xi f$ l'unique élément de \mathfrak{g} défini par

$$\forall \varphi \in \mathfrak{g}', \langle \varphi, \delta_\xi f \rangle = d_\xi f(\varphi). \quad (1.2)$$

On peut identifier $\delta_\xi f$ avec $d_\xi f$ puisque $\mathfrak{g}'' \simeq \mathfrak{g}$. Pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}')$ et $\xi \in \mathfrak{g}'$, on pose alors

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [\delta_\xi g, \delta_\xi f] \rangle. \quad (1.3)$$

La Formule (1.3) définit une structure de variété de Poisson sur \mathfrak{g}' , appelée structure de Berezin-Kirillov-Kostant-Souriau (voir [MR99]).

Soit $H \in \mathcal{F}(M)$. Comme l'application $f \mapsto \{f, H\}$ est une dérivation de $\mathcal{F}(M)$, il existe un unique champ de vecteurs X_H sur M (appelé champ hamiltonien de H) tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \mathcal{L}_{X_H}(f) = X_H[f] = \{f, H\}.$$

La valeur de $\{f, g\}$ en un point $z \in M$ ne dépend des fonctions f et g qu'à travers leurs différentielles $d_z f$ et $d_z g$ ($\{f, g\}(z) = d_z f \cdot X_g(z)$), il existe donc un 2-tenseur contravariant antisymétrique $P : T^*M \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\forall z \in M, \{f, g\}(z) = P(z)(d_z f, d_z g).$$

Ainsi, $P(z)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $(T_z M)^*$, et en coordonnées locales, on a

$$\{f, g\}(z) = \sum_{i,j} P_{i,j}(z) \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j}, \text{ où } P_{i,j}(z) = \{z_i, z_j\}.$$

Pour $M = \mathbb{R}^{2n}$, le tenseur P est simplement $P(z) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

• On considère maintenant un système physique donné par une variété de Poisson M , munie d'un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$, et par un hamiltonien $H \in \mathcal{F}(M)$. La mécanique classique étudie l'algèbre (commutative) $\mathcal{F}(M)$ des fonctions régulières sur M appelées *observables*, les éléments de M étant les *états* du système mécanique. L'évolution d'une observable f est déterminée par l'Equation de Hamilton

$$\dot{f} = X_H(f), \text{ i. e. } \dot{f} = \{f, H\}. \quad (1.4)$$

En mécanique quantique, l'espace des *états quantiques*, appelés aussi *fonctions d'ondes*, est un espace de Hilbert \mathcal{H} , en général de la forme $L^2(V)$, où V est une variété. Max Born en donne la signification physique suivante : soient $D \subset V$ et $\varphi \in \mathcal{H}$ la fonction d'onde d'une particule. Alors la quantité $\frac{\|1_D \cdot \varphi\|^2}{\|\varphi\|^2}$ est la probabilité de présence dans D de cette particule. Par conséquent, les multiples non nuls de φ représentent le même état quantique, et l'espace des états est donc l'espace projectif $P(\mathcal{H})$ et non plus \mathcal{H} (d'où les représentations projectives). L'espace des *observables quantiques* est une algèbre (non commutative) \mathcal{C} d'opérateurs sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} , et les quantités physiques correspondant aux observables classiques, telles que la quantité de mouvement ou l'énergie, sont des valeurs propres de ces opérateurs.

Or la mécanique quantique donne dans le cas microscopique des résultats plus précis que son analogue classique. D'où l'intérêt d'obtenir une description quantique du système classique $(M, \mathcal{F}(M))$: une telle opération s'appelle une quantification. Une des solutions est la quantification géométrique¹ qui permet de construire explicitement un espace de Hilbert et une algèbre d'opérateurs sur cet espace : à toute observable classique $f \in \mathcal{F}(M)$, on associe une observable quantique $\hat{f} \in \mathcal{C}$ vérifiant certaines hypothèses. Après les travaux précurseurs de Dirac [Dir26],

1. Voir le livre [GRS07] de Laurent Guieu, Claude Roger et Vlad Sergiescu sur le groupe de Virasoro pour une belle introduction à la quantification géométrique.

une première correspondance entre les observables de la mécanique quantique et celles de la mécanique classique a été établie par Weyl [Wey31] (du classique vers le quantique) et Wigner [Wig32] (du quantique vers le classique). En général, les hypothèses choisies pour l'application $f \mapsto \widehat{f}$ sont (voir [Dir26]) celles de Dirac (parfois affaiblies) :

- (1) $\forall f, g \in \mathcal{F}(M), [\widehat{f}, \widehat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}},$
- (2) $\widehat{1} = Id,$
- (3) $\widehat{\widehat{f}} = f^*,$

où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur de $End(\mathcal{H})$, et où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h étant la constante de Planck ($6.63 \cdot 10^{-34} J.s$). Pour les observables quantiques, l'Equation de Hamilton (1.4) devient alors l'équation

$$\dot{\widehat{f}} = \frac{i}{\hbar} [\widehat{H}, \widehat{f}], \quad (1.5)$$

appelée Equation de Heisenberg.

On obtient la *limite classique* de la mécanique quantique quand on considère que la constante de Planck est un paramètre infiniment petit. Cela signifie qu'en prenant $\hbar \rightarrow 0$ dans les équations de la mécanique quantique, on retrouve les équations de la mécanique classique.

Reprenons l'exemple de variété de Poisson cité plus haut, avec $M = \mathbb{R}^2$, et notons q, p les coordonnées. On prend $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R})$ et on pose (ce sont les règles de la quantification canonique)

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{q} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ f \mapsto qf \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \widehat{p} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ f \mapsto -i\hbar \frac{\partial f}{\partial q} \end{array} \right.$$

Alors $[\widehat{q}, \widehat{p}] = i\hbar Id = i\hbar \widehat{1} = i\hbar \widehat{\{q, p\}}$, de sorte que \widehat{q} et \widehat{p} vérifient les conditions de Dirac. On peut étendre la quantification à $\widehat{q^2}, \widehat{p^2}, \widehat{pq}$, mais le Théorème de Van Hove² montre que l'on ne peut pas prolonger cette quantification aux polynômes en q, p de degré strictement supérieur à 3 tout en satisfaisant les conditions de Dirac ; il est donc nécessaire de les affaiblir.

• On peut également utiliser l'analyse de Fourier : en effet, si \widehat{f} désigne la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{H}$, on a

$$\widehat{p}(f)(q) = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial q}(q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{iqp}{\hbar}} p \widehat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right) dp,$$

et, d'après la Formule d'inversion de Fourier,

$$\widehat{q}(f)(q) = qf(q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{iqp}{\hbar}} q \widehat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right) dp.$$

Ces deux formules se généralisent pour une fonction $F(q, p)$ en la transformée de Weyl de F , définie par

$$W(F)(f)(q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}(q-q')p} F\left(\frac{q+q'}{2}, p\right) f(q') dq' dp.$$

Si $F = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ (avec $x_{i_l} = p$ ou q) est un polynôme, on a

$$W(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} W(x_{i_{\sigma(1)}}) \circ \dots \circ W(x_{i_{\sigma(k)}}).$$

2. Voir le livre [GRS07] et en particulier son fameux "Voyage dans la quantification" pour une agréable introduction au sujet.

On a $W(1) = Id$, $W(\overline{F}) = W(F)^*$, mais la condition **(1)** de Dirac n'est vérifiée que modulo \hbar^3 : on a en effet la relation

$$[W(F), W(G)] = i\hbar W(\{F, G\}) + \sum_{j=1}^{\infty} \hbar^{2j+1} C_p(F, G), \quad (1.6)$$

où les C_j sont des opérateurs bidifférentiels.

- La quantification géométrique, très intéressante mais exigeant des conditions d'application très fortes (polarisation), a l'inconvénient de ne pas pouvoir être toujours utilisée : elle ne permet en fait de quantifier qu'un nombre assez restreint d'observables classiques. Ainsi on a été amené à introduire d'autres quantifications comme la quantification asymptotique et la quantification par déformation. Cette dernière, décrite en 1978 par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans l'article fondateur [BFF⁺78], trouve son origine dans la Formule (1.6), et généralise l'article [FLS76] sur les déformations différentiables et les travaux de Vey [Vey75] (voir aussi [Ber75] et [Ste05]). L'article [BFF⁺78] propose ainsi une nouvelle approche axiomatique de la quantification qui constitue une bonne alternative à la quantification géométrique : au lieu de construire une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert, il s'agit d'obtenir une déformation formelle de la multiplication de $\mathcal{F}(M)$, donnée par l'algèbre des séries formelles $\mathcal{F}(M)[[\hbar]]$ (\hbar est désormais une variable formelle), munie du star-produit associatif (mais non commutatif)

$$f * g = \sum_{j=0}^{\infty} m_j(f, g) \hbar^j \quad (1.7)$$

où les applications m_j sont bilinéaires et où $m_0(f, g) = fg$. La quantification est alors donnée par l'application $f \mapsto \hat{f}$ qui associe à tout élément $f \in \mathcal{F}(M)$ l'opérateur formel $\hat{f} : g \mapsto f * g$. En général, on demande que les applications m_j soient des opérateurs bidifférentiels³ nuls sur les constantes et qu'elles vérifient les conditions suivantes

- (1) $m_j(f, g) = (-1)^j m_j(g, f)$,
- (2) $m_1(f, g) = \{f, g\}$.

Le star-produit ainsi défini vérifie alors les conditions **(2)** et **(3)** de Dirac, tandis que la condition **(1)** de Dirac est satisfaite modulo \hbar^3 .

- Etudions l'exemple de la quantification de Weyl, qui est une autre approche de l'exemple (sur la transformation de Fourier) donné plus haut, et qui fait l'objet de l'article [AMA76] : soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie, et (A_1, \dots, A_n) une base de \mathfrak{g} . L'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{F}(\mathfrak{g}') = \mathbb{C}[a_1, \dots, a_n]$ des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g}' . Pour $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, posons $\xi a := \sum_{j=1}^n \xi_j a_j$ et $\xi A := \sum_{j=1}^n \xi_j A_j$. L'application de Poincaré-Birkhoff-Witt

$$\begin{aligned} \Phi : S(\mathfrak{g}) &\rightarrow U(\mathfrak{g}) \\ a_{j_1} \dots a_{j_r} &\mapsto \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} A_{j_{\sigma(1)}} \dots A_{j_{\sigma(r)}} \end{aligned}$$

3. Il résulte de la condition de localité imposée par la théorie des champs que les opérateurs sont nécessairement bidifférentiels (théorème de Peetre).

est bijective (voir [Dix74]) et c'est l'unique application linéaire de $S(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$ telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \Phi((\xi a)^m) = (\xi A)^m.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \Phi((\xi a)^m) &= \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \xi_{j_1} \dots \xi_{j_m} \Phi(a_{j_1} \dots a_{j_m}) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \left(\sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \xi_{j_1} \dots \xi_{j_m} A_{j_{\sigma(1)}} \dots A_{j_{\sigma(m)}} \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \xi_{j_1} \dots \xi_{j_m} A_{j_1} \dots A_{j_m} = (\xi A)^m. \end{aligned}$$

L'unicité de Φ vient de ce que tout polynôme $P(a_1, \dots, a_m)$ s'écrit comme combinaison linéaire de termes de la forme $\left(\sum_{j=1}^n \xi_j a_j \right)^m$, où tous les ξ_j sauf un sont nuls.

Notons maintenant \widehat{f} la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathfrak{g}')$, définie par

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}', \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathfrak{g}'} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

On étend cette définition aux distributions tempérées, en posant $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$, pour toute fonction φ de l'espace de Schwarz (voir [GW00]). On a alors $\widehat{\partial_\alpha \delta}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\delta}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (i\xi)^\alpha$, d'où $\widehat{\partial_\alpha \delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \widehat{(ia)^\alpha}$, et d'après la formule d'inversion de Fourier, $\widehat{a^\alpha} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^{|\alpha|} \partial_\alpha \delta$, où δ désigne l'impulsion de Dirac.

On a par ailleurs

$$e^{i\xi A} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} (\xi A)^m = \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \xi^\alpha \Phi(a^\alpha).$$

Définissons alors l'application $W : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ par

$$W(P) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \langle \widehat{P}, e^{i\xi A} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle \widehat{P}, \xi^\alpha \rangle \Phi(a^\alpha).$$

On en déduit que pour tout $P \in S(\mathfrak{g})$, $\boxed{W(P) = \Phi(P)}$. En effet,

$$W(a^\beta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle \widehat{a^\beta}, \xi^\alpha \rangle \Phi(a^\alpha),$$

or

$$\langle \widehat{a^\beta}, \xi^\alpha \rangle = \langle (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^{|\beta|} \partial_\beta \delta, \xi^\alpha \rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^{|\beta|} (-1)^{|\beta|} \langle \delta, \partial_\beta \xi^\alpha \rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^{|\beta|} (-1)^{|\beta|} \beta! \delta_\alpha^\beta,$$

d'où l'égalité $W(a^\beta) = \Phi(a^\beta)$.

On définit l'application $*$: $S(\mathfrak{g}) \times S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$ par $P_1 * P_2 = \Phi^{-1}(\Phi(P_1)\Phi(P_2))$. Toujours grâce à la transformation de Fourier, on peut montrer que (voir [AMA76])

$$(P_1 * P_2)(a) = e^{ia\tau(i\partial_{a'}, i\partial_{a''})} P_1(a') P_2(a'') \Big|_{a'=a''=a},$$

où $\tau(\xi, \eta)$ est défini par $e^{\xi A} e^{\eta A} = e^{(\xi + \eta + \tau(\xi, \eta))A}$ (formule de Baker-Campbell-Hausdorff).

Dans le cas de l'algèbre de Lie de Heisenberg, de base $(A_1 := E_{1,2}, A_2 := E_{2,3}, A_3 := E_{1,3})$ vérifiant la relation $[\xi A, \eta A] = (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) A_3$, on a $\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) A_3$.

Donc

$$\begin{aligned} (P_1 * P_2)(a) &= e^{ia_3 \frac{1}{2}(-\partial_{a'_1} \partial_{a''_2} + \partial_{a'_2} \partial_{a''_1})} P_1(a') P_2(a'') \Big|_{a'=a''=a} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(i \frac{a_3}{2}\right)^j \left(-\partial_{a'_1} \partial_{a''_2} + \partial_{a'_2} \partial_{a''_1}\right)^j P_1(a') P_2(a'') \Big|_{a'=a''=a} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(i \frac{a_3}{2}\right)^j \sum_{k=0}^j C_j^k (-1)^{j-k} \partial_{a'_1}^{j-k} \partial_{a'_2}^k \partial_{a''_1}^{j-k} \partial_{a''_2}^k P_1(a') P_2(a'') \Big|_{a'=a''=a}. \end{aligned}$$

En posant $a_1 = p$, $a_2 = q$, $a_3 = \hbar$, on trouve

$$P_1 * P_2 = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j C_j^k (-1)^{j-k+1} (\partial_q^{j-k} \partial_p^k P_1)(\partial_q^k \partial_p^{j-k} P_2)}_{D_j(P_1, P_2)} \left(i \frac{\hbar}{2}\right)^j.$$

L'opérateur D_j a la même parité que j , d'où la formule (produit de Moyal [Moy49])

$$\begin{aligned} P_1 * P_2 - P_2 * P_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} 2i \sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k (-1)^{m-k} (\partial_q^{2m+1-k} \partial_p^k P_1)(\partial_q^k \partial_p^{2m+1-k} P_2) \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2m+1} \\ &= i\hbar \{P_1, P_2\} + \sum_{m=1}^{\infty} \dots \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2m+1}, \end{aligned}$$

où $\{P_1, P_2\} = \partial_q P_1 \partial_p P_2 - \partial_p P_1 \partial_q P_2$. Donc

$$[\Phi(P_1), \Phi(P_2)] = \Phi(P_1)\Phi(P_2) - \Phi(P_2)\Phi(P_1) = \Phi(P_1 * P_2 - P_2 * P_1) \equiv i\hbar \Phi(\{P_1, P_2\}) \mod \hbar^3.$$

• On peut se demander dans quels cas une variété de Poisson admet une quantification par déformation. Une première réponse a été donnée en 1983 par P. Lecomte et M. DeWilde qui ont montré dans [DL83] son existence sur toute variété symplectique. L'étude a été poursuivie par Fedosov [Fed94], et en 1997, M. Kontsevich a généralisé le résultat dans son article [Kon03] en construisant un star-produit sur toute variété de Poisson (voir aussi [Kon99] et [Tam98]). En outre, il a démontré que si M est une variété lisse, alors les classes d'équivalence de déformations formelles du crochet de Poisson nul sont en bijection avec les classes d'équivalence de star-produits, i. e. il existe un isomorphisme canonique

$$\frac{\{\text{Structures de Poisson formelles sur } M\}}{\text{Equivalence de jauge}} \simeq \frac{\{\text{Star-produits sur } M\}}{\text{Equivalence de jauge}}.$$

Cela généralise la classification des star-produits sur les espaces symplectiques étudiée par Gutt [Gut83]. De plus, d'après le Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg (voir [HKR62]), tout star-produit abélien est trivial. Ces résultats sont importants, car ce sont des résultats globaux sur des variétés (lisses). Un autre théorème intéressant est dû à Cahen, Gutt, et Rawnsley [CGR96] : si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple, il n'existe pas de star-produit sur un voisinage quelconque de l'origine de \mathfrak{g}' qui soit tangent aux orbites coadjointes.

Amnon Yekutieli a démontré dans [Yek99] un analogue “algébrique-géométrique” du Théorème de Kontsevich : soit X une variété algébrique lisse qui est \mathcal{D} -affine⁴. Alors il existe une application canonique Q , appelée application de quantification,

$$Q : \frac{\{\text{Structures de Poisson formelles sur } X\}}{\text{Equivalence de jauge}} \xrightarrow{\simeq} \frac{\{\text{Quantifications par déformation de } \mathcal{O}_X\}}{\text{Equivalence de jauge}},$$

où \mathcal{O}_X est le faisceau structurel de X . En outre, Q est bijective si X est affine.

Dans le Chapitre 4, nous étudierons des star-produits invariants sur des orbites coadjointes d'une algèbre de Lie. Ceux-ci ont été définis dans l'article [BFF⁺78] où les auteurs ont aussi montré que, dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple, il existe toujours des star-produits invariants sur toute orbite coadjointe “régulière”. Pour cela, ils ont introduit une correspondance de Weyl équivariante. Comme le souligne Frønsdal, les star-produits invariants sont implicites dans les études récentes sur les orbites nilpotentes, en particulier dans celles qui étudient l'idéal de Joseph (voir par exemple [BJ98]).

De plus, la star-quantification invariante a servi d'outil en théorie des représentations pour généraliser la méthode de quantification géométrique de Kostant [Kos70] et Souriau [Sou70] (voir par exemple [Frø78], [Gut83], [Wei95]).

Dans le cas où M est une variété algébrique singulière, de la forme

$$M = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_m(\mathbf{z}) = 0\},$$

où f_1, \dots, f_m sont des polynômes de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ — c'est le cas étudié dans le Chapitre 2 — les fonctions régulières considérées sont les fonctions polynomiales sur M , dont l'algèbre s'identifie à l'algèbre quotient $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Le Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg n'est plus applicable. Cependant, les déformations de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$, définies par la Formule (1.7), sont toujours classifiées par la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{F}(M)$, et on se trouve ainsi ramené à l'étude de la cohomologie de Hochschild de $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$.

1.2 Homologie, cohomologie de Hochschild et déformations

En 1964, Gerstenhaber publie un article fondamental sur les déformations des algèbres associatives [Ger64]. Il y prouve en particulier que les déformations d'une algèbre associative sont classifiées par sa cohomologie de Hochschild. Le but de ce paragraphe est de rappeler les définitions de l'homologie et de la cohomologie de Hochschild, et de voir quel est le lien entre cette cohomologie et les déformations. Nous énoncerons aussi le Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg qui

4. Soit \mathcal{D}_X le faisceau des opérateurs différentiels sur X . On dit qu'une variété algébrique lisse sur un corps \mathbb{K} contenant \mathbb{R} est \mathcal{D} -affine si l'on a $H^j(X, \mathcal{M}) = 0$ pour tout $j > 0$ et tout faisceau cohérent \mathcal{M} de \mathcal{D}_X -modules.

affirme que la cohomologie de Hochschild de l'algèbre des fonctions sur une variété *lisse* est isomorphe à l'espace des champs de multivecteurs sur la variété (voir [HKR62], [FLS74] et [Vey75]). Nous établirons ensuite des résultats sur la décomposition BGS (Barr-Gerstenhaber-Schack) du complexe de Hochschild que nous appliquerons aux star-produits.

1.2.1 Cohomologie de Hochschild

Etant donné une \mathbb{C} -algèbre associative commutative, notée A , le complexe cohomologique de Hochschild de A est donné par

$$\mathcal{C}^0(A) \xrightarrow{d^{(0)}} \mathcal{C}^1(A) \xrightarrow{d^{(1)}} \mathcal{C}^2(A) \xrightarrow{d^{(2)}} \mathcal{C}^3(A) \xrightarrow{d^{(3)}} \mathcal{C}^4(A) \xrightarrow{d^{(4)}} \dots,$$

où l'espace $\mathcal{C}^p(A)$ des p -cochaînes est défini pour $p \in -\mathbb{N}^*$ par $\mathcal{C}^p(A) = 0$, $\mathcal{C}^0(A) = A$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}^p(A)$ est l'espace des applications \mathbb{C} -linéaires de $A^{\otimes p}$ dans A (voir [BCKT05] et [Mas04]). La différentielle $d^\bullet = \bigoplus_{i=0}^\infty d^{(p)}$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \forall C \in \mathcal{C}^p(A), \quad d^{(p)} C(a_0, \dots, a_p) &= a_0 C(a_1, \dots, a_p) - \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i C(a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_p) \\ &\quad + (-1)^{p-1} C(a_0, \dots, a_{p-1}) a_p. \end{aligned}$$

On peut l'écrire en termes du crochet de Gerstenhaber⁵ $[\cdot, \cdot]_G$ et du produit μ de A , comme suit

$$\boxed{d^{(p)} C = (-1)^{p+1} [\mu, C]_G}.$$

On définit alors la cohomologie de Hochschild de A comme la cohomologie du complexe de Hochschild associé à A . On pose $HH^0(A) = \text{Ker } d^{(0)} = A$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad Z^p(A) = \text{Ker } d^{(p)}, \quad B^p(A) = \text{Im } d^{(p-1)}, \quad \text{et } HH^p(A) = Z^p(A) / B^p(A).$$

5. Rappelons que pour $F \in \mathcal{C}^p(A)$ et $H \in \mathcal{C}^q(A)$, le produit de Gerstenhaber est l'élément $F \bullet H \in \mathcal{C}^{p+q-1}(A)$ défini par

$$F \bullet H(a_1, \dots, a_{p+q-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i(q+1)} F(a_1, \dots, a_i, H(a_{i+1}, \dots, a_{i+q}), a_{i+q+1}, \dots, a_{p+q-1}).$$

Il n'est pas associatif, mais l'associateur $Ass(F, H, K) := (F \bullet H) \bullet K - F \bullet (H \bullet K)$ vérifie la relation

$$Ass(F, H, K) = (-1)^{(q-1)(r-1)} Ass(F, K, H).$$

Par conséquent, le crochet de Gerstenhaber, défini par $[F, H]_G := F \bullet H - (-1)^{(p-1)(q-1)} H \bullet F$, est antisymétrique, i. e.

$$[F, H]_G = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [H, F]_G,$$

et vérifie l'identité de Jacobi graduée

$$[F, [H, K]_G]_G + (-1)^{(p-1)(q+r-2)} [H, [K, F]_G]_G + (-1)^{(r-1)(p+q-1)} [K, [F, H]_G]_G = 0.$$

Voir par exemple [Ger63], et [BCKT05] p. 38.

On termine ce paragraphe par une propriété importante de la cohomologie de Hochschild. Une algèbre de Gerstenhaber est une algèbre associative \mathbb{Z} -graduée $V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} V^p$ dont la multiplication est commutative graduée, telle que l'algèbre translatée⁶ $V[1]$ est munie d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ tel que pour tout $x \in V^p$, $[x, \cdot]$ est une dérivation de degré $p + 1$ de l'algèbre V . On dit que V est une algèbre de Gerstenhaber *différentielle graduée* si, en plus, V est munie d'une différentielle qui est une dérivation pour la multiplication de V et le crochet de Lie.

Etant donné deux cochaînes $F \in \mathcal{C}^p(A)$ et $G \in \mathcal{C}^q(A)$, leur *cup-produit* est défini comme la cochaîne $F \cup G \in \mathcal{C}^{p+q}(A)$ telle que

$$(F \cup G)(a_1, \dots, a_{p+q}) = (-1)^{pq} F(a_1, \dots, a_p) G(a_{p+1}, \dots, a_{p+q}).$$

On a alors la proposition (voir [Ger63] et [BCKT05]) :

Proposition 1.2.1

- Muni du cup-produit et de la différentielle de Hochschild, le complexe de Hochschild est une algèbre associative différentielle graduée.
- Munie du cup-produit et du crochet de Gerstenhaber, la cohomologie de Hochschild est une algèbre de Gerstenhaber.

1.2.2 Homologie de Hochschild

Le complexe homologique de Hochschild de A est le complexe

$$\dots \xrightarrow{d_5} \mathcal{C}_4(A) \xrightarrow{d_4} \mathcal{C}_3(A) \xrightarrow{d_3} \mathcal{C}_2(A) \xrightarrow{d_2} \mathcal{C}_1(A) \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0(A),$$

où l'espace $\mathcal{C}_p(A)$ des p -chaînes est défini par $\mathcal{C}_p(A) = 0$ pour $p \in -\mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_0(A) = A$ et $\mathcal{C}_p(A) = A \otimes_{\mathbb{C}} A^{\otimes p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. La différentielle $d_{\bullet} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} d_p$ est donnée par

$$\begin{aligned} d_p(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p) &= a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_p + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_p \\ &\quad + (-1)^p a_p a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{p-1}. \end{aligned}$$

On définit alors l'homologie de Hochschild de A comme l'homologie du complexe homologique de Hochschild associé à A . On pose $HH_0(A) = A / \text{Im } d_1 = A$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, Z_p(A) = \text{Ker } d_p, B_p(A) = \text{Im } d_{p+1} \text{ et } HH_p(A) = Z_p(A) / B_p(A).$$

1.2.3 Homologie de Hochschild réduite

Quand l'algèbre A n'est pas unitaire, on utilise souvent le complexe homologique de Hochschild réduit :

$$\dots \xrightarrow{dr_5} \mathcal{C}_4(A) \xrightarrow{dr_4} \mathcal{C}_3(A) \xrightarrow{dr_3} \mathcal{C}_2(A) \xrightarrow{dr_2} \mathcal{C}_1(A),$$

6. L'algèbre translatée est l'algèbre graduée dont les éléments de degré p sont les éléments de degré $p + 1$ de V .

où les p -chaînes sont définies par $C_p(A) = 0$ pour $p \in -\mathbb{N}$, et $C_p(A) = A^{\otimes p}$ si $p \in \mathbb{N}^*$. La différentielle $dr_\bullet = \bigoplus_{p=1}^{\infty} dr_p$ est donnée par $dr_1(a) = 0$ et pour $p \geq 2$

$$dr_p(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_p) = a_1 a_2 \otimes a_3 \otimes \cdots \otimes a_p + \sum_{i=2}^{p-1} (-1)^{i+1} a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_p.$$

Alors on définit l'homologie de Hochschild réduite de A par

$$Zr_p(A) = \text{Ker } dr_p, \text{ Br}_p(A) = \text{Im } dr_{p+1} \text{ et } HHr_p(A) = Zr_p(A) / \text{Br}_p(A).$$

On peut montrer que si A est unitaire, l'homologie du complexe réduit est nulle (voir [Lod98]).

Par ailleurs, $d^{(p)}$ et dr_{p+1} sont reliés par la formule :

$$\begin{aligned} \forall C \in C^p(A), \quad d^{(p)} C(a_0, \dots, a_p) &= a_0 C(a_1, \dots, a_p) - C(dr_{p+1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_p)) \\ &\quad + (-1)^{p-1} C(a_0, \dots, a_{p-1}) a_p. \end{aligned}$$

Dans le Chapitre 4, nous utiliserons un couplage entre l'homologie de Hochschild réduite et la cohomologie de Hochschild, en considérant une sous-algèbre non-unitaire A_+ de A .

1.2.4 Cohomologie de Hochschild et déformations d'algèbres associatives

• Notons $\mathbb{C}[[\hbar]]$ (resp. $A[[\hbar]]$) l'algèbre des séries formelles en \hbar , à coefficients dans \mathbb{C} (resp. A). Une déformation, ou star-produit, de l'algèbre A est définie comme une application $*$ de $A[[\hbar]] \times A[[\hbar]]$ dans $A[[\hbar]]$ qui est $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire et telle que

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{C}, \forall s \in A[[\hbar]], \quad k * s &= s * k = s, \\ \forall (s, t) \in A[[\hbar]]^2, \quad s * t &\equiv st \pmod{\hbar A[[\hbar]]}, \\ \forall (s, t, u) \in A[[\hbar]]^3, \quad s * (t * u) &= (s * t) * u. \end{aligned}$$

Cela signifie qu'il existe une suite d'applications bilinéaires⁷ C_j de $A \times A$ dans A dont le premier terme C_0 est la multiplication de A et telle que

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad a * b = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(a, b) \hbar^j, \quad (1.8)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i+j=n} C_i(a, C_j(b, c)) = \sum_{i+j=n} C_i(C_j(a, b), c), \text{ i. e. } \sum_{i+j=n} [C_i, C_j]_G = 0. \quad (1.9)$$

On appelle cette application *star-produit d'ordre p* si l'Equation (1.9) est vérifiée (seulement) pour $n \leq p$.

Deux star-produits $*$ et $'$ de A sont dits équivalents s'il existe un $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -automorphisme de $A[[\hbar]]$, noté φ , tel que

$$\begin{aligned} \forall (s, t) \in A[[\hbar]]^2, \quad \varphi(s * t) &= \varphi(s) *' \varphi(t) \\ \forall s \in A[[\hbar]], \quad \varphi(s) &\equiv s \pmod{\hbar A[[\hbar]]}. \end{aligned}$$

7. Souvent, dans la définition d'un star-produit (voir par exemple ([BCKT05])), les applications bilinéaires C_j sont des opérateurs bidifférentiels. Ici, nous ne faisons pas cette hypothèse. Nous imposerons éventuellement par la suite des conditions sur ces applications.

Cela signifie qu'il existe une suite d'applications linéaires φ_j de A dans A dont le premier terme φ_0 est l'identité de A et telle que

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \quad \varphi(a) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(a) \hbar^j, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i+j=n} \varphi_i(C_j(a, b)) &= \sum_{i+j+k=n} C'_i(\varphi_j(a), \varphi_k(b)). \end{aligned}$$

• La cohomologie de Hochschild joue un rôle important dans l'étude des star-produits de l'algèbre A , car son calcul constitue une première étape en vue de leur classification. En effet, si $\pi \in \mathcal{C}^2(A)$, on peut construire un star-produit du premier ordre de A (noté $*$) tel que $C_1 = \pi$, i. e.

$$a * b = ab + \hbar \pi(a, b),$$

si et seulement si $\pi \in \text{Ker } d^{(2)}$. De plus, deux star-produits du premier ordre (définis par π et π') sont équivalents si et seulement s'il existe une application linéaire $\varphi_1 : A \rightarrow A$ telle que

$$\pi'(a, b) - \pi(a, b) = a\varphi_1(b) - \varphi_1(ab) + \varphi_1(a)b,$$

i. e. la différence $\pi' - \pi$ est un élément de $\text{Im } d^{(1)}$. Ainsi l'ensemble des classes de star-produits du premier ordre est en bijection avec $HH^2(A)$.

Si $m = \sum_{j=0}^p C_j \hbar^j$ est un star-produit d'ordre p , alors on peut étendre m en un star-produit d'ordre $p+1$ si et seulement s'il existe $C_{p+1} \in \mathcal{C}^2(A)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in A, \quad \sum_{i=1}^p (C_i(C_{p+1-i}(a, b), c) - C_i(a, C_{p+1-i}(b, c))) &= d^{(2)} C_{p+1}(a, b, c), \\ \text{i. e. } \sum_{i=1}^p [C_i, C_{p+1-i}]_G &= 2 d^{(2)} C_{p+1}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Or d'après l'identité de Jacobi graduée pour $[\cdot, \cdot]_G$, le membre de gauche est fermé, i. e. la somme appartient à $\text{Ker } d^{(3)}$. En effet,

$$\begin{aligned} d^{(3)} \left(\sum_{i=1}^p [C_i, C_{p+1-i}]_G \right) &= \sum_{i=1}^p [\mu, [C_i, C_{p+1-i}]_G]_G \\ &= \sum_{i=1}^p ([C_{p+1-i}, [\mu, C_{p+1-i}]_G]_G - [C_i, [\mu, C_{p+1-i}]_G]_G) \\ &= \sum_{i=1}^p [C_{p+1-i}, [\mu, C_{p+1-i}]_G]_G - \sum_{i=1}^p [C_i, [C_{p+1-i}, \mu]_G]_G \\ &= \sum_{i=1}^p [C_{p+1-i}, [\mu, C_{p+1-i}]_G]_G - \sum_{j=1}^p [C_{p+1-j}, [C_j, \mu]_G]_G = 0. \end{aligned}$$

Ce résultat, quoique simple, est important (voir par exemple [BCKT05], [BFF⁺78] et [Ger64]). Ainsi $HH^3(A)$ contient les obstructions à étendre une déformation d'ordre p en une déformation d'ordre $p+1$. De plus, une algèbre commutative peut admettre des déformations non commutatives ; les algèbres commutatives ne sont donc pas "isolées" parmi les algèbres associatives.

1.2.5 Le Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg

Rappelons maintenant un résultat fondamental concernant la (co)homologie de Hochschild d'une algèbre lisse que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite. Pour plus d'informations sur ce résultat, voir l'article [HKR62] et le livre [Lod98], Paragraphe 3.4.

Soit A une \mathbb{C} -algèbre. Le A -module $\Omega^1(A)$ des différentielles de Kähler est le A -module engendré par les symboles \mathbb{C} -linéaires da pour $a \in A$, tels que $d(ab) = a(bd) + b(da)$.

Pour $n \geq 2$, le A -module des n -formes différentielles est le produit extérieur $\Omega^n(A) := \Lambda^n \Omega^1(A)$.

Par convention, on pose $\Omega^0(A) = A$.

L'application d'antisymétrisation ε_n est définie par

$$\varepsilon_n(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)},$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

Notons $HH_*(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} HH_n(A)$ et $\Omega^*(A)$ l'algèbre extérieure de A .

Théorème 1.2.2 (*Hochschild-Kostant-Rosenberg*)

Soit A une algèbre lisse. Alors l'application d'antisymétrisation

$$\varepsilon_* : \Omega^*(A) \rightarrow HH_*(A)$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées.

1.2.6 La décomposition BGS de la (co)homologie de Hochschild

Le rôle joué par la décomposition BGS du complexe de Hochschild est important, même si celle-ci est assez peu utilisée. En particulier, la non existence de déformations abéliennes non triviales dans le cas des variétés lisses provient de l'annulation de la composante de Harrison de la cohomologie de Hochschild. Les variétés algébriques admettent en revanche des déformations plus riches.

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment les espaces du complexe (co)homologique de Hochschild se décomposent en sommes directes. Cette décomposition, fondée sur l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur les n -cochaînes, et sur l'existence d'idempotents appelés idempotents eulériens, induit une décomposition en somme directe des espaces de (co)homologie. La décomposition de la cohomologie de Hochschild d'une algèbre commutative a été obtenue par Gerstenhaber et Schack [GS87], après les travaux pionniers de Harrison [Har62] et Barr ([Bar62], [Bar68] et [Ger99]). Dans ce paragraphe, on utilise principalement les articles [Bar68] et [GS87] (voir aussi [Lod89] et [Lod94]).

On considère le complexe homologique de Hochschild, avec $C_p(A) = A \otimes A^{\otimes p}$, et on écrit ses éléments sous la forme $a_0[a_1, \dots, a_p] := a_0 \otimes a_1 \cdots \otimes a_p$. L'action de A sur $C_p(A)$

$$\begin{aligned} A \times C_p(A) &\rightarrow C_p(A) \\ (b_0, a_0[a_1, \dots, a_p]) &\mapsto (b_0 a_0)[a_1, \dots, a_p] \end{aligned}$$

définit sur $C_p(A)$ une structure de A -module pour laquelle la différentielle d est A -linéaire. On utilise également l'isomorphisme $C_p(A) \otimes_A C_q(A) \simeq C_{p+q}(A)$, par lequel on identifie les éléments $(a_0[a_1, \dots, a_p]) \otimes (b_0[b_1, \dots, b_q])$ et $(a_0 b_0)[a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q]$.

La différentielle d'un élément $[a_1, \dots, a_p] \in C_p(A)$ est donc

$$d_p[a_1, \dots, a_p] = a_1[a_2, \dots, a_p] + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j [a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_p] + (-1)^p a_p[a_1, \dots, a_{p-1}].$$

On a alors la relation suivante :

Proposition 1.2.3

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$d_{p+1}[a_1, \dots, a_{p+1}] = d_{i+1}[a_1, \dots, a_{i+1}] \otimes [a_{i+2}, \dots, a_{p+1}] + (-1)^i [a_1, \dots, a_i] \otimes d_{p-i+1}[a_{i+1}, \dots, a_{p+1}].$$

Démonstration :

Par définition de d_p , on a

$$\begin{aligned} & d_{i+1}[a_1, \dots, a_{i+1}] \otimes [a_{i+2}, \dots, a_{p+1}] + (-1)^i [a_1, \dots, a_i] \otimes d_{p-i+1}[a_{i+1}, \dots, a_{p+1}] \\ = & a_1[a_2, \dots, a_{i+1}] \otimes [a_{i+2}, \dots, a_{p+1}] + \sum_{j=1}^i (-1)^j [a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{i+1}] \otimes [a_{i+2}, \dots, a_{p+1}] \\ & + (-1)^{i+1} (a_{i+1}[a_1, \dots, a_i]) \otimes [a_{i+2}, \dots, a_{p+1}] + (-1)^i [a_1, \dots, a_i] \otimes (a_{i+1}[a_{i+2}, \dots, a_{p+1}]) \\ & + \sum_{j=i+1}^p (-1)^j [a_1, \dots, a_i] \otimes [a_{i+1}, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{p+1}] \\ & + (-1)^{p+1} [a_1, \dots, a_i] \otimes (a_{p+1}[a_{i+1}, \dots, a_p]) \\ = & a_1[a_2, \dots, a_{p+1}] + \sum_{j=1}^p (-1)^j [a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{p+1}] + (-1)^{p+1} a_{p+1}[a_1, \dots, a_p] \\ = & d_{p+1}[a_1, \dots, a_{p+1}], \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant de l'isomorphisme $C_p(A) \otimes_A C_q(A) \simeq C_{p+q}(A)$. ■

On considère la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ et on étend cet épimorphisme de groupes en un \mathbb{Q} -morphisme d'algèbres de l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ dans \mathbb{Q} .

Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, soit

$$\mathfrak{S}_{i,n-i} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(i) \text{ et } \sigma(i+1) < \dots < \sigma(n)\}$$

l'ensemble des permutations $(i, n-i)$ -shuffles⁸ de \mathfrak{S}_n . On pose

$$s_{i,n-i} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{i,n-i}} \varepsilon(\sigma) \sigma \in \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$$

pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $s_{0,n} = s_{n,0} := 0$. On définit

$$s_n := \sum_{i=1}^{n-1} s_{i,n-i} \in \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n).$$

8. Ce sont les permutations qui interviennent quand on mélange deux paquets de i et $n-i$ cartes à jouer.

Remarquons que $\varepsilon(s_{i,n-i}) = C_n^i$, de sorte que $\varepsilon(s_n) = 2^n - 2 =: \lambda_n$.

On identifie les éléments de $\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ avec des applications linéaires de $\mathbb{C}_p(A)$ dans $\mathbb{C}_p(A)$, via le morphisme naturel injectif

$$\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n) \hookrightarrow L(\mathbb{C}_p(A)).$$

Une relation importante démontrée dans [Bar68] et provenant de résultats sur les modules simpliciaux donnés dans [EM53] est la suivante :

Proposition 1.2.4

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} d_{i+j}s_{i,j}[a_1, \dots, a_{i+j}] &= s_{i-1,j}(d_i[a_1, \dots, a_i] \otimes [a_{i+1}, \dots, a_{i+j}]) \\ &\quad + (-1)^i s_{i,j-1}([a_1, \dots, a_i] \otimes d_j[a_{i+1}, \dots, a_{i+j}]). \end{aligned}$$

On en déduit :

Corollaire 1.2.5

Pour $p \geq 1$, $d_p s_p = s_{p-1} d_p$.

Démonstration :

D'après la Proposition 1.2.4, on a

$$\begin{aligned} d_p s_p[a_1, \dots, a_p] &= \sum_{i=1}^{p-1} d_{i,p-i} s_p[a_1, \dots, a_p] \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} s_{i-1,p-i}(d_i[a_1, \dots, a_i] \otimes [a_{i+1}, \dots, a_p]) + (-1)^i s_{i,p-i-1}([a_1, \dots, a_i] \otimes d_{p-i}[a_{i+1}, \dots, a_p]) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} s_{i,p-i-1}(d_{i+1}[a_1, \dots, a_{i+1}] \otimes [a_{i+2}, \dots, a_p]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i s_{i,p-i-1}([a_1, \dots, a_i] \otimes d_{p-i}[a_{i+1}, \dots, a_p]) \\ &= \sum_{i=1}^{p-2} s_{i,p-i-1}(d_{i+1}[a_1, \dots, a_{i+1}] \otimes [a_{i+2}, \dots, a_p] + [a_1, \dots, a_i] \otimes d_{p-i}[a_{i+1}, \dots, a_p]) \\ &= \sum_{i=1}^{p-2} s_{i,p-i-1}(d_p[a_1, \dots, a_p]) = s_{p-1} d_p[a_1, \dots, a_p], \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant de la Propriété 1.2.3. ■

Soit $\zeta_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sigma \in \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$. Alors un calcul direct montre que ζ_n est un idempotent de $\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ (i. e. $\zeta_n^2 = 1$), et que $\varepsilon(\zeta_n) = 1$ et $\zeta_n u = \varepsilon(u)u$ pour tout $u \in \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$. De plus on a la proposition :

Proposition 1.2.6

Pour tout élément $[a_1, \dots, a_n]$, on a $d_n \zeta_n[a_1, \dots, a_n] = 0$.

Réciproquement, si pour tout élément $[a_1, \dots, a_n]$, on a $d_n u[a_1, \dots, a_n] = 0$, alors $u = \varepsilon(u)\zeta_p$.

Démonstration :

On a tout d'abord

$$\begin{aligned} n! d_n \zeta_n[a_1, \dots, a_n] &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) d_n[a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma n}] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(a_{\sigma 1}[a_{\sigma 2}, \dots, a_{\sigma n}] + \sum_{i=1}^{n-1} [a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma i} a_{\sigma(i+1)}, \dots, a_{\sigma n}] + (-1)^n a_{\sigma n}[a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma(n-1)}] \right). \end{aligned}$$

On définit les deux permutations $c := (n, n-1, \dots, 2, 1)$ et $t_i := (i, i+1)$, de signature $(-1)^{n-1}$ et -1 . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma n}[a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma(n-1)}] &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{(\sigma c)1}[a_{(\sigma c)2}, \dots, a_{(\sigma c)n}] \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\rho c^{-1}) a_{\rho 1}[a_{\rho 1}, \dots, a_{\rho(n-1)}], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) (a_{\sigma 1}[a_{\sigma 2}, \dots, a_{\sigma n}] + (-1)^n a_{\sigma n}[a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma(n-1)}]) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) (1 + (-1)^n \varepsilon(c^{-1})) a_{\sigma 1}[a_{\sigma 2}, \dots, a_{\sigma n}] = 0. \end{aligned}$$

De plus, en notant $[i, i+1]_\sigma := [a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma i} a_{\sigma(i+1)}, \dots, a_{\sigma n}]$, on obtient $[i, i+1]_\sigma = [i+1, i]_\sigma$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) [i, i+1]_\sigma = \frac{1}{2} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) [i, i+1]_\sigma + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) [i, i+1]_{\sigma t_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) [i, i+1]_\sigma + \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\rho t_i) [i, i+1]_\rho \right) = \frac{1 + \varepsilon(t_i)}{2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) [i, i+1]_\sigma = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $d_n \zeta_n[a_1, \dots, a_n] = 0$. Considérons maintenant un élément $u \in \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ tel que pour tout $[a_1, \dots, a_n]$, $d_n u[a_1, \dots, a_n] = 0$, et montrons que $u = \varepsilon(u) \zeta_p$. On peut écrire $u = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha(\sigma) \sigma$, avec $\alpha(\sigma) \in \mathbb{Q}$. En procédant comme pour ζ_n , on a

$$\begin{aligned} d_n u[a_1, \dots, a_n] &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\alpha(\sigma) + \alpha(\sigma c^{-1})) a_{\sigma 1}[a_{\sigma 2}, \dots, a_{\sigma n}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\alpha(\sigma) + \alpha(\sigma t_i)) [a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma i} a_{\sigma(i+1)}, \dots, a_{\sigma n}]. \end{aligned}$$

Cet élément ne peut être nul pour tout $[a_1, \dots, a_n]$ que si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les coefficients $\alpha(\sigma) + \alpha(\sigma t_i)$ sont nuls. En particulier, il existe $k \in \mathbb{Q}$ tel que $u = k \zeta_n$. Finalement, $\varepsilon(u) = k \varepsilon(u) = k$. ■

Le théorème suivant est le résultat-clé pour démontrer l'existence des idempotents eulériens.

Théorème 1.2.7

Le polynôme minimal de s_n est $\pi_n(X) = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$, avec $\lambda_j := 2^j - 2$.

Démonstration :

On procède par récurrence sur n . Si $n = 1$, le résultat est clair.

Si $n = 2$, on a $s_2^2 = (1 - (12))^2 = 1 - 2(12) + 1 = 2s_2$, donc $\pi_2(X) = X(X - 2)$.

• Supposons désormais $n \geq 3$ et supposons que le théorème est vrai pour $m \leq n - 1$. On a $\pi_n = (X - \lambda_n)\pi_{n-1}$, et la relation $d_n s_n = s_{n-1}d_n$ s'étend aux polynômes en s_n , d'où

$$d_n \pi_n(s_n) = \pi_n(s_{n-1})d_n = (s_{n-1} - \lambda_n)\pi_{n-1}(s_{n-1})d_n = 0$$

par hypothèse de récurrence. Pour tout élément $[a_0, \dots, a_n]$, on a donc $d_n \pi_n(s_n)[a_0, \dots, a_n] = 0$. Ainsi, d'après la Propriété 1.2.6, $\pi_n(s_n) = \varepsilon(\pi_n(s_n))\zeta_n$. Or $\varepsilon(\pi_n(s_n)) = \pi_n(\varepsilon(s_n)) = \pi_n(\lambda_n) = 0$, i. e. π_n annule s_n .

• Il reste à montrer que si P est un polynôme non nul qui annule s_n , alors π_n divise P . Soit donc P tel que $P(s_n) = 0$. Alors $0 = \varepsilon(P(s_n)) = P(\varepsilon(s_n)) = P(\lambda_n)$, donc $X - \lambda_n$ divise P . De plus, pour tout élément $[a_0, \dots, a_n]$, on a $P(s_{n-1})d_n[a_0, \dots, a_n] = d_n P(s_n)[a_0, \dots, a_n] = 0$, d'où $P(s_{n-1}) = 0$. Par hypothèse de récurrence, π_{n-1} divise P . Finalement $\pi_n = (X - \lambda_n)\pi_{n-1}$ divise P . ■

Comme tous les λ_j sont distincts, on peut poser, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$L_n^j = \prod_{i \neq j} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i},$$

le j -ème polynôme de Lagrange associé à $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, et définir

$$e_n(j) = L_n^j(s_n) = \prod_{i \neq j} \frac{s_n - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Les éléments $e_n(j) \in \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ sont appelés idempotents eulériens ou idempotents BGS. Ils vérifient les propriétés du théorème suivant :

Théorème 1.2.8

Les éléments eulériens $e_n(j)$ vérifient les propriétés suivantes :

- (1) $e_n(j)^2 = e_n(j)$ (i. e. $e_n(j)$ est idempotent),
- (2) $e_n(i)e_n(j) = 0$ si $i \neq j$ (i. e. les $e_n(j)$ sont deux à deux orthogonaux),
- (3) $e_n(1) + \dots + e_n(n) = 1$ et $\lambda_1 e_n(1) + \dots + \lambda_n e_n(n) = s_n$,
- (4) $d_n e_n(j) = e_{n-1}(j)d_n$ et $d_n e_n(n) = 0$ (i. e. $e_*(j)$ est un morphisme du complexe de Hochschild),
- (5) $\varepsilon(e_n(j)) = 0$ si $j \neq n$, $\varepsilon(e_n(n)) = 1$ et $e_n(n) = \zeta_n$.

Démonstration :

(3) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n - 1$, on a l'égalité

$$P = P(\lambda_1)L_n^1 + \dots + P(\lambda_n)L_n^n,$$

d'où la relation

$$P(s_n) = P(\lambda_1)e_n(1) + \dots + P(\lambda_n)e_n(n). \quad (1.11)$$

En particulier, si l'on prend $P = 1$ et $P = X$, on obtient les deux égalités souhaitées.

(1) et (2) Si $i \neq j$, $e_n(i)e_n(j) = L_n^i(s_n)L_n^j(s_n) = (L_n^i L_n^j)(s_n)$. Or π_n divise le polynôme $L_n^i L_n^j$, et $\pi_n(s_n) = 0$, donc $e_n(i)e_n(j) = 0$. Si $i = j$, on considère le polynôme $Q_j := L_n^j L_n^j - L_n^j$. Toutes les racines de π_n sont des racines de Q_j , donc π_n divise Q_j . Par suite, $Q_j(s_n) = 0$, d'où $e_n(j)^2 = e_n(j)$.

(4) Si $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $L_n^j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$, $d_n s_n = s_{n-1} d_n$, donc

$$d_n e_n(j) = d_n L_n^j(s_n) = L_n^j(s_{n-1}) d_n = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{s_{n-1} - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} d_n = \frac{s_{n-1} - \lambda_n}{\lambda_j - \lambda_n} e_{n-1}(j) d_n.$$

Or $s_{n-1} = \lambda_1 e_{n-1}(1) + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}(n-1)$, donc $s_{n-1} e_{n-1}(j) = \lambda_j e_{n-1}(j)$, les $e_n(j)$ étant des idempotents orthogonaux. D'où $(s_{n-1} - \lambda_n) e_{n-1}(j) = (\lambda_j - \lambda_n) e_{n-1}(j)$, ce qui entraîne $d_n e_n(j) = e_{n-1}(j) d_n$.

Si $j = n$, on a $d_n e_n(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{s_{n-1} - \lambda_i}{\lambda_n - \lambda_i} d_n = \pi_{n-1}(s_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i)^{-1} = 0$.

(5) Si $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\varepsilon(e_n(j))$ se factorise par $\varepsilon(s_n - \lambda_n) = \varepsilon(s_n) - \lambda_n = 0$, donc il est nul. Si $j = n$, on a d'après (3), $\varepsilon(e_n(n)) = \varepsilon(1 - e_n(1) - \dots - e_n(n-1)) = 1$.

Pour tout $[a_1, \dots, a_n]$, on a d'après (4), $d_n e_n(n)[a_1, \dots, a_n] = 0$, donc d'après la Propriété 1.2.6, $e_n(n) = \varepsilon(e_n(n)) \zeta_n = \zeta_n$. ■

La formule suivante est une sorte de généralisation de l'identité (1.11) utilisée dans la démonstration précédente. Elle donne une décomposition de certains morphismes du complexe de Hochschild comme combinaisons linéaires des idempotents eulériens.

Proposition 1.2.9

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n t_n = t_{n-1} d_n$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \varepsilon(t_1) e_n(1) + \dots + \varepsilon(t_n) e_n(n).$$

Démonstration :

On procède par récurrence sur n . La propriété est claire pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons $t_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(t_j) e_{n-1}(j)$. Alors $d_n \left(t_n - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(t_j) e_n(j) \right) = d_n t_n - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(t_j) e_{n-1}(j) d_n = 0$ par hypothèse de récurrence. D'après la Propriété 1.2.6,

$$t_n - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(t_j) e_n(j) = \varepsilon \left(t_n - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(t_j) e_n(j) \right) \zeta_n,$$

i. e.

$$t_n = \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(t_j) e_n(j) + \varepsilon(t_n) \zeta_n - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(t_j) \varepsilon(e_n(j)) \zeta_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon(t_j) e_n(j)$$

d'après le point (5) du Théorème 1.2.8. ■

• On obtient alors une décomposition des espaces de n -chaînes, n -cycles et n -bords de Hochschild : en posant $C_{n,k} = e_n(k)C_n$, $Z_{n,k} = e_n(k)Z_n$ et $B_{n,k} = e_n(k)B_n$, les espaces quotients $HH_{n,k} = Z_{n,k}/B_{n,k}$ sont bien définis grâce à l'assertion (4) du Théorème 1.2.8, et on a :

$$C_n = \bigoplus_{k=1}^n C_{n,k}, \quad Z_n = \bigoplus_{k=1}^n Z_{n,k}, \quad B_n = \bigoplus_{k=1}^n B_{n,k},$$

de sorte que

$$HH_n = \bigoplus_{k=1}^n HH_{n,k},$$

avec $Harr_n := HH_{n,1}$ (composante de Harrison).

• En ce qui concerne la cohomologie de Hochschild, le morphisme injectif naturel

$$\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n) \hookrightarrow L(C^{(n)}(A))$$

permet de voir les éléments de $\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ comme des applications linéaires de $C^{(n)}(A)$ dans lui-même, selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} C^{(0)}(A) & \xrightarrow{d^{(0)}} & C^{(1)}(A) & \xrightarrow{d^{(1)}} & C^{(2)}(A) & \xrightarrow{d^{(2)}} & C^{(3)}(A) & \xrightarrow{d^{(3)}} & C^{(4)}(A) & \xrightarrow{d^{(4)}} & \dots \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow e_2(1) & & \downarrow e_3(1) & & \downarrow e_4(1) & & \\ C^{(0)}(A) & \xrightarrow{d^{(0)}} & C^{(1)}(A) & \xrightarrow{d^{(1)}} & C^{(2)}(A) & \xrightarrow{d^{(2)}} & C^{(3)}(A) & \xrightarrow{d^{(3)}} & C^{(4)}(A) & \xrightarrow{d^{(4)}} & \dots \end{array}$$

(Note: The diagram shows vertical maps $e_2(1), e_3(1), e_4(1)$ from $C^{(2)}(A)$ to $C^{(1)}(A)$, $C^{(3)}(A)$ to $C^{(2)}(A)$, and $C^{(4)}(A)$ to $C^{(3)}(A)$ respectively. The horizontal maps are $d^{(i)}$.

Comme pour l'homologie, on a la relation $d^{(n)}e_n(k) = e_{n+1}(k)d^{(n)}$. Il en résulte les décompositions

$$C^n = \bigoplus_{k=1}^n C^{n,k}, \quad Z^n = \bigoplus_{k=1}^n Z^{n,k}, \quad B^n = \bigoplus_{k=1}^n B^{n,k}$$

des espaces de n -cochaînes, n -cocycles et n -cobords, et la décomposition BGS

$$HH^n = \bigoplus_{k=1}^n HH^{n,k},$$

avec $Harr^n := HH^{n,1}$ (composante de Harrison).

• Une fonction génératrice pour les idempotents a été mise en évidence par Garsia (voir [Gar90]) :

$$\sum_{k=1}^n z^k e_n(k) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (z - \delta_\sigma)(z - \delta_\sigma + 1) \dots (z - \delta_\sigma + n - 1) \varepsilon(\sigma) \sigma,$$

où δ_σ est le nombre de descentes de σ , $\delta_\sigma = |\{(i, i+1) ; \sigma(i) > \sigma(i+1)\}|$. Par exemple, la permutation (1342) a deux descentes, de 1 à 2 et de 3 à 4.

Les idempotents les plus simples sont

$$\begin{aligned} e_2(1) &= \frac{1}{2}(1 + (12)), \\ e_2(2) &= \frac{1}{2}(1 - (12)), \\ e_3(1) &= \frac{1}{6}(2(1 - (13)) + (32) - (123) + (12) - (132)), \\ e_3(2) &= \frac{1}{2}(1 + (13)), \\ e_n(n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sigma. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.10

Soit $T \in \mathbb{C}^{(3)}(A)$ une application trilinéaire. Sa décomposition BGS est alors

$$T = T^1 + T^2 + T^3 \in \mathbb{C}^{3,1} \oplus \mathbb{C}^{3,2} \oplus \mathbb{C}^{3,3},$$

avec $T^j = e_3(j)T$, i. e.

$$\begin{aligned} T^1(x, y, z) &= \frac{1}{6}(2T(x, y, z) - 2T(z, y, x) + T(x, z, y) - T(y, z, x) + T(y, x, z) - T(z, x, y)), \\ T^2(x, y, z) &= \frac{1}{2}(T(x, y, z) + T(z, y, x)), \\ T^3(x, y, z) &= \frac{1}{6}(T(x, y, z) - T(y, x, z) - T(x, z, y) - T(z, y, x) + T(y, z, x) + T(z, x, y)). \end{aligned}$$

1.2.7 Application de la décomposition BGS aux star-produits

D'après le paragraphe précédent, toute 2-cochaîne C admet la décomposition

$$C = e_2(1)C + e_2(2)C = C^+ + C^- \text{ avec } C^+ \in \mathbb{C}^{2,1} \text{ et } C^- \in \mathbb{C}^{2,2},$$

i. e. C^+ (resp. C^-) est une application bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique).

L'associativité du star-produit de (1.8) au premier ordre est alors équivalente au fait que les deux 2-cochaînes soient fermées, i. e. $d^{(2)}C^+ = d^{(2)}C^- = 0$. De plus, une déformation du premier ordre de l'algèbre est triviale si et seulement si les deux 2-cochaînes sont exactes. Dans le cas des variétés lisses, $Harr^2$ est vide ; on peut choisir $C_1^+ = 0$ puisque toute déformation est alors équivalente à une déformation dont le terme d'ordre 1 est antisymétrique.

Considérons maintenant l'Equation (1.10). Elle se schématise sous la forme

$$\begin{array}{ccc} Z^{2,1} \times Z^{2,1} & \searrow & \\ & \nearrow & Z^{3,1} \xleftarrow{d^{(2)}} Z^{2,1} \\ Z^{2,2} \times Z^{2,2} & \searrow & \\ & \nearrow & Z^{3,3} \\ Z^{2,1} \times Z^{2,2} & \searrow & \\ & \nearrow & Z^{3,2} \xleftarrow{d^{(2)}} Z^{2,2} \\ Z^{2,2} \times Z^{2,1} & \searrow & \end{array} \quad (1.12)$$

où la première colonne de flèches représente la construction du membre de gauche de l'Equation (1.10) (avec le crochet de Gerstenhaber) et la seconde colonne de flèches est l'application de la différentielle $d^{(2)}$.

Comme $B^{3,3}$ est vide, la résolution de l'obstruction dans $Z^{3,3} = HH^{3,3}$ entraîne l'annulation de la partie antisymétrique du membre de gauche de (1.10). C'est l'identité de Jacobi, vérifiée si C_1^- est un crochet de Poisson. La première ligne du diagramme montre que l'obstruction aux déformations abéliennes est la composante de Harrison $Harr^3 = HH^{3,1} \subset HH^3$.

Dans le cas des variétés lisses, on a $HH^n = HH^{n,n} = 0$, et les déformations abéliennes sont triviales d'après le Théorème HKR. Les déformations usuelles avec $C_1 = C_1^-$ ne rencontrent pas d'obstruction supplémentaire au second ordre : en effet, si $C_1^+ = 0$, alors les crochets de la première colonne appartiennent à $Z^{3,1}$ et $Z^{3,3}$. Or $HH^{3,3} = 0$, la seule obstruction est donc $Harr^3$.

1.3 Homologie et cohomologie de Poisson

Une algèbre de Poisson est une algèbre associative A qui est aussi une algèbre de Lie, et telle que les deux structures sont compatibles. Plus précisément, A est munie d'une application bilinéaire $\{\cdot, \cdot\}$ antisymétrique vérifiant, pour tout $(a, b, c) \in A^3$, les deux propriétés

- (1) $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$ (identité de Jacobi),
- (2) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ (propriété de Leibniz).

Nous avons vu au début de ce chapitre un exemple fondamental d'algèbre de Poisson, à savoir l'algèbre des fonctions régulières sur une variété de Poisson. Donnons maintenant un autre exemple d'algèbre de Poisson :

Exemple 1.3.1

- Sur $\mathbb{C}[z_1, z_2]$, l'application $\varphi \partial_1 \wedge \partial_2$ définit une structure d'algèbre de Poisson pour n'importe quel polynôme $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, ∂_j étant la dérivation par rapport à z_j (voir [RV02] et [Mon02]).
- Sur $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$, l'application $\partial_1 \varphi \partial_2 \wedge \partial_3 + \partial_2 \varphi \partial_3 \wedge \partial_1 + \partial_3 \varphi \partial_1 \wedge \partial_2$ définit une structure d'algèbre de Poisson pour n'importe quel polynôme $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ (voir [Pic05] et [Pic06]).

On définit maintenant l'homologie et la cohomologie qui sont naturellement associées à ces algèbres. Nous les utiliserons en particulier dans le Chapitre 3.

1.3.1 Homologie de Poisson

- Soit A une algèbre de Poisson. On désigne par $\Omega^p(A)$ le A -module des p -différentielles de Kähler, i. e. l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $F_0 dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_p$, où les F_j appartiennent à A , et où $d : \Omega^p(A) \rightarrow \Omega^{p+1}(A)$ est la différentielle de De Rham.

On considère le complexe

$$\cdots \xrightarrow{\delta_5} \Omega^4(A) \xrightarrow{\delta_4} \Omega^3(A) \xrightarrow{\delta_3} \Omega^2(A) \xrightarrow{\delta_2} \Omega^1(A) \xrightarrow{\delta_1} \Omega^0(A)$$

avec l'opérateur de bord de Brylinsky-Koszul δ_p (voir [Bry88])

$$\begin{aligned} \delta_p(F_0 dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_p) &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \{F_0, F_j\} dF_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \cdots \wedge dF_p \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} F_0 d\{F_i, F_j\} \wedge dF_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dF_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \cdots \wedge dF_p. \end{aligned}$$

L'espace d'homologie de Poisson de degré p est donné par la formule

$$HP_p(A) = \text{Ker } \delta_p / \text{Im } \delta_{p+1}.$$

En particulier, on a $HP_0(A) = A / \{A, A\}$. C'est l'abélianisé de A .

1.3.2 Cohomologie de Poisson

• Soit A une algèbre de Poisson. On désigne par $\mathcal{X}^p(A)$ le A -module des dérivations antisymétriques de A .

On considère le complexe

$$\mathcal{X}^0(A) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{X}^1(A) \xrightarrow{\delta^{(1)}} \mathcal{X}^2(A) \xrightarrow{\delta^{(2)}} \mathcal{X}^3(A) \xrightarrow{\delta^{(3)}} \mathcal{X}^4(A) \xrightarrow{\delta^{(4)}} \cdots$$

avec l'opérateur de cobord de Poisson $\delta^{(p)}$ défini par :

$$\begin{aligned} \delta^{(p)}(Q)(F_0, \dots, F_p) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \{F_j, Q(F_0, \dots, \widehat{F_j}, \dots, F_p)\} \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} Q(\{F_i, F_j\}, F_0, \dots, \widehat{F_i}, \dots, \widehat{F_j}, \dots, F_p). \end{aligned}$$

L'espace de cohomologie de Poisson de degré p est donné par la formule

$$HP^p(A) = \text{Ker } \delta^{(p)} / \text{Im } \delta^{(p-1)}.$$

On a vu que la différentielle de Hochschild peut s'écrire en fonction du crochet de Gerstenhaber. L'analogue pour la différentielle de Poisson est fourni par le crochet de Schouten : c'est l'application $[\cdot, \cdot]_S$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^p(A) \times \mathcal{X}^q(A) &\rightarrow \mathcal{X}^{p+q-1}(A) \\ (P, Q) &\mapsto [P, Q]_S, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} [P, Q]_S(F_1, \dots, F_{p+q-1}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q,p-1}} \varepsilon(\sigma) P(Q(F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(q)}, F_{\sigma(q+1)}, \dots, F_{\sigma(p+q-1)})) \\ &- (-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q-1}} \varepsilon(\sigma) P(Q(F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(p)}, F_{\sigma(p+1)}, \dots, F_{\sigma(p+q-1)})), \end{aligned}$$

et où $\mathfrak{S}_{p,q-1}$ représente l'ensemble des permutations $(p, q-1)$ -shuffles de l'ensemble $\llbracket 1, p+q-1 \rrbracket$ (on pose $S_{p,-1} = S_{-1,q} = \emptyset$).

On a alors $\boxed{\delta^{(p)}(Q) = -[Q, \{\cdot, \cdot\}]_S}$ pour tout $Q \in \mathcal{X}^p(A)$.

1.4 Polynômes multivariés

Nous rappelons dans ce paragraphe des résultats sur les polynômes multivariés qui seront des outils utilisés principalement dans les Chapitres 2 et 3. Commençons par donner une définition dans laquelle la notion de polynôme homogène est généralisée.

Définition 1.4.1

- Un polynôme $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ est quasi-homogène s'il existe $(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{j=1}^n m_j z_j \partial_j f = m f,$$

où $\partial_j f$ représente, comme dans toute la suite, la dérivée partielle de f par rapport à z_j . Cette formule est une généralisation de la formule d'Euler qui caractérise les polynômes homogènes.

- Un polynôme $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est à singularité isolée en l'origine si l'espace $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] / \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle$ est de dimension finie. Cette dimension est alors appelée nombre de Milnor de la singularité définie par f (voir aussi [AVGZ86]).

1.4.1 Bases de Gröbner

Les résultats qui suivent sont importants pour le Chapitre 2 consacré aux surfaces de Klein. Pour plus de détails sur les bases de Gröbner, on pourra consulter le livre [RSP02] de Rannou et Saux-picart ou encore l'excellent cours de Calcul Formel de M. Crétin.

La division multivariée généralise, au cas de $\mathbb{C}[\mathbf{z}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, la division euclidienne classique de $\mathbb{C}[z]$. Pour $g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, on désigne par $lt(g)$ son terme dominant (pour l'ordre lexicographique \preceq). Etant donné un dividende f et une liste de diviseurs $[g_1, \dots, g_k]$, il existe une liste de quotients $[q_1, \dots, q_k]$ et un reste r , en général *non uniques*, tels que

- (1) $f = g_1 q_1 + \dots + g_k q_k + r$,
- (2) r est réduit relativement à $[g_1, \dots, g_k]$, i. e. r est nul ou aucun des termes de r n'est divisible par l'un des $lt(g_1), \dots, lt(g_k)$,
- (3) $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, lt(g_j q_j) \preceq lt(f)$.

Se pose alors le problème suivant : considérons un idéal $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Si le reste obtenu dans la division multivariée de f par $[g_1, \dots, g_k]$ est nul, f appartient alors clairement à l'idéal. En revanche, la réciproque est fautive : la non nullité du reste n'entraîne pas la non appartenance de f à l'idéal. Les bases de Gröbner, qui ont été introduites en 1965 par Buchberger (qui travaillait sous la direction de Gröbner) apportent une solution au problème, en fournissant un *bon* système générateur de l'idéal, i. e. un système générateur qui soit compatible avec la division multivariée, au sens où le reste devient unique et sa nullité équivaut à l'appartenance de f à l'idéal.

Rappelons tout d'abord la définition d'une base de Gröbner. Etant donné un idéal non trivial J de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$, une *base de Gröbner* de J est un sous-ensemble fini G de $J \setminus \{0\}$ tel que pour tout $f \in J \setminus \{0\}$, il existe $g \in G$ tel que $lt(g)$ divise $lt(f)$.

Grâce à la propriété de Dickson vérifiée par la relation de divisibilité, on peut montrer que tout idéal de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ admet une base de Gröbner. De plus, l'algorithme de Buchberger permet d'obtenir une base de Gröbner de J à partir de n'importe quel système générateur de J . Cet algorithme, fondamental, généralise à la fois l'algorithme d'Euclide pour les polynômes univariés, la méthode d'élimination de Gauss pour les systèmes linéaires et le résultant de Sylvester qui permet d'éliminer une variable de deux polynômes.

La proposition ci-dessous résout le problème évoqué plus haut.

Proposition 1.4.2

Soit G une base de Gröbner d'un idéal J de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Alors tout élément de J qui est réduit relativement à G , est nul.

Pour tout $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, il existe un unique polynôme $r_G(f) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, réduit relativement à G (noté aussi G -réduit), tel que $f \equiv r_G(f) \pmod{J}$.

Démonstration :

Soit $r \in J$, réduit relativement à G . Si $r \neq 0$, alors par définition de G , il existe $g_j \in G$ tel que $lt(g_j)$ divise $lt(r)$. Cela est absurde puisque r est G -réduit, donc $r = 0$.

La division multivariée de f par G s'écrit $f = g_1q_1 + \dots + g_kq_k + r$ où r est G -réduit, d'où $f \equiv r \pmod{J}$. Si r' est G -réduit avec $f \equiv r' \pmod{J}$, alors $r - r' = (r - f) - (r' - f) \in J$ et $r - r'$ est G -réduit, donc nul. ■

L'unique polynôme $r_G(f)$ défini ci-dessus est appelé la forme normale de f . On a ainsi

$$\forall f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}], f \in J \Leftrightarrow r_G(f) = 0.$$

Proposition 1.4.3

Un sous-ensemble fini $G := \{g_1, \dots, g_k\}$ d'un idéal J de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est une base de Gröbner de J si et seulement si pour tout $f \in J$, on a $f = \sum_{j=1}^k g_jq_j$ avec $q_j \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $lt(g_jq_j) \preceq lt(f)$.

Démonstration :

Supposons que G est une base de Gröbner de J , et soit $f \in J$. Par division multivariée, on a $f = g_1q_1 + \dots + g_kq_k + r$ avec $q_j \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $lt(g_jq_j) \preceq lt(f)$. Or $r = r_G(f)$ est réduit relativement à G , donc nul d'après la Proposition 1.4.2. Réciproquement, supposons que pour tout f , on a $f = g_1q_1 + \dots + g_kq_k$ avec $q_j \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $lt(g_jq_j) \preceq lt(f)$. Alors le terme dominant $lt(f)$ est l'un des $lt(g_j)lt(q_j)$, il est donc divisible par l'élément $lt(g_j)$ correspondant. Cela montre que G est une base de Gröbner de J . ■

Notons que de cette propriété découle de manière évidente le Théorème de la base finie de Hilbert, à savoir que tout idéal de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est de type fini.

Le Théorème de Macaulay énoncé ci-dessous nous sera utile pour calculer la cohomologie de Hochschild des surfaces de Klein. Il concerne les termes J -standards, dont nous rappelons la définition.

Définition 1.4.4

Soit J un idéal non trivial de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$. On appelle ensemble des termes J -standards, l'ensemble des

monômes de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ privé de l'ensemble des termes dominants des éléments non nuls de J .

Théorème 1.4.5 (Macaulay)

L'ensemble des termes J -standards forme une base du \mathbb{C} -espace vectoriel quotient $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / J$.

Démonstration :

- Soit $G := [g_1, \dots, g_r]$ une base de Gröbner de J . Montrons tout d'abord que les termes J -standards sont les monômes réduits relativement à G : en effet, si M est un monôme avec $M = lt(f)$, alors par définition de G , il existe $g \in G$ tel que $lt(g)$ divise M , donc M n'est pas G -réduit. Inversement, si M n'est pas G -réduit, il existe un monôme N et il existe $g \in G$ tels que $M = Nlt(g)$. Alors $Ng \in J$ et $M = lt(Ng)$, donc M n'est pas J -standard.
- Pour tout $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, il existe un unique $r_G(f) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, réduit relativement à G , tel que $f \equiv r_G(f) \pmod{J}$. Donc tous les termes de $r_G(f)$ sont G -réduits, et d'après ce qui précède, ce sont des termes J -standards. Ainsi, les termes J -standards engendrent $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / J$. Soient maintenant $\{M_1, \dots, M_k\}$ un ensemble fini de termes J -standards et $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ tels que $\sum_{j=1}^k \lambda_j M_j \equiv 0 \pmod{J}$. Alors d'après le premier point, $R := \sum_{j=1}^k \lambda_j M_j$ est G -réduit. Comme R est dans J , il est nul d'après la Proposition 1.4.2. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $\lambda_j = 0$, donc l'ensemble des termes J -standards est libre dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / J$. ■

1.4.2 Invariants sous l'action d'un groupe fini

La théorie des invariants a joué un rôle central en algèbre et en géométrie au XIX^{ème} siècle, puis elle a été oubliée pour retrouver une place importante dans le paysage mathématique des années 60-70 grâce au calcul formel (dans l'article [KR84] de Kung et Rota, elle est même comparée au phénix qui renaît de ses cendres!). Dans ce paragraphe de rappels sur la théorie des invariants, nous utilisons essentiellement le livre de Sturmfels [Stu93] (on pourra aussi consulter [Rob02] et [Fer05]).

Considérons un sous-groupe G d'un groupe linéaire $\mathbf{GL}_n \mathbb{C}$ qui agit (à gauche) sur l'espace vectoriel \mathbb{C}^n . On en déduit une action (à droite) sur l'espace des fonctions polynomiales sur \mathbb{C}^n , i. e. sur l'algèbre $\mathbb{C}[\mathbf{z}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Cette action est définie pour $P \in S$ et $g \in G$ par

$$g \cdot P(\mathbf{z}) := P \left(\sum_{j=1}^n g_{1j} z_j, \dots, \sum_{j=1}^n g_{nj} z_j \right).$$

Ainsi, on a $h \cdot (g \cdot P) = (gh) \cdot P$, et dans le cas particulier où σ est un élément de \mathfrak{S}_n , on a $\sigma \cdot P(\mathbf{z}) = P(z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)})$.

On note $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ l'algèbre des polynômes invariants sous l'action du groupe G .

Le prototype des algèbres d'invariants est bien sûr l'algèbre des invariants sous l'action du groupe symétrique, notée $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^{\mathfrak{S}_n}$. En effet, $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ est une algèbre de polynômes et tout polynôme symétrique s'écrit de façon unique comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires σ_j . La théorie des invariants vise à généraliser ce type de résultat à d'autres groupes. Un exemple élémentaire d'invariants est le suivant : considérons le sous-groupe $G := \{I_2, -I_2\}$

de $\mathbf{GL}_2\mathbb{C}$. Alors on a

$$\mathbb{C}[z_1, z_2]^G = \mathbb{C}\langle z_1^2, z_1 z_2, z_2^2 \rangle \simeq \mathbb{C}[X, Y, Z] / \langle XZ - Y^2 \rangle.$$

Un autre intérêt de la théorie des invariants réside dans la considération suivante : de nombreux problèmes sont invariants sous certaines transformations géométriques, et, en particulier, les propriétés géométriques sont invariantes sous l'action du groupe de transformations sous-jacent. C'est le cas des propriétés de géométrie euclidienne, affine, projective... qui sont respectivement invariantes sous l'action du groupe orthogonal, affine, projectif... L'identification systématique entre géométrie et théorie des invariants provient du programme d'Erlangen de Klein (voir [Kle72]) qui regarde toute géométrie comme l'action d'un groupe.

L'espace \mathbb{C}^n se décompose en G -orbites Gv pour $v \in \mathbb{C}^n$, et $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est l'ensemble des fonctions f qui sont constantes sur chaque G -orbite. En effet

$$(\forall v \in \mathbb{C}^n, \forall g \in G, f(gv) = f(v)) \Leftrightarrow (\forall g \in G, \forall v \in \mathbb{C}^n, (f \circ g)(v) = f(v)) \Leftrightarrow (\forall g \in G, f \circ g = f).$$

Ainsi, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ peut être vu comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété quotient \mathbb{C}^n / G des G -orbites. Si G est fini, $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est l'algèbre de coordonnées de la variété \mathbb{C}^n / G . En revanche, si G n'est pas fini, \mathbb{C}^n / G n'est pas toujours une variété algébrique dont $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est l'algèbre de coordonnées : il peut y avoir deux G -orbites telles que l'une est incluse dans la clôture de l'autre. Dans la suite, nous ne considérons que des sous-groupes finis de $\mathbf{GL}_n\mathbb{C}$.

Proposition 1.4.6

Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n\mathbb{C}$. Alors G a n invariants algébriquement indépendants, i. e. le degré de transcendance de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ sur \mathbb{C} est n .

Démonstration :

Soit le polynôme

$$P_i(t) := \prod_{g \in G} (z_i \circ g - t) \in (\mathbb{C}[\mathbf{z}])[t].$$

Alors $P_i(t)$ est invariant sous l'action de G sur $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$, donc ses coefficients sont dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$, de sorte que $P_i(t)$ est dans $(\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G)[t]$. De plus, comme $Id \in G$, z_i est racine de $P_i(t)$. On en déduit que $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ et $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ ont le même degré de transcendance sur \mathbb{C} . ■

Un outil fondamental pour l'étude des invariants sous l'action d'un groupe fini est l'opérateur de Reynolds. C'est l'application linéaire R_n de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ vers $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ définie par

$$R_n(P) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P.$$

Cette application est une surjection de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ sur $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ qui vérifie les propriétés élémentaires de la proposition suivante :

Proposition 1.4.7

- $R_n(P) = P$ si et seulement si P est G -invariant.
- $R_n \circ R_n = R_n$.
- Si $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ et $Q \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, alors $R_n(PQ) = P R_n(Q)$, i. e. R_n est un morphisme de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ -modules.

Le théorème suivant montre que l'algèbre des invariants sous l'action d'un groupe fini est de type fini. Sa démonstration est "constructive".

Théorème 1.4.8 (Noether, 1916)

L'algèbre $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ admet un système générateur formé d'au plus $C_{n+|G|}^n$ invariants dont le degré est inférieur ou égal à $|G|$.

Démonstration :

Pour $\mathbf{e} \in \mathbb{N}^n$, on pose $J_{\mathbf{e}}(\mathbf{z}) = R_n(\mathbf{z}^{\mathbf{e}})$, et on note $e := |\mathbf{e}| = e_1 + \dots + e_n$. On introduit n nouvelles indéterminées u_1, \dots, u_n et on considère le polynôme

$$S_e(\mathbf{z}, \mathbf{u}) := R_n((\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})^e) = R_n((u_1 z_1 + \dots + u_n z_n)^e),$$

où l'opérateur de Reynolds est étendu en une application $\mathbb{C}[\mathbf{u}]$ -linéaire de $\mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{u}]$ dans lui-même. Le polynôme $S_e(\mathbf{z}, \mathbf{u})$ peut être vu comme un polynôme en \mathbf{u} dont les coefficients sont dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Le coefficient de $\mathbf{u}^{\mathbf{e}}$ est alors un multiple non nul de $J_{\mathbf{e}}(\mathbf{z})$.

Par ailleurs, $|G| S_e = \sum_{g \in G} (u_1(z_1 \circ g) + \dots + u_n(z_n \circ g))^e$ est une somme de la forme $\alpha_1^e + \dots + \alpha_m^e$, où $m := |G|$. Or tout polynôme symétrique de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ peut s'écrire comme polynôme en les éléments $N_j := X_1^j + \dots + X_m^j$ pour $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. En particulier, S_e s'écrit comme un polynôme en les éléments S_1, \dots, S_m . Les coefficients de $S_e \in (\mathbb{C}[\mathbf{z}])[\mathbf{u}]$ sont alors des polynômes en les coefficients des polynômes $S_1, \dots, S_m \in (\mathbb{C}[\mathbf{z}])[\mathbf{u}]$. Ainsi, tous les invariants $J_{\mathbf{f}}$ sont des polynômes en les $J_{\mathbf{e}}$ pour $|\mathbf{e}| \leq m$, ce qui montre que $\{J_{\mathbf{e}} \mid |\mathbf{e}| \leq m\}$ est un système générateur de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$. Son cardinal est $|\{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^n \mid |\mathbf{e}| \leq m\}| = C_{n+m}^n$. ■

Si $A = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A_d$ est une \mathbb{C} -algèbre associative commutative graduée⁹, on appelle série de Poincaré (ou encore série de Hilbert) de A la série

$$P_A(t) := \sum_{d=0}^{\infty} \dim(A_d) t^d.$$

En particulier, si A est une algèbre de polynômes invariants sous l'action d'un groupe, la série de Poincaré de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est

$$P_G(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim(\mathbb{C}[\mathbf{z}]_d^G) t^d,$$

où $\mathbb{C}[\mathbf{z}]_d^G$ est l'espace des polynômes invariants de degré d .

Le Théorème de Molien donne un moyen de calculer la série de Poincaré d'une algèbre d'invariants à partir des polynômes caractéristiques des éléments du groupe.

9. $A_0 = \mathbb{C}$ et $A_m A_n \subset A_{m+n}$.

Théorème 1.4.9 (*Molien, 1897*)

La série de Poincaré de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est $P_G(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I_n - tg)}$.

Démonstration :

• Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur lequel G agit. L'endomorphisme $p := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ est alors un projecteur, i. e. $p(p - 1) = 0$, d'où $V = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$, avec $\text{Im } p = V^G$. Donc

$$\dim(V^G) = \dim(\text{Im } p) = \text{rg}(p) = \text{tr}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g).$$

• Pour $g \in G$ et $d \in \mathbb{N}$, soit $g^{(d)}$ l'automorphisme de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]_d$ induit par g . Appliquons la relation précédente à $V = \mathbb{C}[\mathbf{z}]_d$:

$$\dim(\mathbb{C}[\mathbf{z}]_d^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g^{(d)}).$$

Il reste à calculer $\text{tr}(g^{(d)})$. Notons $\lambda_{g,1}, \dots, \lambda_{g,n}$ les valeurs propres de $g^{(1)}$, et $L_{g,1}, \dots, L_{g,n} \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]_1$ les vecteurs propres associés. Alors les vecteurs propres de $g^{(d)}$ sont les polynômes $L_{g,1}^{d_1} \dots L_{g,n}^{d_n}$ avec $d_1 + \dots + d_n = d$, et les valeurs propres de $g^{(d)}$ sont les éléments $\lambda_{g,1}^{d_1} \dots \lambda_{g,n}^{d_n}$. Ainsi, on a

$$\text{tr}(g^{(d)}) = \sum_{d_1 + \dots + d_n = d} \lambda_{g,1}^{d_1} \dots \lambda_{g,n}^{d_n}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_G(t) &= \sum_{d=0}^{\infty} \dim(\mathbb{C}[\mathbf{z}]_d^G) t^d = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in G} \text{tr}(g^{(d)}) \right) t^d \\ &= \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in G} \sum_{|m|=d} \lambda_{g,1}^{m_1} \dots \lambda_{g,n}^{m_n} \right) t^d \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{d=0}^{\infty} \sum_{|m|=d} (t\lambda_{g,1})^{m_1} \dots (t\lambda_{g,n})^{m_n} \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{d_1=0}^{\infty} (t\lambda_{g,1})^{d_1} \dots \sum_{d_n=0}^{\infty} (t\lambda_{g,n})^{d_n} \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{(1 - t\lambda_{g,1}) \dots (1 - t\lambda_{g,n})} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I_n - tg)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Le lemme suivant donne une expression de la série de Poincaré dans le cas simple d'une algèbre de polynômes.

Lemme 1.4.10

Si f_1, \dots, f_m sont des éléments de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ qui sont algébriquement indépendants et homogènes de degrés d_1, \dots, d_m , alors la série de Poincaré de $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_m]$ est $P_G(t) = \frac{1}{(1 - t^{d_1}) \dots (1 - t^{d_m})}$.

Démonstration :

Posons $R := \mathbb{C}[f_1, \dots, f_m]$, et notons R_d l'espace des éléments de R homogènes de degré d . On a alors

$$\begin{aligned} P_G(t) &= \frac{1}{(1-t^{d_1}) \dots (1-t^{d_m})} = \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} t^{j_1 d_1} \right) \dots \left(\sum_{j_m=0}^{\infty} t^{j_m d_m} \right) \\ &= \sum_{d=0}^{\infty} |\{(j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{N}^m / j_1 d_1 + \dots + j_m d_m = d\}| t^d = \sum_{d=0}^{\infty} \dim(R_d) t^d. \blacksquare \end{aligned}$$

Soit $A = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A_d$ une \mathbb{C} -algèbre graduée de dimension de Krull n (i. e. le nombre maximal d'éléments de A algébriquement indépendants sur \mathbb{C} est n).

Soit $H(A_+)$ l'ensemble des éléments de A homogènes de degré strictement positif. Une suite $[\theta_1, \dots, \theta_n]$ d'éléments de $H(A_+)$ est un *système homogène de paramètres* (abrégé en s. h. p.) si A est un module de type fini sur l'anneau $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$. En particulier, les $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont algébriquement indépendants.

D'après le lemme de normalisation de Noether¹⁰, un système homogène de paramètres existe toujours.

Introduisons maintenant un outil technique qui nous servira implicitement dans les calculs de cohomologie des surfaces de Klein : une suite $[\theta_1, \dots, \theta_n]$ de n éléments de A est une *suite régulière* si, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, θ_j n'est pas un diviseur de zéro de $A / \langle \theta_1, \dots, \theta_{j-1} \rangle$.

Si les $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont algébriquement indépendants (et c'est le cas en particulier si $[\theta_1, \dots, \theta_n]$ est un s. h. p.), alors $[\theta_1, \dots, \theta_n]$ est une suite régulière si et seulement si A est un module libre sur l'algèbre $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$. On renvoie à [Stu93] pour la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.4.11

Soient A une \mathbb{C} -algèbre graduée, et $[\theta_1, \dots, \theta_n]$ un système homogène de paramètres. Il y a équivalence entre

- A est un module libre de type fini sur $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$, i. e.

$$A = \bigoplus_{i=1}^m \eta_i \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n], \quad (1.13)$$

- Pour tout système homogène de paramètres $[\phi_1, \dots, \phi_n]$, A est un module libre de type fini sur $\mathbb{C}[\phi_1, \dots, \phi_n]$.

Ce théorème signifie encore que dans une \mathbb{C} -algèbre graduée, s'il existe un s. h. p. qui est une suite régulière, alors tout s. h. p. est une suite régulière. Nous retrouverons cette situation dans l'étude des surfaces de Klein : soit $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ un polynôme quasi-homogène à singularité isolée en l'origine. Alors $[\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f]$ est un s. h. p. De plus, $[z_1, z_2, z_3]$ est un s. h. p. qui est évidemment une suite régulière, donc $[\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f]$ est une suite régulière.

10. Si A est une \mathbb{C} -algèbre de type fini, alors il existe des éléments $x_1, \dots, x_n \in A$, algébriquement indépendants sur \mathbb{C} , tels que A soit entier sur $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Dans le cas où les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on dit que l'algèbre A est une *algèbre de Cohen-Macaulay*, et la décomposition (1.13) est alors appelée *décomposition d'Hironaka* (cette décomposition n'est pas unique). Les éléments η_1, \dots, η_m vérifient (1.13) si et seulement s'ils forment une base de l'algèbre quotient $R/\langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle$.

Il s'ensuit le corollaire :

Corollaire 1.4.12

La série de Poincaré de R est

$$P_R(t) = \frac{\sum_{i=1}^m t^{\deg(\eta_i)}}{\prod_{j=1}^n (1 - t^{\deg(\theta_j)})}.$$

Théorème 1.4.13 (*Hochster-Eagen*)

Si G est un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n \mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est une algèbre de Cohen-Macaulay.

Démonstration :

Considérons $P_i(x) := \prod_{g \in G} (z_i \circ g - x) \in (\mathbb{C}[\mathbf{z}])[x]$. Alors $P_i(x)$ est invariant sous l'action de G sur \mathbf{z} , donc ses coefficients sont dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$, de sorte que $P_i(x)$ appartient à $(\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G)[x]$. De plus, comme $Id \in G$, z_i est racine de $P_i(x)$. Cela montre que $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est un module de type fini sur $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$. Soit $U = \text{Ker } R_n$, c'est aussi un module de type fini sur $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$. On a donc une somme directe de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ -modules : $\mathbb{C}[\mathbf{z}] = \mathbb{C}[\mathbf{z}]^G \oplus U$. D'après le lemme de normalisation de Noether, il existe un s. h. p. $[\theta_1, \dots, \theta_n]$ de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$. Comme $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est de type fini sur $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$, lui-même de type fini sur $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$, $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est de type fini sur $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$, i. e. $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$ est un s. h. p. de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Or $[z_1, \dots, z_n]$ est un s. h. p. de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ tel que $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est libre sur $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, donc d'après le Théorème 1.4.11, $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est un module libre de type fini sur $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$.

De la décomposition $\mathbb{C}[\mathbf{z}] = \mathbb{C}[\mathbf{z}]^G \oplus U$, on déduit la décomposition en somme directe d'espaces vectoriels de dimension finie :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle &\rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{z}]^G / \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle \oplus U / (\theta_1 U + \dots + \theta_n U) \\ f + \sum_{j=1}^n h_j \theta_j &\mapsto R_n(f) + \sum_{j=1}^n R_n(h_j) \theta_j + (f - R_n(f)) + \sum_{j=1}^n (h_j - R_n(h_j)) \theta_j. \end{aligned}$$

On prend une base $(\overline{\eta}_1, \dots, \overline{\eta}_s)$ de $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle$ formée d'éléments homogènes et adaptée à la précédente décomposition, i. e. $(\overline{\eta}_1, \dots, \overline{\eta}_x)$ est une base de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G / \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle$ et $(\overline{\eta}_{x+1}, \dots, \overline{\eta}_s)$ est une base de $U / (\theta_1 U + \dots + \theta_n U)$. En relevant les $\overline{\eta}_1, \dots, \overline{\eta}_x$ en des éléments η_1, \dots, η_x de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$, et les $\overline{\eta}_{x+1}, \dots, \overline{\eta}_s$ en des éléments $\eta_{x+1}, \dots, \eta_s$ de U , on a, d'après le Théorème 1.4.11, $\mathbb{C}[\mathbf{z}] = \bigoplus_{i=1}^s \eta_i \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$. D'où $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G = \bigoplus_{i=1}^x \eta_i \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$. Ainsi, $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est une algèbre de Cohen-Macaulay. ■

Ainsi, tout polynôme invariant s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{i=1}^t \eta_i p_i(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

où les p_i sont des polynômes, de sorte que $\{\theta_1, \dots, \theta_n, \eta_1, \dots, \eta_m\}$ est un système fondamental d'invariants. Les θ_i (resp. η_j) sont appelés invariants primaires (resp. secondaires) et on note d_i (resp. e_j) leur degré.

Proposition 1.4.14

- Le nombre d'invariants secondaires est $m = \frac{d_1 \dots d_n}{|G|}$.
- On a $P_G(t) \prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i}) = \sum_{i=1}^m t^{e_i}$.

Démonstration :

On écrit l'égalité entre les formules du Corollaire 1.4.12 et du Théorème 1.4.9 :

$$\sum_{i=1}^m t^{e_i} / \prod_{j=1}^n (1 - t^{d_j}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I_n - tg)}.$$

Le second point de la proposition est démontré. En multipliant par $(1 - t)^n$, on a la relation

$$\sum_{i=1}^m t^{e_i} / \prod_{j=1}^n (1 + t + t^2 + \dots + t^{d_j-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{(1 - t)^n}{\det(I_n - tg)}.$$

Quand t tend vers 1, alors $m / \prod_{j=1}^n d_j = \frac{1}{|G|}$ et la proposition est démontrée. ■

Un élément $g \in \mathbf{GL}_n \mathbb{C}$ différent de l'identité est appelé pseudo-réflexion si l'ensemble de ses points fixes est un hyperplan. Un tel élément est alors diagonalisable et toutes ses valeurs propres valent 1 sauf une qui est une racine de l'unité.

Le théorème suivant montre que les algèbres d'invariants les plus "simples" sont obtenues quand le groupe fini G est engendré par des pseudo-réflexions.

Théorème 1.4.15 (*Shephard-Todd-Chevalley, 1954*)

Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n \mathbb{C}$. Alors $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^G$ est engendré par n invariants homogènes algébriquement indépendants si et seulement si G est engendré par des pseudo-réflexions.

Corollaire 1.4.16

Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n \mathbb{C}$, engendré par n invariants homogènes algébriquement indépendants $\theta_1, \dots, \theta_n$. Soient $d_i := \deg(\theta_i)$ et r le nombre de réflexions contenues dans G . Alors on a $|G| = d_1 \dots d_n$ et $r = d_1 + \dots + d_n - n$.

CHAPITRE 2

Homologie et cohomologie de Hochschild des surfaces de Klein

Dans le cadre de la quantification par déformation, une première étape dans l'étude des star-produits est le calcul de la cohomologie de Hochschild. Le but de ce chapitre est précisément de déterminer l'homologie et la cohomologie de Hochschild dans deux cas de variétés algébriques : le cas des courbes singulières du plan, où, par une méthode différente, nous retrouvons puis précisons un résultat prouvé par Fronsdal ; et le cas des surfaces de Klein. L'utilisation d'un complexe suggéré par Kontsevich et l'aide des bases de Gröbner permettent de résoudre le problème. La citation suivante est un clin d'oeil aux célèbres “ancêtres” des surfaces de Klein !

La première chose à expliquer ensuite, c'est la forme que chacun des corps a reçue et la combinaison de nombres dont elle est issue. Je commencerai par la première espèce, qui est composée des éléments les plus petits. Elle a pour élément le triangle dont l'hypoténuse est deux fois plus longue que le plus petit côté. Si l'on accouple une paire de ces triangles par la diagonale et qu'on fasse trois fois cette opération, de manière que les diagonales et les petits côtés coïncident en un même point comme centre, ces triangles, qui sont au nombre de six, donnent naissance à un seul triangle, qui est équilatéral. Quatre de ces triangles équilatéraux réunis selon trois angles plans forment un seul angle solide, qui vient immédiatement après le plus obtus des angles plans. Si l'on compose quatre angles solides, on a la première

forme de solide, qui a la propriété de diviser la sphère dans laquelle il est inscrit en parties égales et semblables. La seconde espèce est composée des mêmes triangles. Quand ils ont été combinés pour former huit triangles équilatéraux, ils composent un angle solide unique, fait de quatre angles plans. Quand on a construit six de ces angles solides, le deuxième corps se trouve achevé. Le troisième est formé de la combinaison de deux fois soixante triangles élémentaires, c'est-à-dire de douze angles solides, dont chacun est enclos par cinq triangles plans équilatéraux, et il y a vingt faces qui sont des triangles équilatéraux. Après avoir engendré ces solides, l'un des triangles élémentaires a été déchargé de sa fonction, et c'est le triangle isocèle qui a engendré la nature du quatrième corps. Groupés par quatre, avec leurs angles droits se rencontrant au centre, ces isocèles ont formé un quadrangle unique équilatéral. Six de ces quadrangles, en s'accolant, ont donné naissance à huit angles solides, composés chacun de trois angles plans droits, et la figure obtenue par cet assemblage est le cube, qui a pour faces six tétragones de côtés égaux. Il restait encore une cinquième combinaison. Dieu s'en est servi pour achever le dessin de l'univers. [...] Donnons à la terre la forme cubique. [...] Le solide qui a pris la forme de la pyramide est l'élément et le germe du feu, celui que nous avons construit en second lieu est l'élément de l'air, et le troisième, celui de l'eau.

Platon, *Timée*.

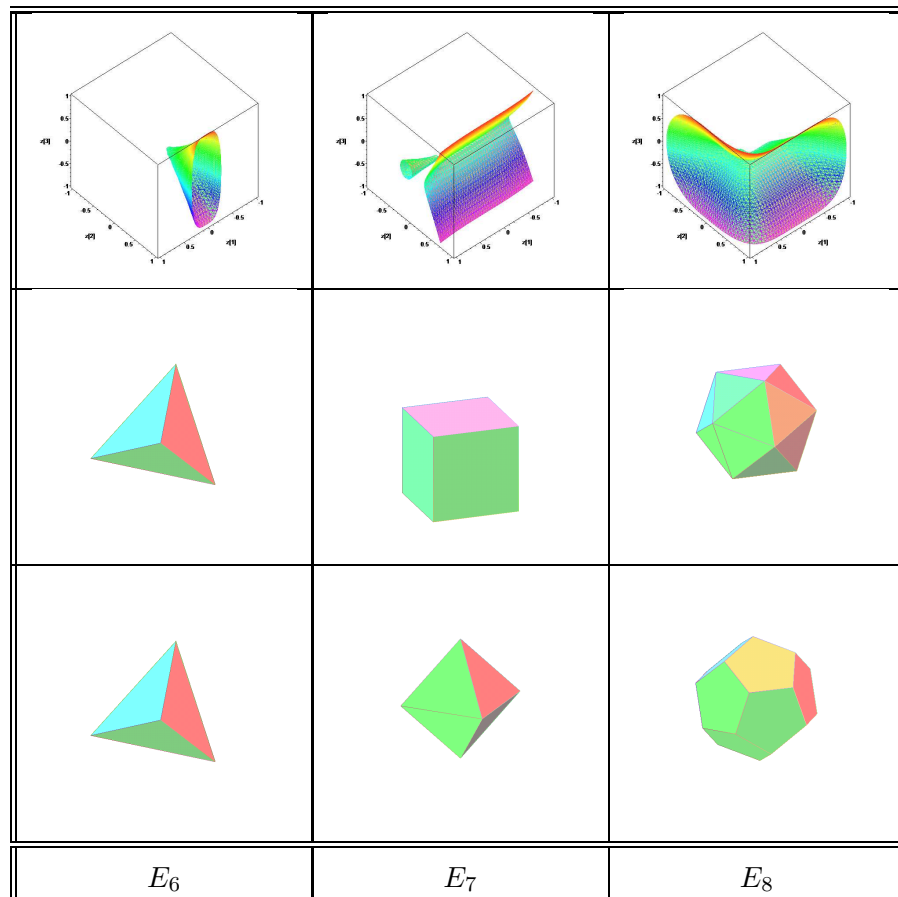


FIGURE 2.1 – Surfaces de Klein et solides de Platon.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'homologie et à la cohomologie de Hochschild d'une variété algébrique singulière M , définie par

$$M = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid f(\mathbf{z}) = 0\},$$

avec $n = 2$ ou 3 , où f appartient à $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Nous considérons l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ des fonctions polynomiales sur M , i. e. l'algèbre quotient $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$. La variété M étant singulière, le Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg ne s'applique pas, comme on l'a vu dans le Chapitre 1. Nous allons calculer la cohomologie de Hochschild de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$, ce qui constitue une première étape dans la classification des déformations formelles de $\mathcal{F}(M)$.

2.1.1 Cohomologies et quotients d'algèbres de polynômes

Nous considérons maintenant l'algèbre $R := \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] = \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ des polynômes en n indéterminées à coefficients complexes. Nous fixons aussi m éléments f_1, \dots, f_m de R , et nous définissons l'algèbre quotient $A := R / \langle f_1, \dots, f_m \rangle = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$.

Plusieurs articles récents concernant la (co)homologie de Hochschild ou la (co)homologie de Poisson ont été consacrés à l'étude de cas particuliers :

C. Roger et P. Vanhaecke ont calculé dans [RV02] la cohomologie de Poisson du plan affine \mathbb{C}^2 , muni du crochet de Poisson $f_1 \partial_{z_1} \wedge \partial_{z_2}$, où f_1 est un polynôme homogène. Ils l'expriment en termes du nombre de composantes irréductibles du lieu singulier $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \mid f_1(\mathbf{z}) = 0\}$ (dans ce cas, on a une structure symplectique en dehors du lieu singulier), l'algèbre des fonctions régulières sur cette courbe étant l'algèbre quotient $\mathbb{C}[z_1, z_2] / \langle f \rangle$.

Le calcul de la cohomologie de Poisson du plan affine a également été effectué au niveau des jets par Ph. Monnier dans [Mon02].

M. Van den Bergh, B. Fresse et A. Pichereau se sont intéressés dans [VdB94], [Fre02], [Pic05] et [Pic06] au cas où $n = 3$ et $m = 1$, et où f_1 est un polynôme quasi-homogène à singularité isolée en l'origine (voir la Définition 1.4.1). Ils calculent l'homologie et la cohomologie de Poisson, qui peuvent être exprimées en particulier en termes du nombre de Milnor de la singularité.

Toujours dans le cas où $n = 3$ et $m = 1$, J. Alev et T. Lambre ont comparé dans l'article [AL98] l'homologie de Poisson en degré 0 des surfaces de Klein avec l'homologie de Hochschild en degré 0 de $A_1(\mathbb{C})^G$, où $A_1(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Weyl et G le groupe associé à la surface de Klein. Nous donnons plus de détails sur ces surfaces dans le Paragraphe 2.4.1.

Dans [AFLS00], Jacques Alev, Marco A. Farinati, Thierry Lambre et Andrea L. Solotar établissent un résultat fondamental : ils calculent tous les espaces d'homologie et de cohomologie de Hochschild de $A_n(\mathbb{C})^G$, où $A_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Weyl, pour tout sous-groupe fini G de $\mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C}$. C'est une question classique et intéressante de comparer l'homologie et la cohomologie de Hochschild de $A_n(\mathbb{C})^G$ avec l'homologie et la cohomologie de Poisson de l'anneau des invariants $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^G$, qui est une algèbre quotient de la forme $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$.

C. Fronsdal étudie dans [FK07] l'homologie et la cohomologie de Hochschild dans deux cas particuliers : le cas où $n = 1$ et $m = 1$, et le cas où $n = 2$ et $m = 1$. L'appendice de cet article donne en outre un autre moyen de calculer la cohomologie de Hochschild dans le cas plus général des intersections complètes (voir aussi [Kon01]).

Dans ce chapitre, nous nous proposons de calculer l'homologie et la cohomologie de Hochschild dans deux cas particulièrement importants.

- Le cas des courbes singulières du plan, avec des polynômes f_1 qui sont des polynômes quasi-homogènes à singularité de modalité¹ nulle : ces polynômes correspondent aux formes normales des fonctions quasi-homogènes de deux variables et de modalité nulle, données dans la classification des fonctions quasi-homogènes de [AVGZ86] (ce cas a déjà retenu l'attention de C. Fronsdal).
- Le cas des surfaces de Klein \mathcal{X}_Γ qui sont les quotients \mathbb{C}^2 / Γ , où Γ est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ (ce cas correspond à $n = 3$ et $m = 1$). Ces dernières ont fait l'objet de nombreux travaux ; leurs liens avec les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, avec les polyèdres de Platon, et avec la correspondance de McKay expliquent leur intérêt. De plus, les algèbres préprojectives, auxquelles l'article [CBH98] est consacré, constituent une famille de déformations des surfaces de Klein, paramétrée par le groupe qui leur est associé : ce fait justifie une fois encore le calcul de leur cohomologie.

Le résultat principal de ce chapitre est donné par les deux propositions suivantes :

Proposition 2.1.1

Soit une courbe singulière du plan, définie par un polynôme $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, de type A_k , D_k ou E_k . Pour $j \in \mathbb{N}$, soit HH^j (resp. HH_j) l'espace de cohomologie (resp. homologie) de Hochschild en degré j de $A := \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$, et soit ∇f le gradient de f . Alors $HH^0 \simeq HH_0 \simeq A$, $HH^1 \simeq A \oplus \mathbb{C}^k$ et $HH_1 \simeq A^2 / (A\nabla f)$, et pour tout $j \geq 2$, $HH^j \simeq HH_j \simeq \mathbb{C}^k$.

Proposition 2.1.2

Soient Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ tels que $\mathbb{C}[x, y]^\Gamma \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$. Pour $j \in \mathbb{N}$, soit HH^j (resp. HH_j) l'espace de cohomologie (resp. homologie) de Hochschild en degré j de $A := \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$, et soit ∇f le gradient de f . Alors $HH^0 \simeq HH_0 \simeq A$, $HH^1 \simeq (\nabla f \wedge A^3) \oplus \mathbb{C}^\mu$ et $HH_1 \simeq \nabla f \wedge A^3$, $HH^2 \simeq A \oplus \mathbb{C}^\mu$ et $HH_2 \simeq A^3 / (\nabla f \wedge A^3)$, et pour tout $j \geq 3$, $HH^j \simeq HH_j \simeq \mathbb{C}^\mu$, où μ est le nombre de Milnor de \mathcal{X}_Γ .

Pour les calculs explicites, nous utilisons et développons une méthode suggérée par M. Kontsevich dans l'appendice de [FK07].

Dans un premier temps, nous étudions le cas des courbes algébriques singulières du plan dans le Paragraphe 2.3 : nous utilisons la méthode de Kontsevich pour retrouver le résultat que C. Fronsdal a prouvé par des calculs directs. Nous le précisons en déterminant la dimension des espaces de cohomologie et d'homologie au moyen de la division multivariée et des bases de Gröbner.

Puis, dans le Paragraphe 2.4, nous considérons le cas des surfaces de Klein \mathcal{X}_Γ . Pour $j \in \mathbb{N}$, en

1. La définition de la modalité est donnée dans [AVGZ86].

notant HH^j l'espace de cohomologie de Hochschild en degré j de \mathcal{X}_Γ , nous prouvons que HH^0 s'identifie à l'espace des fonctions polynomiales sur la surface singulière \mathcal{X}_Γ . Nous montrons ensuite que HH^1 et HH^2 sont de dimension infinie. Nous déterminons aussi, pour j supérieur ou égal à 3, la dimension de HH^j , en montrant qu'elle est égale au nombre de Milnor de la surface \mathcal{X}_Γ . Enfin, nous calculons les espaces d'homologie de Hochschild.

2.2 Présentation du complexe de Koszul

Nous rappelons dans ce paragraphe des résultats sur le complexe de Koszul que nous utiliserons dans la suite (voir l'appendice de [FK07]).

2.2.1 Théorème de Kontsevich et notations

- Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, nous considérons $R = \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $(f_1, \dots, f_m) \in R^m$, et nous désignons par A le quotient $R / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Nous supposons qu'il y a *intersection complète*, i. e. la dimension de l'ensemble des solutions du système $\{f_1(\mathbf{z}) = \dots = f_m(\mathbf{z}) = 0\}$ est $n - m$.

- Nous considérons l'algèbre différentielle graduée

$$\tilde{T} = A[\eta_1, \dots, \eta_n; b_1, \dots, b_m] = \frac{\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]}{\langle f_1, \dots, f_m \rangle}[\eta_1, \dots, \eta_n; b_1, \dots, b_m],$$

où $\eta_i := \frac{\partial}{\partial z_i}$ est une variable impaire (i. e. les η_i anticommutent), et b_j une variable paire (i. e. les b_j commutent).

L'algèbre \tilde{T} est munie de la différentielle

$$d_{\tilde{T}} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial z_j} b_i \frac{\partial}{\partial \eta_j},$$

et de la graduation de Hodge, définie par $\deg(z_i) = 0$, $\deg(\eta_i) = 1$, $\deg(b_j) = 2$.

Pour calculer la cohomologie de Hochschild de A , nous nous appuyons principalement sur le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 (*Kontsevich*)

Sous les hypothèses précédentes, la cohomologie de Hochschild de A est isomorphe à la cohomologie du complexe $(\tilde{T}, d_{\tilde{T}})$ associé à l'algèbre différentielle graduée \tilde{T} .

Remarque 2.2.2 *Le Théorème 2.2.1 peut être vu comme une généralisation du Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg au cas de variétés non lisses.*

- Il n'y a aucun élément de degré strictement négatif. Ainsi le complexe est le suivant :

$$\tilde{T}(0) \xrightarrow{\tilde{0}} \tilde{T}(1) \xrightarrow{d_{\tilde{T}}^{(1)}} \tilde{T}(2) \xrightarrow{d_{\tilde{T}}^{(2)}} \tilde{T}(3) \xrightarrow{d_{\tilde{T}}^{(3)}} \tilde{T}(4) \xrightarrow{d_{\tilde{T}}^{(4)}} \dots$$

Pour tout degré p , nous choisissons une base \mathcal{B}_p de $\tilde{T}(p)$. En particulier, pour $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on prend :

$$\begin{aligned} \tilde{T}(0) &= A \\ \tilde{T}(1) &= A\eta_1 \oplus \dots \oplus A\eta_m \\ \tilde{T}(2) &= Ab_1 \oplus \dots \oplus Ab_m \oplus \bigoplus_{i < j} A\eta_i\eta_j \\ \tilde{T}(3) &= \bigoplus_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} Ab_i\eta_j \oplus \bigoplus_{i < j < k} A\eta_i\eta_j\eta_k. \end{aligned}$$

Dans la suite, nous expliciterons les matrices $Mat_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_{p+1}}(d_{\tilde{T}}^{(p)})$.

Soient $H^0 := A$, $H^1 := \text{Ker } d_{\tilde{T}}^{(1)}$ et pour $j \geq 2$, $H^j := \text{Ker } d_{\tilde{T}}^{(j)} / \text{Im } d_{\tilde{T}}^{(j-1)}$.

D'après le Théorème 2.2.1 on a, pour $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{HH^p(A) \simeq H^p}$.

- Le Théorème 2.2.3 suivant est l'analogue, pour l'homologie de Hochschild, du Théorème 2.2.1 : on considère le complexe

$$\tilde{\Omega} = A[\xi_1, \dots, \xi_n; a_1, \dots, a_m],$$

où ξ_i est une variable impaire et a_j une variable paire. $\tilde{\Omega}$ est muni de la différentielle

$$\boxed{d_{\tilde{\Omega}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \xi_i \frac{\partial}{\partial a_j}},$$

et de la graduation de Hodge, définie par $\deg(z_i) = 0$, $\deg(\xi_i) = -1$, $\deg(a_j) = -2$.

Théorème 2.2.3 (*Kontsevich*)

Sous les hypothèses précédentes, l'homologie de Hochschild de A est isomorphe à la cohomologie du complexe $(\tilde{\Omega}, d_{\tilde{\Omega}})$ suivant

$$\dots \xrightarrow{d_{\tilde{\Omega}}^{(-5)}} \tilde{\Omega}(-4) \xrightarrow{d_{\tilde{\Omega}}^{(-4)}} \tilde{\Omega}(-3) \xrightarrow{d_{\tilde{\Omega}}^{(-3)}} \tilde{\Omega}(-2) \xrightarrow{d_{\tilde{\Omega}}^{(-2)}} \tilde{\Omega}(-1) \xrightarrow{d_{\tilde{\Omega}}^{(-1)}} \tilde{\Omega}(0).$$

Pour tout degré p , nous choisirons une base \mathcal{V}_p de $\tilde{\Omega}(p)$ et nous utiliserons les matrices explicites $Mat_{\mathcal{V}_p, \mathcal{V}_{p+1}}(d_{\tilde{\Omega}}^{(p)})$.

Soient $L^0 := A / \text{Im } d_{\tilde{\Omega}}^{(-1)}$, et pour $p \geq 1$, $L^{-p} := \text{Ker } d_{\tilde{\Omega}}^{(-p)} / \text{Im } d_{\tilde{\Omega}}^{(-p-1)}$.

D'après le Théorème 2.2.3, on a, pour $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{HH_p(A) \simeq L^{-p}}$.

- Pour tout idéal J de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$, on désigne par J_A l'image de J par la projection canonique

$$\mathbb{C}[\mathbf{z}] \rightarrow A = \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle.$$

De même, si $(g_1, \dots, g_r) \in A^r$ on désigne par $\langle g_1, \dots, g_r \rangle_A$ l'idéal de A engendré par (g_1, \dots, g_r) . De plus, si $g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, et si J est un idéal de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$, on pose

$$\text{Ann}_J(g) := \{h \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] \mid hg = 0 \pmod{J}\}.$$

En particulier, g ne divise pas 0 dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}]/J$ si et seulement si $\text{Ann}_J(g) = J$.

- Désormais, nous considérons le cas $m = 1$ et nous posons $f := f_1$. De plus, nous utilisons la notation ∂_j pour la dérivée partielle par rapport à z_j , et ∇g pour le gradient d'un polynôme $g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.

2.2.2 Cas particulier où $n = 1$ et $m = 1$

- Dans le cas où $n = 1$ et $m = 1$, d'après ce qui précède, on a pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{T}(2p) = Ab_1^p, \quad \tilde{T}(2p+1) = Ab_1^p \eta_1, \quad \tilde{\Omega}(-2p) = Aa_1^p, \quad \tilde{\Omega}(-2p-1) = Aa_1^p \xi_1.$$

On en déduit $H^0 = L^0 = A$, $H^1 = \{g\eta_1 \mid g \in A \text{ et } g\partial_1 f = 0\}$,
et pour $p \in \mathbb{N}^*$, $H^{2p} = \frac{Ab_1^p}{\{g(\partial_1 f)b_1^p \mid g \in A\}}$, et $H^{2p+1} = \{g b_1^p \eta_1 \mid g \in A \text{ et } g\partial_1 f = 0\}$.

De la même façon, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $L^{-2p} = \{ga_1^p \mid g \in A \text{ et } g\partial_1 f = 0\}$,
et pour $p \in \mathbb{N}$, $L^{-2p-1} = \frac{Aa_1^p \xi_1}{\{g(\partial_1 f)a_1^p \xi_1 \mid g \in A\}}$.

- Si maintenant $f = z_1^k$, alors

$$H^0 = L^0 = A = \mathbb{C}[z_1] / \langle z_1^k \rangle \simeq \mathbb{C}^k$$

$$H^1 = \{g\eta_1 \mid g \in A \text{ et } kgz_1^{k-1} = 0\} \simeq \mathbb{C}^{k-1}, \quad L^{-1} = \frac{A\xi_1}{\{g(kz_1^{k-1})\xi_1 \mid g \in A\}} \simeq \mathbb{C}^{k-1},$$

$$\text{et pour } p \in \mathbb{N}^*, \quad H^{2p} \simeq L^{-2p-1} \simeq \frac{Ab_1^p}{\{g(kz_1^{k-1})b_1^p \mid g \in A\}} \simeq \mathbb{C}^{k-1},$$

$$\text{et pour } p \in \mathbb{N}^*, \quad H^{2p+1} \simeq L^{-2p} \simeq \{g b_1^p \eta_1 \mid g \in A \text{ et } kgz_1^{k-1} = 0\} \simeq \mathbb{C}^{k-1}.$$

Voir [Lod98] pour un calcul semblable.

2.3 Cas $n = 2$, $m = 1$. — Courbes singulières du plan

2.3.1 Courbes singulières du plan

Dans ce paragraphe, nous rappelons un résultat sur les fonctions quasi-homogènes, donné dans [AVGZ86] p. 181.

Théorème 2.3.1 (*Classification des fonctions quasi-homogènes*— [AVGZ86]) *Les fonctions quasi-homogènes de deux variables et de modalité nulle se réduisent, à équivalence près, à la liste suivante de formes normales :*

Type	A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
Forme normale	$z_1^{k+1} + z_2^2$	$z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$	$z_1^3 + z_2^4$	$z_1^3 + z_1 z_2^3$	$z_1^3 + z_2^5$

Les singularités de types A_k , D_k , E_6 , E_7 , E_8 sont appelées singularités simples.

Dans les deux paragraphes suivants, nous étudions la cohomologie de Hochschild de $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$, où f est l'une des formes normales du tableau ci-dessus.

2.3.2 Description des espaces de cohomologie

A l'aide du Théorème 2.2.1 nous calculons la cohomologie de Hochschild de $A := \mathbb{C}[z_1, z_2] / \langle f \rangle$, où $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$. Nous commençons par expliciter les cochaînes et les différentielles, en utilisant les notations du Paragraphe 2.2.1.

- Les différents espaces du complexe sont donnés par

$$\begin{array}{l|l} \tilde{T}(0) = A & \tilde{T}(5) = Ab_1^2 \eta_1 \oplus Ab_1^2 \eta_2 \\ \tilde{T}(1) = A\eta_1 \oplus A\eta_2 & \tilde{T}(6) = Ab_1^3 \oplus Ab_1^3 \eta_1 \eta_2 \\ \tilde{T}(2) = Ab_1 \oplus A\eta_1 \eta_2 & \tilde{T}(7) = Ab_1^3 \eta_1 \oplus Ab_1^3 \eta_2 \\ \tilde{T}(3) = Ab_1 \eta_1 \oplus Ab_1 \eta_2 & \tilde{T}(8) = Ab_1^4 \oplus Ab_1^3 \eta_1 \eta_2 \\ \tilde{T}(4) = Ab_1^2 \oplus Ab_1 \eta_1 \eta_2 & \tilde{T}(9) = Ab_1^4 \eta_1 \oplus Ab_1^4 \eta_2, \end{array}$$

i. e., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{T}(2p) = Ab_1^p \oplus Ab_1^{p-1} \eta_1 \eta_2$,

et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\tilde{T}(2p+1) = Ab_1^p \eta_1 \oplus Ab_1^p \eta_2$.

Comme dans [FK07], on note $\frac{\partial}{\partial \eta_k}$ la dérivée partielle par rapport à la variable η_k , pour $k \in \{1, 2\}$.

Ainsi, pour $\{k, l\} = \{1, 2\}$, on a $\frac{\partial}{\partial \eta_k}(\eta_k \wedge \eta_l) = 1 \wedge \eta_l = -\eta_l \wedge 1$,

d'où $d_{\tilde{T}}^{(2)}(\eta_k \eta_l) = -\frac{\partial f}{\partial z_k} b_1 \eta_l + \frac{\partial f}{\partial z_l} b_1 \eta_k$.

Les matrices de $d_{\tilde{T}}$ sont donc données par

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_{2p}, \mathcal{B}_{2p+1}}(d_{\tilde{T}}^{(2p)}) &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 f \\ 0 & -\partial_1 f \end{pmatrix} \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_{2p+1}, \mathcal{B}_{2p+2}}(d_{\tilde{T}}^{(2p+1)}) &= \begin{pmatrix} \partial_1 f & \partial_2 f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- On en déduit une expression plus simple pour les espaces de cohomologie :

$$H^0 = A,$$

$$H^1 = \{g_1 \eta_1 + g_2 \eta_2 / (g_1, g_2) \in A^2 \text{ et } g_1 \partial_1 f + g_2 \partial_2 f = 0\}$$

$$\simeq \left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \right\},$$

et pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 H^{2p} &= \frac{\{g_1 b_1^p + g_2 b_1^{p-1} \eta_1 \eta_2 / (g_1, g_2) \in A^2 \text{ et } g_2 \partial_1 f = g_2 \partial_2 f = 0\}}{\{(g_1 \partial_1 f + g_2 \partial_2 f) b_1^p / (g_1, g_2) \in A^2\}} \simeq \frac{\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 / g_2 \partial_1 f = g_2 \partial_2 f = 0 \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g} \cdot \nabla f \\ 0 \end{pmatrix} / \mathbf{g} \in A^2 \right\}} \\
 &\simeq \frac{A}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle_A} \oplus \{g \in A / g \partial_1 f = g \partial_2 f = 0\}, \\
 H^{2p+1} &= \frac{\{g_1 b_1^p \eta_1 + g_2 b_1^p \eta_2 / (g_1, g_2) \in A^2 \text{ et } g_1 \partial_1 f + g_2 \partial_2 f = 0\}}{\{g_2 (\partial_2 f b_1^p \eta_1 - \partial_1 f b_1^p \eta_2) / g_2 \in A\}} \simeq \frac{\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \right\}}{\left\{ g_2 \begin{pmatrix} \partial_2 f \\ -\partial_1 f \end{pmatrix} / g_2 \in A \right\}}.
 \end{aligned}$$

Remarque 2.3.2

Nous retrouvons un résultat de [FK07] (ici, nous utilisons les notations de [FK07]) : d'après le Théorème 3.8 de [FK07], on a $\text{Hoch}_{2p} = \text{Hoch}_{2p,p} \oplus \text{Hoch}_{2p,p+1}$ et $\text{Hoch}_{2p+1} = \text{Hoch}_{2p+1,p+1}$, d'où $\text{Hoch}_{2p,k} = 0$ si $k \notin \{p, p+1\}$, et $\text{Hoch}_{2p+1,k} = 0$ si $k \neq p+1$.

En utilisant le Paragraphe 4.1 de [FK07], on en déduit que $H^{2p,k} = 0$ si $k \notin \{p, p+1\}$, et $H^{2p+1,k} = 0$ si $k \neq p+1$.

D'où $H^{2p} = H^{2p,p} \oplus H^{2p,p+1}$ et $H^{2p+1} = H^{2p+1,p+1}$. Ce sont les espaces de cohomologie que nous venons d'obtenir.

Il reste à déterminer ces espaces de façon plus explicite. C'est le but des deux paragraphes suivants.

2.3.3 Calculs explicites dans le cas particulier où f a des variables séparées

Dans ce paragraphe, on considère le polynôme $f = a_1 z_1^k + a_2 z_2^l$, avec $k \geq 2$, $l \geq 2$, et $(a_1, a_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$.

Les dérivées partielles de f sont $\partial_1 f = k a_1 z_1^{k-1}$ et $\partial_2 f = l a_2 z_2^{l-1}$.

- Nous avons déjà

$$H^0 = \mathbb{C}[z_1, z_2] / \langle a_1 z_1^k + a_2 z_2^l \rangle.$$

- En outre, comme f est quasi-homogène, la Formule d'Euler donne $\frac{1}{k} z_1 \partial_1 f + \frac{1}{l} z_2 \partial_2 f = f$. Ainsi nous avons l'inclusion $\langle f \rangle \subset \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle$, d'où

$$\frac{A}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[z_1, z_2]}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle} \simeq \text{Vect} \left(z_1^i z_2^j / i \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket, j \in \llbracket 0, l-2 \rrbracket \right).$$

Mais $\partial_1 f$ et f sont premiers entre eux, de même que $\partial_2 f$ et f , d'où si $g \in A$ vérifie $g \partial_1 f = 0 \text{ mod } \langle f \rangle$, alors $g \in \langle f \rangle$, i. e. g est nul dans A .

Ainsi,

$$H^{2p} \simeq \text{Vect} \left(z_1^i z_2^j / i \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket, j \in \llbracket 0, l-2 \rrbracket \right) \simeq \mathbb{C}^{(k-1)(l-1)}.$$

- Nous déterminons maintenant l'ensemble $\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \right\}$.

On a $\langle f, \partial_1 f \rangle = \langle a_1 z_1^k + a_2 z_2^l, z_1^{k-1} \rangle = \langle z_2^l, z_1^{k-1} \rangle$. Ainsi les seuls monômes qui ne sont pas dans cet idéal sont les éléments $z_1^i z_2^j$ avec $i \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, l-1 \rrbracket$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ peut s'écrire sous la forme

$$P = \alpha f + \beta \partial_1 f + \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=0 \dots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j,$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Donc les polynômes $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ tels que $P \partial_2 f \in \langle f, \partial_1 f \rangle$ sont les éléments

$$P = \alpha f + \beta \partial_1 f + \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j.$$

Ainsi on a calculé $\text{Ann}_{\langle f, \partial_1 f \rangle}(\partial_2 f)$.

Soit $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2$ satisfaisant l'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \mod \langle f \rangle. \quad (2.1)$$

On a alors

$$g_2 \partial_2 f = 0 \mod \langle f, \partial_1 f \rangle, \quad (2.2)$$

i. e. $g_2 \in \text{Ann}_{\langle f, \partial_1 f \rangle}(\partial_2 f)$, i. e. à nouveau

$$g_2 = \alpha f + \beta \partial_1 f + \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^2. \quad (2.3)$$

Il s'ensuit que

$$g_1 \partial_1 f + \alpha f \partial_2 f + \beta \partial_1 f \partial_2 f + \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j \partial_2 f \in \langle f \rangle. \quad (2.4)$$

De l'égalité $z_2 \partial_2 f = l f - \frac{l}{k} z_1 \partial_1 f$, on déduit que :

$$\partial_1 f \left(g_1 + \beta \partial_2 f - \frac{l}{k} \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} a_{ij} z_1^{i+1} z_2^{j-1} \right) \in \langle f \rangle. \quad (2.5)$$

$$\text{i. e. } g_1 = -\beta \partial_2 f + \frac{l}{k} \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} a_{ij} z_1^{i+1} z_2^{j-1} + \delta f, \text{ avec } \delta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

Nous vérifions que les éléments g_1 et g_2 ainsi obtenus sont effectivement solutions de l'Equation (2.1).

Enfin, on a

$$\{\mathbf{g} \in A^2 \mid \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\} = \left\{ -\beta \begin{pmatrix} \partial_2 f \\ -\partial_1 f \end{pmatrix} + \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^{j-1} \begin{pmatrix} \frac{l}{k} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid \beta \in A \text{ et } a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Nous en déduisons immédiatement les espaces de cohomologie de degré impair :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall p \geq 1, H^{2p+1} \simeq \mathbb{C}^{(k-1)(l-1)} \\ H^1 \simeq \mathbb{C}^{(k-1)(l-1)} \oplus \mathbb{C}[z_1, z_2] / \langle a_1 z_1^k + a_2 z_2^l \rangle \end{array}},$$

où la somme directe résulte de l'argument suivant : si l'on a

$$-\beta \begin{pmatrix} \partial_2 f \\ -\partial_1 f \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^{j-1} \begin{pmatrix} \frac{l}{k} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \pmod{\langle f \rangle},$$

alors

$$v := -\beta l a_2 z_2^{l-1} - \sum_{\substack{i=0 \dots k-2 \\ j=1 \dots l-1}} \frac{l}{k} a_{ij} z_1^{i+1} z_2^{j-1} \in \langle f \rangle.$$

Et par division euclidienne dans $(\mathbb{C}[z_2])[z_1]$, nous pouvons écrire $\beta = fq + r$, où le degré en z_1 de r est inférieur ou égal à $k-1$. Ainsi le degré en z_1 de v est aussi inférieur ou égal à $k-1$, donc $v \in \langle f \rangle$ entraîne $\beta = 0$ et $a_{ij} = 0$.

Remarque 2.3.3

Nous obtenons en particulier la cohomologie dans les cas où $f = z_1^{k+1} + z_2^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$), $f = z_1^3 + z_2^4$ et $f = z_1^3 + z_2^5$. Ces cas correspondent respectivement aux fonctions quasi-homogènes de types A_k , E_6 et E_8 données dans le Théorème 2.3.1.

Le tableau suivant résume les résultats de ces trois cas particuliers :

Type	H^0	H^1	$H^p, p \geq 2$
A_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^{k+1} + z_2^2 \rangle$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^{k+1} + z_2^2 \rangle \oplus \mathbb{C}^k$	\mathbb{C}^k
E_6	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_2^4 \rangle$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_2^4 \rangle \oplus \mathbb{C}^6$	\mathbb{C}^6
E_8	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_2^5 \rangle$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_2^5 \rangle \oplus \mathbb{C}^8$	\mathbb{C}^8

Les cas où $f = z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$ et $f = z_1^3 + z_1 z_2^3$, i. e. respectivement D_k et E_7 , sont étudiés dans le paragraphe suivant.

2.3.4 Calculs explicites pour D_k et E_7

Pour étudier ces cas particuliers, nous utilisons des résultats sur les bases de Gröbner précédemment rappelés dans le Paragraphe 1.4.1 du Chapitre 1, et en particulier le Théorème 1.4.5 (Théorème de Macaulay).

Cas de $f = z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$, i. e. D_k

Ici on a $f = z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$, $\partial_1 f = 2z_1 z_2$ et $\partial_2 f = z_1^2 + (k-1)z_2^{k-2}$.

Une base de Gröbner de l'idéal $\langle f, \partial_2 f \rangle$ est $B := [b_1, b_2] = [z_1^2 + (k-1)z_2^{k-2}, z_2^{k-1}]$.

Ainsi l'ensemble des termes standards est $\{z_1^i z_2^j / i \in \{0, 1\} \text{ et } j \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket\}$.

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation $p \partial_1 f = 0$ dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f, \partial_2 f \rangle$.

En effet, en écrivant $p := \sum_{\substack{i=0,1 \\ j=0 \dots k-2}} a_{ij} z_1^i z_2^j$, l'équation devient

$$q := \sum_{\substack{i=0,1 \\ j=0 \dots k-2}} a_{ij} z_1^{i+1} z_2^{j+1} \in \langle f, \partial_2 f \rangle.$$

Nous cherchons la forme normale de l'élément q modulo l'idéal $\langle f, \partial_2 f \rangle$.

La division multivariée de q par B est $q = q_1 b_1 + q_2 b_2 + r$ avec $r = \sum_{j=0}^{k-3} a_{0,j} z_1 z_2^{j+1}$.

Donc la solution dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f, \partial_2 f \rangle$ est

$$p = a_{0,k-2} z_2^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2} a_{1,j} z_1 z_2^j.$$

Or l'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \quad \text{mod } \langle f \rangle \quad (2.6)$$

entraîne

$$g_1 \partial_1 f = 0 \quad \text{mod } \langle f, \partial_2 f \rangle, \quad (2.7)$$

$$\text{i. e. } g_1 = \alpha f + \beta \partial_2 f + a z_2^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_1 z_2^j, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^2 \text{ et } a, b_j \in \mathbb{C}. \quad (2.8)$$

D'où

$$g_2 \partial_2 f + \beta \partial_1 f \partial_2 f + a z_2^{k-2} \partial_1 f + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_1 z_2^j \partial_1 f \in \langle f \rangle. \quad (2.9)$$

et avec les égalités

$$z_2^{k-1} = \frac{1}{2-k} (f - z_2 \partial_2 f) = -\frac{1}{2-k} z_2 \partial_2 f \quad \text{mod } \langle f \rangle,$$

$$\text{et } \frac{k-2}{2} z_1 \partial_1 f + z_2 \partial_2 f = (k-1)f \text{ (Euler),}$$

on obtient

$$\partial_2 f \left(g_2 + \beta \partial_1 f - \frac{2a}{2-k} z_1 z_2 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k} z_2^{j+1} \right) \in \langle f \rangle, \quad (2.10)$$

$$\text{i. e. } g_2 = -\beta \partial_1 f + \frac{2a}{2-k} z_1 z_2 - \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k} z_2^{j+1} + \delta f, \text{ avec } \delta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

Ainsi

$$\{\mathbf{g} \in A^2 \mid \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\} = \left\{ \beta \begin{pmatrix} \partial_2 f \\ -\partial_1 f \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} z_2^{k-2} \\ \frac{2}{2-k} z_1 z_2 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_2^j \begin{pmatrix} z_1 \\ -\frac{2}{2-k} z_2 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \beta \in A \\ a, b_j \in \mathbb{C} \end{array} \right\}.$$

D'autre part, une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle$ est $[z_1^2 + (k-1)z_2^{k-2}, z_1 z_2, z_2^{k-1}]$, donc $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle \simeq Vect(z_1, 1, z_2, \dots, z_2^{k-2})$.

Soit, en résumant (et en utilisant, pour la somme directe, le même argument que dans le Paragraphe 2.3.3) on a :

$$\begin{array}{l} H^0 = \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 z_2 + z_2^{k-1} \rangle \\ H^1 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 z_2 + z_2^{k-1} \rangle \oplus \mathbb{C}^k \\ H^{2p} \simeq \mathbb{C}^k \\ H^{2p+1} \simeq \mathbb{C}^k \end{array}$$

Cas de $f = z_1^3 + z_1 z_2^3$, i. e. E_7

Ici on a $\partial_1 f = 3z_1^2 + z_2^3$ et $\partial_2 f = 3z_1 z_2^2$.

Une base de Gröbner de l'idéal $\langle f, \partial_1 f \rangle$ est $[3z_1^2 + z_2^3, z_1 z_2^3, z_2^6]$, et une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle$ est $[3z_1^2 + z_2^3, z_1 z_2^2, z_2^5]$.

Par une démonstration analogue nous avons :

$$\begin{array}{l} H^0 = \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_1 z_2^3 \rangle \\ H^1 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_1 z_2^3 \rangle \oplus \mathbb{C}^7 \\ H^{2p} \simeq \mathbb{C}^7 \\ H^{2p+1} \simeq \mathbb{C}^7 \end{array}$$

2.3.5 Homologie

• L'étude est la même que pour la cohomologie de Hochschild : en effet, l'obtention de l'homologie de Hochschild est équivalente au calcul de la cohomologie du complexe $(\tilde{\Omega}, d_{\tilde{\Omega}})$ décrit dans le Paragraphe 2.2.1.

On a $\tilde{\Omega}(0) = A$, $\tilde{\Omega}(-2p) = Aa_1^p \oplus Aa_1^{p-1}\xi_1\xi_2$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $\tilde{\Omega}(-2p-1) = Aa_1^p\xi_1 \oplus Aa_1^p\xi_2$ pour $p \in \mathbb{N}$. Cela définit les bases \mathcal{V}_p . La différentielle est $d_{\tilde{\Omega}} = (\xi_1\partial_1 f + \xi_2\partial_2 f)\frac{\partial}{\partial a_1}$.

Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient les matrices

$$Mat_{\mathcal{V}_{-2p}, \mathcal{V}_{-2p+1}} \left(d_{\tilde{\Omega}}^{(-2p)} \right) = \begin{pmatrix} p\partial_1 f & 0 \\ p\partial_2 f & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } Mat_{\mathcal{V}_{-2p-1}, \mathcal{V}_{-2p}} \left(d_{\tilde{\Omega}}^{(-2p-1)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -p\partial_2 f & p\partial_1 f \end{pmatrix}.$$

• Les espaces de cohomologie s'écrivent :

$$L^0 = A,$$

$$L^{-1} = \frac{A^2}{\{g\nabla f / g \in A\}}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} L^{-2p} &\simeq \frac{\left\{ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \mid pg_1\partial_1 f = pg_2\partial_2 f = 0 \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -(p+1)g_1\partial_2 f + (p+1)g_2\partial_1 f \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \right\}} \\ &\simeq \{g \in A \mid g\partial_1 f = g\partial_2 f = 0\} \oplus \frac{A}{\langle \nabla f \rangle_A}. \end{aligned}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$L^{-2p-1} \simeq \frac{\left\{ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \mid -pg_1\partial_2 f + pg_2\partial_1 f = 0 \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} (p+1)g_1\partial_1 f \\ (p+1)g_1\partial_2 f \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \right\}} \simeq \frac{\{g \in A^2 \mid \det(\nabla f, g) = 0\}}{\{g\nabla f / g \in A\}}.$$

• A partir de maintenant, on suppose que f a des variables séparées, ou que f est du type D_k ou E_7 . Alors on a $\{g \in A \mid g\partial_1 f = g\partial_2 f = 0\} = \{0\}$, et d'après la Formule d'Euler, pour $p \in \mathbb{N}$, $L^{-2p} \simeq \frac{A}{\langle \nabla f \rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[\mathbf{z}]}{\langle \nabla f \rangle}$.

Pour le calcul de $\{g \in A^2 \mid \det(\nabla f, g) = 0\}$ et $\frac{A^2}{\{g\nabla f / g \in A\}}$, nous procédons avec les bases de Gröbner comme dans le Paragraphe 2.3.4. Par exemple, traitons le cas de $f = z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$ (D_k).

▷ Soit $g \in A^2$ tel que $\det(\nabla f, g) = 0$. Alors $g_2\partial_1 f = 0 \pmod{\langle f, \partial_2 f \rangle}$, i. e., d'après le Paragraphe 2.3.4,

$$g_2 = \alpha f + \beta \partial_2 f + a z_2^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_1 z_2^j, \quad (2.11)$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^2$ et $a, b_j \in \mathbb{C}$. D'où

$$-g_1\partial_2 f + \alpha f\partial_1 f + \beta \partial_2 f\partial_1 f + a z_2^{k-2}\partial_1 f + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_1 z_2^j \partial_1 f \in \langle f \rangle. \quad (2.12)$$

Avec les égalités

$$z_2^{k-1} = \frac{1}{2-k}(f - z_2\partial_2 f) = -\frac{1}{2-k}z_2\partial_2 f \pmod{\langle f \rangle},$$

$$\text{et } \frac{k-2}{2}z_1\partial_1 f + z_2\partial_2 f = (k-1)f \text{ (Euler),}$$

nous obtenons

$$\partial_2 f \left(-g_1 + \beta \partial_1 f - \frac{2a}{2-k}z_1 z_2 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k}z_2^{j+1} \right) \in \langle f \rangle, \quad (2.13)$$

$$\text{i. e. } g_1 = \beta \partial_1 f - \frac{2a}{2-k}z_1 z_2 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k}z_2^{j+1} + \delta f, \text{ avec } \delta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

Ainsi

$$\{\mathbf{g} \in A^2 / \det(\nabla f, \mathbf{g}) = 0\} = \left\{ \beta \nabla f + a \begin{pmatrix} -\frac{2}{2-k} z_1 z_2 \\ z_2^{k-2} \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_2^j \begin{pmatrix} \frac{2}{2-k} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} / \begin{matrix} \beta \in A \\ a, b_j \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}.$$

▷ On a $\{g \nabla f / g \in A\} \subset \{\mathbf{g} \in A^2 / \det(\nabla f, \mathbf{g}) = 0\}$, d'où

$$\dim(A^2 / \{g \nabla f / g \in A\}) \geq \dim(A^2 / \{\mathbf{g} \in A^2 / \det(\nabla f, \mathbf{g}) = 0\}).$$

Puisque $A^2 / \{\mathbf{g} \in A^2 / \det(\nabla f, \mathbf{g}) = 0\} \simeq \{\det(\nabla f, \mathbf{g}) / \mathbf{g} \in A^2\}$, et que l'application

$$g \in A \mapsto \det\left(\nabla f, \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in \{\det(\nabla f, \mathbf{g}) / \mathbf{g} \in A^2\}$$

est injective, nous en déduisons que $A^2 / \{g \nabla f / g \in A\}$ est de dimension finie.

- Dans le tableau suivant, nous rassemblons les résultats sur l'homologie de Hochschild des cas étudiés.

Type	$HH_0 = A$	HH_1	$HH_p, p \geq 2$
A_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^{k+1} + z_2^2 \rangle$	$A^2 / A \nabla f$	\mathbb{C}^k
D_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 z_2 + z_2^{k-1} \rangle$	$A^2 / A \nabla f$	\mathbb{C}^k
E_6	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_2^4 \rangle$	$A^2 / A \nabla f$	\mathbb{C}^6
E_7	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_1 z_2^3 \rangle$	$A^2 / A \nabla f$	\mathbb{C}^7
E_8	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^3 + z_2^5 \rangle$	$A^2 / A \nabla f$	\mathbb{C}^8

2.4 Cas $n = 3$, $m = 1$. — Surfaces de Klein

2.4.1 Surfaces de Klein

Etant donné un groupe fini G agissant sur \mathbb{C}^n , on lui associe, selon le programme d'Erlangen de Klein (voir [Kle72]), l'espace quotient \mathbb{C}^n / G , i. e. l'espace dont les points sont les orbites sous l'action de G ; c'est une variété algébrique, et les fonctions polynomiales sur cette variété sont les fonctions polynomiales sur \mathbb{C}^n qui sont G -invariantes.

La théorie des invariants (voir la Proposition 4.4.12) permet d'associer à tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2 \mathbb{C}$, l'ensemble des zéros d'un polynôme; cet ensemble est une variété algébrique, appelée surface de Klein.

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats sur les surfaces de Klein. Voir les références [Spr77] et [CCK99] pour plus de détails.

Proposition 2.4.1

Tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ est conjugué à l'un des groupes suivants :

- A_k (cyclique), $k \geq 1$ ($|A_k| = k$)
- D_k (binaire diédral), $k \geq 1$ ($|D_k| = 4k$)
- E_6 (binaire tétraédral) ($|E_6| = 24$)
- E_7 (binaire octaédral) ($|E_7| = 48$)
- E_8 (binaire icosaédral) ($|E_8| = 120$).

La démonstration de cette proposition (effectuée dans [Spr77]) repose sur le fait que tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_n\mathbb{C}$ est conjugué à un sous-groupe fini de $\mathbf{SU}_n\mathbb{C}$, et sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SU}_2\mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{PSU}_2\mathbb{C} = \mathbf{SU}_2\mathbb{C} / \{\pm 1\} \xrightarrow[\sim]{\psi} \mathbf{SO}_3\mathbb{R} \\ G & \longrightarrow & \Gamma \longrightarrow \psi(\Gamma) \end{array}$$

Proposition 2.4.2

Soit G l'un des groupes de la liste précédente. L'anneau des invariants est le suivant :

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{C}[e_1, e_2] \oplus e_3\mathbb{C}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/\langle f \rangle,$$

où les invariants e_j sont des polynômes homogènes, avec e_1 et e_2 algébriquement indépendants, et où f est un polynôme quasi-homogène à singularité isolée en l'origine.

Ces polynômes sont donnés dans le tableau suivant.

Nous appelons surface de Klein l'hypersurface algébrique définie par $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 / f(\mathbf{z}) = 0\}$.

G	e_1, e_2, e_3	f	$\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle$
A_k	$e_1 = x^k$ $e_2 = y^k$ $e_3 = xy$	$-k(z_1 z_2 - z_3^k)$	$\text{Vect}(1, z_3, \dots, z_3^{k-2})$ $\dim = k - 1$
D_k	$e_1 = x^{2k+1}y + (-1)^{k+1}xy^{2k+1}$ $e_2 = x^{2k} + (-1)^k y^{2k}$ $e_3 = x^2 y^2$	$\lambda_k((-1)^k z_1^2 + (-1)^{k+1} z_2^2 z_3 + 4z_3^{k+1})$ avec $\lambda_k = 2k(-1)^{k+1}$	$\text{Vect}(1, z_2, z_3, \dots, z_3^k)$ $\dim = k + 2$
E_6	$e_1 = 33y^8x^4 - y^{12} + 33y^4x^8 - x^{12}$ $e_2 = 14y^4x^4 + x^8 + y^8$ $e_3 = x^5y - xy^5$	$4(z_1^2 - z_2^3 + 108z_3^4)$	$\text{Vect}(1, z_2, z_3, z_2z_3, z_2z_3^2, z_3^2)$ $\dim = 6$
E_7	$e_1 = -34x^5y^{13} - yx^{17} + 34y^5x^{13} + xy^{17}$ $e_2 = -3y^{10}x^2 + 6y^6x^6 - 3y^2x^{10}$ $e_3 = 14y^4x^4 + x^8 + y^8$	$8(3z_1^2 - 12z_2^3 + z_2z_3^3)$	$\text{Vect}(1, z_2, z_2^2, z_3, z_2z_3, z_2^2z_3, z_3^2)$ $\dim = 7$
E_8	$e_1 = x^{30} + 522x^{25}y^5 - 10\,005x^{20}y^{10} - 10\,005x^{10}y^{20} - 522x^5y^{25} + y^{30}$ $e_2 = x^{20} - 228x^{15}y^5 + 494x^{10}y^{10} + 228x^5y^{15} + y^{20}$ $e_3 = x^{11}y + 11x^6y^6 - xy^{11}$	$10(-z_1^2 + z_2^3 + 1\,728z_3^5)$	$\text{Vect}(z_2^i z_3^j)_{\substack{i=0\dots 1, \\ j=0\dots 3}}$ $\dim = 8$

Avant de poursuivre notre étude, nous faisons une digression pour établir un parallèle entre les

cohomologies de Poisson et de Hochschild des surfaces de Klein, en rappelant le résultat de A. Pichereau (voir [Pic05] et [Pic06]).

Théorème 2.4.3 (*Pichereau*)

Considérons le crochet de Poisson défini sur $\mathbb{C}[z_1, z_1, z_3]$ par

$$\{\cdot, \cdot\}_f = \partial_3 f \partial_1 \wedge \partial_2 + \partial_1 f \partial_2 \wedge \partial_3 + \partial_2 f \partial_3 \wedge \partial_1 = \iota_{df}(\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3),$$

où ι est la contraction d'une multidérivation par une forme différentielle. Notons HP_f^* (resp. HP_*^f) la cohomologie de Poisson (resp. l'homologie) pour ce crochet. Sous les hypothèses précédentes, la cohomologie de Poisson HP_f^* et l'homologie de Poisson HP_*^f de $(\mathbb{C}[z_1, z_1, z_3]/\langle f \rangle, \{\cdot, \cdot\}_f)$ sont données par

$$\begin{aligned} HP_f^0 &= \mathbb{C}, \quad HP_f^1 \simeq HP_f^2 = \{0\} \\ HP_0^f &\simeq HP_2^f \simeq \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle \\ \dim(HP_1^f) &= \dim(HP_0^f) - 1 \\ HP_j^f &= HP_j^f = \{0\} \text{ si } j \geq 3. \end{aligned}$$

L'algèbre $\mathbb{C}[x, y]$ est une algèbre de Poisson pour le crochet symplectique standard $\{\cdot, \cdot\}_{std}$. Comme G est un sous-groupe du groupe symplectique $\mathbf{Sp}_2\mathbb{C}$ (puisque $\mathbf{Sp}_2\mathbb{C} = \mathbf{SL}_2\mathbb{C}$), l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$ est une sous-algèbre de Poisson de $\mathbb{C}[x, y]$. La proposition suivante permet de déduire, du Théorème 2.4.3, la cohomologie et l'homologie de Poisson de $\mathbb{C}[x, y]^G$ pour le crochet symplectique standard.

Proposition 2.4.4

Avec les choix faits dans le tableau précédent pour le polynôme f , l'isomorphisme d'algèbres associatives

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{C}[x, y]^G, \{\cdot, \cdot\}_{std}) &\rightarrow (\mathbb{C}[z_1, z_1, z_3]/\langle f \rangle, \{\cdot, \cdot\}_f) \\ e_j &\mapsto \overline{z_j} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de Poisson.

Dans la suite, nous calculons la cohomologie de Hochschild de $\mathbb{C}[z_1, z_1, z_3]/\langle f \rangle$, et en déduisons immédiatement la cohomologie de Hochschild de $\mathbb{C}[x, y]^G$, à l'aide de l'isomorphisme π .

Le fait que π préserve les structures de Poisson n'a pas d'incidence sur le calcul de la cohomologie de Hochschild. Cette remarque permet, pour alléger les calculs, de remplacer les polynômes f par des polynômes plus simples, donnés dans le tableau suivant,

G	A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
f	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^k$	$z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1}$	$z_1^2 + z_2^3 + z_3^4$	$z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3$	$z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$

puisque les applications linéaires définies par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbf{z}] &\rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{z}] \\ (z_1, z_2, z_3) &\mapsto (\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2, \alpha_3 z_3) \\ (z_1, z_2, z_3) &\mapsto (\alpha_1(z_1 + z_2), \alpha_2(z_1 + z_2), \alpha_3 z_3), \end{aligned}$$

sont des isomorphismes d'algèbres associatives.

2.4.2 Description des espaces de cohomologie

• Nous considérons maintenant le cas $A := \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] / \langle f \rangle$. Pour calculer la cohomologie de Hochschild de A , nous utilisons les notations du Paragraphe 2.2.1, en changeant, pour plus de commodité, l'ordre des éléments de la base : nous prenons $(\eta_1\eta_2, \eta_2\eta_3, \eta_3\eta_1)$ au lieu de $(\eta_1\eta_2, \eta_1\eta_3, \eta_2\eta_3)$. Les différents espaces du complexe sont maintenant donnés par

$$\begin{aligned}\tilde{T}(0) &= A \\ \tilde{T}(1) &= A\eta_1 \oplus A\eta_2 \oplus A\eta_3 \\ \tilde{T}(2) &= Ab_1 \oplus A\eta_1\eta_2 \oplus A\eta_2\eta_3 \oplus A\eta_3\eta_1 \\ \tilde{T}(3) &= Ab_1\eta_1 \oplus Ab_1\eta_2 \oplus Ab_1\eta_3 \oplus A\eta_1\eta_2\eta_3 \\ \tilde{T}(4) &= Ab_1^2 \oplus Ab_1\eta_1\eta_2 \oplus Ab_1\eta_2\eta_3 \oplus Ab_1\eta_3\eta_1 \\ \tilde{T}(5) &= Ab_1^2\eta_1 \oplus Ab_1^2\eta_2 \oplus Ab_1^2\eta_3 \oplus Ab_1\eta_1\eta_2\eta_3\end{aligned}$$

i. e., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{T}(2p) = Ab_1^p \oplus Ab_1^{p-1}\eta_1\eta_2 \oplus Ab_1^{p-1}\eta_2\eta_3 \oplus Ab_1^{p-1}\eta_3\eta_1$,

et $\tilde{T}(2p+1) = Ab_1^p\eta_1 \oplus Ab_1^p\eta_2 \oplus Ab_1^p\eta_3 \oplus Ab_1^{p-1}\eta_1\eta_2\eta_3$.

On a $\frac{\partial}{\partial \eta_1}(\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) = 1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 = \eta_2 \wedge \eta_3 \wedge 1$,

donc $d_{\tilde{T}}^{(3)}(\eta_1\eta_2\eta_3) = \frac{\partial f}{\partial z_1}b_1\eta_2\eta_3 + \frac{\partial f}{\partial z_2}b_1\eta_3\eta_1 + \frac{\partial f}{\partial z_3}b_1\eta_1\eta_2$.

Les matrices de $d_{\tilde{T}}$ sont alors données par

$$\begin{aligned}Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(d_{\tilde{T}}^{(1)}) &= \begin{pmatrix} \partial_1 f & \partial_2 f & \partial_3 f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, Mat_{\mathcal{B}_{2p}, \mathcal{B}_{2p+1}}(d_{\tilde{T}}^{(2p)}) &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 f & 0 & -\partial_3 f \\ 0 & -\partial_1 f & \partial_3 f & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_2 f & \partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, Mat_{\mathcal{B}_{2p+1}, \mathcal{B}_{2p+2}}(d_{\tilde{T}}^{(2p+1)}) &= \begin{pmatrix} \partial_1 f & \partial_2 f & \partial_3 f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_3 f \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & \partial_2 f \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

• Nous en déduisons que

$$H^0 = A,$$

$$H^1 = \{g_1\eta_1 + g_2\eta_2 + g_3\eta_3 \mid (g_1, g_2, g_3) \in A^3 \text{ et } g_1\partial_1 f + g_2\partial_2 f + g_3\partial_3 f = 0\}$$

$$\simeq \left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 \mid \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{\{g_0 b_1 + g_3 \eta_1 \eta_2 + g_1 \eta_2 \eta_3 + g_2 \eta_3 \eta_1 / (g_0, g_1, g_2, g_3) \in A^4 \text{ et } g_3 \partial_2 f - g_2 \partial_3 f = g_1 \partial_3 f - g_3 \partial_1 f = g_2 \partial_1 f - g_1 \partial_2 f = 0\}}{\{(g_1 \partial_1 f + g_2 \partial_2 f + g_3 \partial_3 f) b_1 / (g_1, g_2, g_3) \in A^3\}} \\
&\simeq \left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^4 \mid \nabla f \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g} \cdot \nabla f \\ \mathbf{0}_{3,1} \end{pmatrix} \mid \mathbf{g} \in A^3 \right\} \\
&\simeq \frac{A}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle_A} \oplus \{ \mathbf{g} \in A^3 \mid \nabla f \wedge \mathbf{g} = 0 \}.
\end{aligned}$$

Pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}
H^{2p} &= \frac{\left\{ g_0 b_1^p + g_3 b_1^{p-1} \eta_1 \eta_2 + g_1 b_1^{p-1} \eta_2 \eta_3 + g_2 b_1^{p-1} \eta_3 \eta_1 \mid (g_0, g_1, g_2, g_3) \in A^4 \text{ et } g_3 \partial_2 f - g_2 \partial_3 f = g_1 \partial_3 f - g_3 \partial_1 f = g_2 \partial_1 f - g_1 \partial_2 f = 0 \right\}}{\{(g_1 \partial_1 f + g_2 \partial_2 f + g_3 \partial_3 f) b_1^p + g_0 (\partial_3 f b_1^{p-1} \eta_1 \eta_2 + \partial_1 f b_1^{p-1} \eta_2 \eta_3 + \partial_2 f b_1^{p-1} \eta_3 \eta_1) / (g_0, g_1, g_2, g_3) \in A^3\}} \\
&\simeq \left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^4 \mid \nabla f \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g} \cdot \nabla f \\ g_0 \partial_1 f \\ g_0 \partial_2 f \\ g_0 \partial_3 f \end{pmatrix} \mid \mathbf{g} \in A^3 \text{ et } g_0 \in A \right\} \\
&\simeq \frac{A}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle_A} \oplus \frac{\{ \mathbf{g} \in A^3 \mid \nabla f \wedge \mathbf{g} = 0 \}}{\{ g \nabla f \mid g \in A \}}.
\end{aligned}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
H^{2p+1} &= \frac{\left\{ g_1 b_1^p \eta_1 + g_2 b_1^p \eta_2 + g_3 b_1^p \eta_3 + g_0 b_1^{p-1} \eta_1 \eta_2 \eta_3 \mid (g_0, g_1, g_2, g_3) \in A^4 \text{ et } g_1 \partial_1 f + g_2 \partial_2 f + g_3 \partial_3 f = 0 \right. \\
&\quad \left. g_0 \partial_3 f = g_0 \partial_1 f = g_0 \partial_2 f = 0 \right\}}{\{(g_3 \partial_2 f - g_2 \partial_3 f) b_1^p \eta_1 + (g_1 \partial_3 f - g_3 \partial_1 f) b_1^p \eta_2 + (g_2 \partial_1 f - g_1 \partial_2 f) b_1^p \eta_3 / (g_1, g_2, g_3) \in A^3\}} \\
&\simeq \left\{ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_0 \end{pmatrix} \in A^4 \mid \nabla f \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0 \right. \\
&\quad \left. g_0 \partial_3 f = g_0 \partial_1 f = g_0 \partial_2 f = 0 \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} \nabla f \wedge \mathbf{g} \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mathbf{g} \in A^3 \right\} \\
&\simeq \frac{\{ \mathbf{g} \in A^3 \mid \nabla f \cdot \mathbf{g} = 0 \}}{\{ \nabla f \wedge \mathbf{g} \mid \mathbf{g} \in A^3 \}} \oplus \{ g \in A \mid g \partial_3 f = g \partial_1 f = g \partial_2 f = 0 \}.
\end{aligned}$$

Le paragraphe suivant explicite ces différents espaces.

2.4.3 Calculs explicites dans le cas particulier où f a des variables séparées

Dans ce paragraphe, on considère le polynôme $f = a_1 z_1^i + a_2 z_2^j + a_3 z_3^k$, avec $2 \leq i \leq j \leq k$ et $a_j \in \mathbb{C}^*$.

Ses dérivées partielles sont $\partial_1 f = i a_1 z_1^{i-1}$, $\partial_2 f = j a_2 z_2^{j-1}$ et $\partial_3 f = k a_3 z_3^{k-1}$.

• Nous avons déjà

$$H^0 = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] / \langle a_1 z_1^i + a_2 z_2^j + a_3 z_3^k \rangle.$$

• De plus, comme f est quasi-homogène, la Formule d'Euler donne $\frac{1}{i} z_1 \partial_1 f + \frac{1}{j} z_2 \partial_2 f + \frac{1}{k} z_3 \partial_3 f = f$.

Ainsi on a l'inclusion $\langle f \rangle \subset \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle$, donc

$$\frac{A}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle} \simeq Vect(z_1^p z_2^q z_3^r / p \in \llbracket 0, i-2 \rrbracket, q \in \llbracket 0, j-2 \rrbracket, r \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket).$$

Enfin, comme $\partial_1 f$ et f sont premiers entre eux, si $g \in A$ vérifie $g\partial_1 f = 0 \pmod{\langle f \rangle}$, alors $g \in \langle f \rangle$, i. e. g est nul dans A .

- Nous déterminons maintenant l'ensemble $\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \right\}$.

On a $\langle f, \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = \langle a_1 z_1^i + a_2 z_2^j + a_3 z_3^k, z_1^{i-1}, z_2^{j-1} \rangle = \langle z_1^{i-1}, z_2^{j-1}, z_3^k \rangle$. Donc les seuls monômes qui ne sont pas dans cet idéal sont les éléments $z_1^p z_2^q z_3^r$ avec $p \in \llbracket 0, i-2 \rrbracket$, $q \in \llbracket 0, j-2 \rrbracket$, et $r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$.

Ainsi tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ peut s'écrire sous la forme

$$P = \alpha f + \beta \partial_1 f + \gamma \partial_2 f + \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=0 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r.$$

Les polynômes $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ tels que $P\partial_3 f \in \langle f, \partial_1 f, \partial_2 f \rangle$ sont donc les suivants

$$P = \alpha f + \beta \partial_1 f + \gamma \partial_2 f + \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r.$$

Ainsi nous avons calculé $Ann_{\langle f, \partial_1 f, \partial_2 f \rangle}(\partial_3 f)$.

L'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \pmod{\langle f \rangle} \tag{2.14}$$

entraîne $g_3 \in Ann_{\langle f, \partial_1 f, \partial_2 f \rangle}(\partial_3 f)$, i. e.

$$g_3 = \alpha f + \beta \partial_1 f + \gamma \partial_2 f + \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r, \tag{2.15}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^3$.

D'où

$$g_2 \partial_2 f + \gamma \partial_2 f \partial_3 f + \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r \partial_3 f \in \langle f, \partial_1 f \rangle. \tag{2.16}$$

C'est pourquoi, d'après la Formule d'Euler,

$$\partial_2 f \left(g_2 + \gamma \partial_3 f - \frac{k}{j} \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^{q+1} z_3^{r-1} \right) \in \langle f, \partial_1 f \rangle. \tag{2.17}$$

Puisque $\text{Ann}_{\langle f, \partial_1 f \rangle}(\partial_2 f) = \langle f, \partial_1 f \rangle$, cette équation est équivalente à

$$g_2 = -\gamma \partial_3 f + \frac{k}{j} \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^{q+1} z_3^{r-1} + \delta f + \varepsilon \partial_1 f,$$

avec $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Il s'ensuit que

$$g_1 \partial_1 f + \beta \partial_1 f \partial_3 f + \varepsilon \partial_1 f \partial_2 f + \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r \partial_3 f + \frac{k}{j} \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^{q+1} z_3^{r-1} \partial_2 f \in \langle f \rangle \quad (2.18)$$

et, d'après la Formule d'Euler,

$$\partial_1 f \left(g_1 + \beta \partial_3 f + \varepsilon \partial_2 f - \frac{k}{i} \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^{p+1} z_2^q z_3^{r-1} \right) \in \langle f \rangle, \quad (2.19)$$

$$\text{i. e. } g_1 = -\beta \partial_3 f - \varepsilon \partial_2 f + \frac{k}{i} \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^{p+1} z_2^q z_3^{r-1} + \eta f, \quad (2.20)$$

avec $\eta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Enfin

$$\{\mathbf{g} \in A^3 \mid \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\} = \left\{ \nabla f \wedge \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta \\ -\varepsilon \end{pmatrix} + \sum_{\substack{p=0 \dots i-2 \\ q=0 \dots j-2 \\ r=1 \dots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^{r-1} \begin{pmatrix} \frac{k}{j} z_1 \\ \frac{k}{j} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} (\beta, \gamma, \varepsilon) \in A^3 \\ \text{et } a_{pqr} \in \mathbb{C} \end{array} \right\}.$$

Nous en déduisons immédiatement les espaces de cohomologie de degrés impairs :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall p \geq 1, H^{2p+1} & \simeq \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \\ H^1 & \simeq \nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \end{array}}$$

- Il reste à déterminer l'ensemble $\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 \mid \nabla f \wedge \mathbf{g} = 0 \right\}$.

Soit $\mathbf{g} \in A^3$ tel que $\nabla f \wedge \mathbf{g} = 0$. Cela signifie que, modulo $\langle f \rangle$, \mathbf{g} vérifie le système

$$\begin{cases} \partial_2 f g_3 - \partial_3 f g_2 & = 0 \\ \partial_3 f g_1 - \partial_1 f g_3 & = 0 \\ \partial_1 f g_2 - \partial_2 f g_1 & = 0 \end{cases}.$$

La première équation donne, modulo $\langle f, \partial_2 f \rangle$, $\partial_3 f g_2 = 0$.

Or $\text{Ann}_{\langle f, \partial_2 f \rangle}(\partial_3 f) = \langle f, \partial_2 f \rangle$, donc $g_2 = \alpha f + \beta \partial_2 f$. D'où

$$\partial_2 f(g_3 - \beta \partial_3 f) = 0 \pmod{\langle f \rangle},$$

i. e. $g_3 = \gamma f + \beta \partial_3 f$.

Finalement, nous obtenons

$$\partial_3 f(g_1 - \beta \partial_1 f) = 0 \pmod{\langle f \rangle},$$

i. e. $g_1 = \delta f + \beta \partial_1 f$.

Ainsi, $\{\mathbf{g} \in A^3 \mid \nabla f \wedge \mathbf{g} = 0\} = \{\beta \nabla f \mid \beta \in A\}$.

On en déduit les espaces de cohomologie de degrés pairs (pour la somme directe, nous utilisons le même argument que dans le Paragraphe 2.3.3) :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 2, H^{2p} &\simeq A / \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^{i-1}, z_2^{j-1}, z_3^{k-1} \rangle \\ &\simeq \text{Vect}(z_1^p z_2^q z_3^r \mid p \in \llbracket 0, i-2 \rrbracket, q \in \llbracket 0, j-2 \rrbracket, r \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket) \\ &\simeq \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \\ H^2 &\simeq \{\beta \nabla f \mid \beta \in A\} \oplus \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \\ &\simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle a_1 z_1^i + a_2 z_2^j + a_3 z_3^k \rangle \oplus \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \end{aligned}$$

Remarque 2.4.5

On a aussi

$$\nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^3 \simeq (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^3 / \{\mathbf{g} \mid \nabla f \wedge \mathbf{g} = 0\} = (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^3 / (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle) \nabla f.$$

De plus, l'application

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^2 &\rightarrow \nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^3 \\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &\mapsto \nabla f \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est injective, donc $\nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^3$ est de dimension infinie.

Remarque 2.4.6

En particulier, nous obtenons la cohomologie dans les cas où $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^k$, $f = z_1^2 + z_2^3 + z_3^4$ et $f = z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$. Ces cas correspondent respectivement aux types A_k , E_6 et E_8 des surfaces de Klein.

Le tableau suivant résume les résultats de ces trois cas particuliers :

	H^0	H^1	H^2	$H^p, p \geq 3$
A_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^2 + z_3^k \rangle$	$\nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^{k-1}$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^2 + z_3^k \rangle \oplus \mathbb{C}^{k-1}$	\mathbb{C}^{k-1}
E_6	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 \rangle$	$\nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^6$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 \rangle \oplus \mathbb{C}^6$	\mathbb{C}^6
E_8	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 \rangle$	$\nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^8$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 \rangle \oplus \mathbb{C}^8$	\mathbb{C}^8

Les cas où $f = z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1}$ et $f = z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3$, i. e. respectivement D_k et E_7 sont étudiés dans le paragraphe suivant.

2.4.4 Calculs explicites pour D_k et E_7

Cas de $f = z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1}$, i. e. D_k

Dans ce paragraphe, on considère le polynôme $f = z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1}$, avec $k \geq 2$. Ses dérivées partielles sont $\partial_1 f = 2z_1$, $\partial_2 f = 2z_2 z_3$ et $\partial_3 f = z_2^2 + (k+1)z_3^k$.

- On a déjà

$$H^0 = \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1} \rangle.$$

- En outre, puisque f est quasi-homogène, la Formule d'Euler donne

$$\frac{k+1}{2} z_1 \partial_1 f + \frac{k}{2} z_2 \partial_2 f + z_3 \partial_3 f = (k+1)f. \quad (2.21)$$

On a donc l'inclusion $\langle f \rangle \subset \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle$.

De plus, une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle$ est $[z_3^{k+1}, z_2 z_3, z_2^2 + (k+1)z_3^k, z_1]$, donc

$$\frac{A}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]}{\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle} \simeq Vect \left(z_2, 1, z_3, \dots, z_3^k \right).$$

Enfin, comme $\partial_1 f$ et f sont premiers entre eux, si $g \in A$ vérifie $g \partial_1 f = 0 \pmod{\langle f \rangle}$, alors $g \in \langle f \rangle$, i. e. g est nul dans A , donc $\{g \in A / g \partial_3 f = g \partial_1 f = g \partial_2 f = 0\} = 0$.

- Nous déterminons maintenant l'ensemble $\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \right\}$.

Une base de Gröbner de $\langle f, \partial_1 f, \partial_3 f \rangle$ est $[z_1, z_3^{k+1}, z_2^2 + (k+1)z_3^k]$, donc une base de $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f, \partial_1 f, \partial_3 f \rangle$ est $\{z_2^i z_3^j / i \in \{0, 1\}, j \in \llbracket 0, k \rrbracket\}$.

Les solutions de l'équation $p \partial_2 f = 0$ dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f, \partial_1 f, \partial_3 f \rangle$ sont de la forme

$$p = a_{0,k} z_3^k + \sum_{j=0}^k a_{1,j} z_2 z_3^j,$$

où $a_{0,k}, a_{1,j} \in \mathbb{C}$ (voir le Paragraphe 2.3.4).

Soit $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3$ satisfaisant l'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f = 0 \pmod{\langle f \rangle}. \quad (2.22)$$

Alors on a

$$g_2 \partial_2 f = 0 \mod \langle f, \partial_1 f, \partial_3 f \rangle, \quad (2.23)$$

d'où

$$g_2 = \alpha f + \beta \partial_1 f + \gamma \partial_3 f + a z_3^k + \sum_{j=0}^k b_j z_2 z_3^j, \quad (2.24)$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^3$.

et

$$g_3 \partial_3 f + \gamma \partial_3 f \partial_2 f + a z_3^k \partial_2 f + \sum_{j=0}^k b_j z_2 z_3^j \partial_2 f \in \langle f, \partial_1 f \rangle. \quad (2.25)$$

Or d'après la Formule d'Euler (2.21) et l'égalité

$$z_3^{k+1} z_2 = \frac{-1}{k} \left(z_2 f - z_2 z_3 \partial_3 f - \frac{1}{2} z_2 z_1 \partial_1 f \right) = \frac{1}{k} z_2 z_3 \partial_3 f \mod \langle f, \partial_1 f \rangle, \quad (2.26)$$

l'Equation (2.25) devient

$$\partial_3 f \left(g_3 + \gamma \partial_2 f + \frac{2a}{k} z_2 z_3 - \sum_{j=0}^k b_j \frac{2}{k} z_3^{j+1} \right) \in \langle f, \partial_1 f \rangle. \quad (2.27)$$

Comme $\text{Ann}_{\langle f, \partial_1 f \rangle}(\partial_3 f) = \langle f, \partial_1 f \rangle$, cette équation est équivalente à

$$g_3 = -\gamma \partial_2 f - \frac{2a}{k} z_2 z_3 + \sum_{j=0}^k b_j \frac{2}{k} z_3^{j+1} + \delta f + \varepsilon \partial_1 f,$$

avec $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.

Nous trouvons

$$g_1 = -\beta \partial_2 f - \varepsilon \partial_3 f + \sum_{j=0}^k b_j \frac{k+1}{k} z_1 z_3^j - \frac{a}{k} z_2 z_1 + \eta f, \quad (2.28)$$

avec $\eta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.

Enfin, on a

$$\{\mathbf{g} \in A^3 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\} = \left\{ \nabla f \wedge \begin{pmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ -\beta \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^k b_j \begin{pmatrix} \frac{k+1}{k} z_1 z_3^j \\ z_2 z_3^j \\ \frac{2}{k} z_3^{j+1} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} z_2 z_1 \\ z_3^k \\ -\frac{2}{k} z_2 z_3 \end{pmatrix} \middle/ \begin{matrix} (\beta, \gamma, \varepsilon) \in A^3 \\ \text{et } a, b_j \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\},$$

et les espaces de cohomologie de degrés impairs (pour la somme directe, nous utilisons le même argument que dans le Paragraphe 2.3.3) :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall p \geq 1, H^{2p+1} &\simeq \mathbb{C}^{k+2} \\ H^1 &\simeq \nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^{k+2} \end{aligned}}$$

• Pour montrer que $\{\mathbf{g} \in A^3 / \nabla f \wedge \mathbf{g} = 0\} = \{f \mathbf{g} + \beta \nabla f / \mathbf{g} \in A^3, \beta \in A\}$, nous procédons

comme dans le cas des variables séparées.

Nous en déduisons les espaces de cohomologie de degrés pairs :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 2, H^{2p} &\simeq A / \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle \simeq \text{Vect}(z_2, 1, z_3, \dots, z_3^k) \simeq \mathbb{C}^{k+2} \\ H^2 &\simeq \{\beta \nabla f / \beta \in A\} \oplus \mathbb{C}^{k+2} \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1} \rangle \oplus \mathbb{C}^{k+2} \end{aligned}$$

Cas de $f = z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3$, i. e. E_7

Ici on a $\partial_1 f = 2z_1$, $\partial_2 f = 3z_2^2 + z_3^3$ et $\partial_3 f = 3z_2 z_3^2$.

La démonstration est semblable à celle des cas précédents.

Une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle$ est $[z_3^5, z_2 z_3^2, 3z_2^2 + z_3^3, z_1]$.

De même, une base de Gröbner de $\langle f, \partial_1 f, \partial_2 f \rangle$ est $[z_3^6, z_2 z_3^3, 3z_2^2 + z_3^3, z_1]$.

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 1, H^{2p+1} &\simeq \mathbb{C}^7 \\ H^1 &\simeq \nabla f \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^0 &= \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 \rangle \\ \forall p \geq 2, H^{2p} &\simeq A / \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle \simeq \text{Vect}(z_2, z_2^2, 1, z_3, z_3^2, z_3^3, z_3^4) \simeq \mathbb{C}^7 \\ H^2 &\simeq \{\beta \nabla f / \beta \in A\} \oplus \mathbb{C}^7 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 \rangle \oplus \mathbb{C}^7 \end{aligned}$$

Remarque 2.4.7

Dans tous les cas précédemment étudiés, il existe un triplet (i, j, k) tel que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, et tel que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle &\rightarrow \{g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f, \partial_j f, \partial_k f \rangle / g \partial_i f = 0\} \\ P \bmod \langle \partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f \rangle &\mapsto z_i P \bmod \langle f, \partial_j f, \partial_k f \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.4.5 Homologie

• L'étude est la même que pour la cohomologie de Hochschild, et nous procédons comme dans le Paragraphe 2.3.5.

Ici, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(0) &= A, \\ \tilde{\Omega}(-1) &= A\xi_1 \oplus A\xi_2 \oplus A\xi_3, \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \tilde{\Omega}(-2p) &= Aa_1^p \oplus Aa_1^{p-1}\xi_1\xi_2 \oplus Aa_1^{p-1}\xi_2\xi_3 \oplus Aa_1^{p-1}\xi_3\xi_1, \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \tilde{\Omega}(-2p-1) &= Aa_1^p\xi_1 \oplus Aa_1^p\xi_2 \oplus Aa_1^p\xi_3 \oplus Aa_1^{p-1}\xi_1\xi_2\xi_3. \end{aligned}$$

Cela définit les bases \mathcal{V}_p . La différentielle est $d_{\tilde{\Omega}} = (\xi_1 \partial_1 f + \xi_2 \partial_2 f + \xi_3 \partial_3 f) \frac{\partial}{\partial a_1}$.

En posant $Df := \begin{pmatrix} \partial_3 f & \partial_1 f & \partial_2 f \end{pmatrix}$, nous en déduisons les matrices

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{V}_{-2}, \mathcal{V}_{-1}} \left(d_{\tilde{\Omega}}^{(-2)} \right) &= \begin{pmatrix} \nabla f & \mathbf{0}_{3,3} \end{pmatrix}, \\ \forall p \geq 2, \text{Mat}_{\mathcal{V}_{-2p}, \mathcal{V}_{-2p+1}} \left(d_{\tilde{\Omega}}^{(-2p)} \right) &= \begin{pmatrix} \nabla f & \mathbf{0}_{3,3} \\ 0 & (p-1)Df \end{pmatrix}, \\ \forall p \geq 1, \text{Mat}_{\mathcal{V}_{-2p-1}, \mathcal{V}_{-2p}} \left(d_{\tilde{\Omega}}^{(-2p-1)} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p\partial_2 f & p\partial_1 f & 0 & 0 \\ 0 & -p\partial_3 f & p\partial_2 f & 0 \\ p\partial_3 f & 0 & -p\partial_1 f & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

• Les espaces de cohomologie s'écrivent :

$$L^0 = A,$$

$$L^{-1} = \frac{A^3}{\{g\nabla f / g \in A\}},$$

$$L^{-2} = \{g \in A / g\partial_1 f = g\partial_2 f = g\partial_3 f = 0\} \oplus \frac{A^3}{\{\nabla f \wedge \mathbf{g} / \mathbf{g} \in A^3\}}.$$

Pour $p \geq 2$,

$$L^{-2p} \simeq \{g \in A / g\partial_1 f = g\partial_2 f = g\partial_3 f = 0\} \oplus \frac{\{\mathbf{g} \in A^3 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\}}{\{\nabla f \wedge \mathbf{g} / \mathbf{g} \in A^3\}}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$L^{-2p-1} \simeq \frac{\{\mathbf{g} \in A^3 / \nabla f \wedge \mathbf{g} = 0\}}{\{g\nabla f / g \in A\}} \oplus \frac{A}{\langle \nabla f \rangle_A}.$$

• A partir de maintenant, nous supposons que soit f a des variables séparées, soit f est du type D_k ou E_7 . Alors on a $\{g \in A / g\partial_1 f = g\partial_2 f = g\partial_3 f = 0\} = \{0\}$, et d'après la Formule d'Euler, $\frac{A}{\langle \nabla f \rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[\mathbf{z}]}{\langle \nabla f \rangle}$.

A l'exception de $A^3 / \{\nabla f \wedge \mathbf{g} / \mathbf{g} \in A^3\}$, les espaces cités ci-dessus ont été calculés dans les Paragraphes 2.4.4 et 2.4.3, en particulier $A^3 / A\nabla f \simeq \nabla f \wedge A^3$ (voir la Remarque 2.4.6).

Or $\{\nabla f \wedge \mathbf{g} / \mathbf{g} \in A^3\} \subset \{\mathbf{g} \in A^3 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\}$, donc

$$\dim(A^3 / \{\nabla f \wedge \mathbf{g} / \mathbf{g} \in A^3\}) \geq \dim(A^3 / \{\mathbf{g} \in A^3 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\}),$$

et $A^3 / \{\mathbf{g} \in A^3 / \mathbf{g} \cdot \nabla f = 0\} \simeq \{\mathbf{g} \cdot \nabla f / \mathbf{g} \in A^3\}$. Puisque l'application

$$g \in A \mapsto \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla f \in \{\mathbf{g} \cdot \nabla f / \mathbf{g} \in A^3\}$$

est injective, $\boxed{A^3 / \{\nabla f \wedge \mathbf{g} / \mathbf{g} \in A^3\} \text{ est de dimension infinie}}$.

• Nous résumons dans le tableau suivant les résultats pour l'homologie de Hochschild dans les différents cas.

Type	$HH_0 = A$	HH_1	HH_2	$HH_p, p \geq 3$
A_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^2 + z_3^k \rangle$	$\nabla f \wedge A^3$	$A^3 / (\nabla f \wedge A^3)$	\mathbb{C}^{k-1}
D_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1} \rangle$	$\nabla f \wedge A^3$	$A^3 / (\nabla f \wedge A^3)$	\mathbb{C}^{k+2}
E_6	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 \rangle$	$\nabla f \wedge A^3$	$A^3 / (\nabla f \wedge A^3)$	\mathbb{C}^6
E_7	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 \rangle$	$\nabla f \wedge A^3$	$A^3 / (\nabla f \wedge A^3)$	\mathbb{C}^7
E_8	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 \rangle$	$\nabla f \wedge A^3$	$A^3 / (\nabla f \wedge A^3)$	\mathbb{C}^8

2.5 Le cas de la dimension 4

Nous nous intéressons dans le dernier paragraphe de ce chapitre à la situation suivante : nous prenons $R := \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4] = \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $A := \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f_1, f_2 \rangle$ où $(f_1, f_2) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Nous supposons qu'il y a intersection complète, i. e. la dimension de l'ensemble des solutions du système $\{f_1(\mathbf{z}) = f_2(\mathbf{z}) = 0\}$ est 2, et que (f_1, f_2) est à singularité isolée en l'origine, i. e. par définition $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f_1, f_2, \nabla f_1 \wedge \nabla f_2 \rangle$ est de dimension finie, cette dimension étant appelée le nombre de Milnor de la singularité².

On peut définir sur R un crochet de Poisson en posant

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} = & (\partial_3 f_1 \partial_2 f_2 - \partial_2 f_1 - \partial_3 f_2) \partial_1 \wedge \partial_4 + (\partial_4 f_1 \partial_3 f_2 - \partial_3 f_1 - \partial_4 f_2) \partial_1 \wedge \partial_2 \\ & + (\partial_1 f_1 \partial_3 f_2 - \partial_3 f_1 - \partial_1 f_2) \partial_2 \wedge \partial_4 + (\partial_4 f_1 \partial_1 f_2 - \partial_1 f_1 - \partial_4 f_2) \partial_2 \wedge \partial_3 \\ & + (\partial_2 f_1 \partial_1 f_2 - \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2) \partial_3 \wedge \partial_4 + (\partial_4 f_1 \partial_2 f_2 - \partial_2 f_1 - \partial_4 f_2) \partial_3 \wedge \partial_1, \end{aligned}$$

i. e.

$$\{\cdot, \cdot\} = \iota_{\nabla f_1 \wedge \nabla f_2} (\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3 \wedge \partial_4).$$

En particulier, quand on prend les polynômes

$$\begin{aligned} f_1 &= (1+a)z_1^2 + z_2^2 + (1-b)z_3^2 + z_4^2, \\ f_2 &= (\tfrac{1}{2}+a)z_1^2 + \tfrac{1}{2}z_2^2 + (\tfrac{1}{2}-b)z_3^2 + z_4^2, \end{aligned}$$

on obtient la structure de Poisson quadratique introduite par Sklyanin dans [Skl82].

A. Tihami s'est intéressé aux structures de Poisson quadratiques sur $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ et en particulier à celle de Sklyanin (voir [Tih93], [REGT90]); il a recherché quelles structures de Poisson quadratiques admettent des déformations. En introduisant une variante de la cohomologie de Poisson (cohomologie de Poisson de poids inférieur ou égal à k , pour $k \in \mathbb{N}^*$), et en effectuant des calculs formels en Turbo-Pascal, il a pu classifier certaines structures de Poisson quadratiques.

Récemment, S. R. Tagne Pelap a étudié dans les articles [TP08] et [TP09] le cas où

$$\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{1}{2}((1+J_1)z_1^2 + (1+J_2)z_2^2 + (1+J_3)z_3^2 + z_4^2), \\ f_2 &= \tfrac{1}{2}(J_1z_1^2 + J_2z_2^2 + J_3z_3^2 + z_4^2), \end{aligned}$$

2. L'idéal $\langle f_1, f_2, \nabla f_1 \wedge \nabla f_2 \rangle$ est bien sûr l'idéal engendré par f_1, f_2 et les 6 composantes du produit vectoriel $\nabla f_1 \wedge \nabla f_2$.

avec $J_1 + J_2 + J_3 = 0$. Il a alors calculé l'homologie et la cohomologie de Poisson ainsi que l'homologie et la cohomologie de Hochschild de l'algèbre A .

Ici, le problème est de calculer la cohomologie de Hochschild de $A = \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f_1, f_2 \rangle$ dans le cas d'une intersection complète, en utilisant la même méthode que pour les surfaces de Klein. Nous présentons les différents espaces de cohomologie, mais la résolution des équations obtenues reste un problème ouvert !

2.5.1 Description des espaces de cohomologie

- Les différents espaces du complexe sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(0) &= A \\
\tilde{T}(1) &= A\eta_1 \oplus A\eta_2 \oplus A\eta_3 \oplus A\eta_4 \\
\tilde{T}(2) &= Ab_1 \oplus Ab_2 \oplus A\eta_1\eta_2 \oplus A\eta_1\eta_3 \oplus A\eta_1\eta_4 \oplus A\eta_2\eta_3 \oplus A\eta_2\eta_4 \oplus A\eta_3\eta_4 \\
\tilde{T}(3) &= Ab_1\eta_1 \oplus Ab_1\eta_2 \oplus Ab_1\eta_3 \oplus Ab_1\eta_4 \oplus Ab_2\eta_1 \oplus Ab_2\eta_2 \oplus Ab_2\eta_3 \oplus Ab_2\eta_4 \\
&\quad \oplus A\eta_1\eta_2\eta_3 \oplus A\eta_1\eta_2\eta_4 \oplus A\eta_1\eta_3\eta_4 \oplus A\eta_2\eta_3\eta_4 \\
\tilde{T}(4) &= Ab_1^2 \oplus Ab_1b_2 \oplus Ab_2^2 \\
&\quad \oplus Ab_1\eta_1\eta_2 \oplus Ab_1\eta_1\eta_3 \oplus Ab_1\eta_1\eta_4 \oplus Ab_1\eta_2\eta_3 \oplus Ab_1\eta_2\eta_4 \oplus Ab_1\eta_3\eta_4 \\
&\quad \oplus Ab_2\eta_1\eta_2 \oplus Ab_2\eta_1\eta_3 \oplus Ab_2\eta_1\eta_4 \oplus Ab_2\eta_2\eta_3 \oplus Ab_2\eta_2\eta_4 \oplus Ab_2\eta_3\eta_4 \\
&\quad \oplus A\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4.
\end{aligned}$$

On a donc, pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(2p) &= \bigoplus_{i+j=p} Ab_1^i b_2^j \\
&\oplus \bigoplus_{i+j=p-1} \left(Ab_1^i b_2^j \eta_1 \eta_2 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_1 \eta_3 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_1 \eta_4 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_2 \eta_3 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_2 \eta_4 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_3 \eta_4 \right) \\
&\quad \oplus \bigoplus_{i+j=p-2} Ab_1^i b_2^j \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4
\end{aligned}$$

et pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(2p+1) &= \bigoplus_{i+j=p} \left(Ab_1^i b_2^j \eta_1 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_2 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_3 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_4 \right) \\
&\quad \oplus \bigoplus_{i+j=p-1} \left(Ab_1^i b_2^j \eta_1 \eta_2 \eta_3 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_1 \eta_2 \eta_4 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_1 \eta_3 \eta_4 \oplus Ab_1^i b_2^j \eta_2 \eta_3 \eta_4 \right)
\end{aligned}$$

On constate que la dimension sur A des espaces $\tilde{T}(j)$ est strictement croissante, alors que dans les cas précédents, elle était stationnaire.

En effet, pour $p \geq 2$, $\dim_A \tilde{T}(2p) = (p+1) + 6p + (p-1) = 8p$,

et pour $p \geq 1$, $\dim_A \tilde{T}(2p+1) = 4(p+1) + 4p = 8p + 4$.

- On calcule maintenant les matrices des premières applications $d_{\tilde{T}}^{(j)}$:

$$Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(d_{\tilde{T}}^{(1)}) = \begin{pmatrix} \partial_{z_1} f_1 & \partial_{z_2} f_1 & \partial_{z_3} f_1 & \partial_{z_4} f_1 \\ \partial_{z_1} f_2 & \partial_{z_2} f_2 & \partial_{z_3} f_2 & \partial_{z_4} f_2 \\ \mathbf{0}_{6,1} & \mathbf{0}_{6,1} & \mathbf{0}_{6,1} & \mathbf{0}_{6,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t \nabla f_1 \\ {}^t \nabla f_2 \\ \mathbf{0}_{6,4} \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(d_{\tilde{T}}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_{z_2} f_1 & \partial_{z_3} f_1 & \partial_{z_4} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{z_1} f_1 & 0 & 0 & \partial_{z_3} f_1 & \partial_{z_4} f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_1} f_1 & 0 & -\partial_{z_2} f_1 & 0 & \partial_{z_4} f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_1} f_1 & 0 & -\partial_{z_2} f_1 & -\partial_{z_3} f_1 \\ \hline 0 & 0 & \partial_{z_2} f_2 & \partial_{z_3} f_2 & \partial_{z_4} f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{z_1} f_2 & 0 & 0 & \partial_{z_3} f_2 & \partial_{z_4} f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_1} f_2 & 0 & -\partial_{z_2} f_2 & 0 & \partial_{z_4} f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_1} f_2 & 0 & -\partial_{z_2} f_2 & -\partial_{z_3} f_2 \\ \hline \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,1} \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{4,2} & L(f_1) \\ \mathbf{0}_{4,2} & L(f_2) \\ \mathbf{0}_{4,2} & \mathbf{0}_{4,6} \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4}(d_{\tilde{T}}^{(3)}) =$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{z_1} f_1 & \partial_{z_2} f_1 & \partial_{z_3} f_1 & \partial_{z_4} f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{z_1} f_2 & \partial_{z_2} f_2 & \partial_{z_3} f_2 & \partial_{z_4} f_2 & \partial_{z_1} f_1 & \partial_{z_2} f_1 & \partial_{z_3} f_1 & \partial_{z_4} f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_2 & \partial_{z_2} f_2 & \partial_{z_3} f_2 & \partial_{z_4} f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_3} f_1 & \partial_{z_4} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_2} f_1 & 0 & \partial_{z_4} f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_2} f_1 & -\partial_{z_3} f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_1 & 0 & 0 & \partial_{z_4} f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_1 & 0 & -\partial_{z_3} f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_1 & \partial_{z_2} f_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_3} f_2 & \partial_{z_4} f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_2} f_2 & 0 & \partial_{z_4} f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_{z_2} f_2 & -\partial_{z_3} f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_2 & 0 & 0 & \partial_{z_4} f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_2 & 0 & -\partial_{z_3} f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_2 & \partial_{z_2} f_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} {}^t \nabla f_1 & \mathbf{0}_{1,4} & \mathbf{0}_{1,4} \\ {}^t \nabla f_2 & {}^t \nabla f_1 & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{1,4} & {}^t \nabla f_2 & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{6,4} & \mathbf{0}_{6,4} & K(f_1) \\ \mathbf{0}_{6,4} & \mathbf{0}_{6,4} & K(f_2) \\ \mathbf{0}_{1,4} & \mathbf{0}_{1,4} & \mathbf{0}_{1,4} \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5}(d_{\tilde{T}}^{(4)}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{0}_{4,3} & L(f_1) & \mathbf{0}_{4,6} & \mathbf{0}_{4,1} \\ \hline \mathbf{0}_{4,3} & L(f_2) & L(f_1) & \mathbf{0}_{4,1} \\ \hline \mathbf{0}_{4,3} & \mathbf{0}_{4,6} & L(f_2) & \mathbf{0}_{4,1} \\ \hline \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & \partial_{z_4} f_1 \\ \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & -\partial_{z_3} f_1 \\ \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & \partial_{z_2} f_1 \\ \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & -\partial_{z_1} f_1 \\ \hline \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & \partial_{z_4} f_2 \\ \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & -\partial_{z_3} f_2 \\ \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & \partial_{z_2} f_2 \\ \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{0}_{1,6} & -\partial_{z_1} f_2 \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{0}_{4,3} & L(f_1) & \mathbf{0}_{4,6} & \mathbf{0}_{4,1} \\ \mathbf{0}_{4,3} & L(f_2) & L(f_1) & \mathbf{0}_{4,1} \\ \mathbf{0}_{4,3} & \mathbf{0}_{4,6} & L(f_2) & \mathbf{0}_{4,1} \\ \mathbf{0}_{4,3} & \mathbf{0}_{4,6} & \mathbf{0}_{4,6} & D(f_1) \\ \mathbf{0}_{4,3} & \mathbf{0}_{4,6} & \mathbf{0}_{4,6} & D(f_2) \end{array} \right).$$

Finalement, dans le cas général, on trouve :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 2, \quad Mat_{\mathcal{B}_{2p}, \mathcal{B}_{2p+1}}(d_{\tilde{T}}^{(2p)}) &= \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \mathbf{0}_{4,p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{4,p+1} \end{array} & \begin{array}{c} L(f_1) \\ L(f_2) \quad \ddots \\ \ddots \quad L(f_1) \\ L(f_2) \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \mathbf{0}_{4,p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{4,p+1} \end{array} & & \begin{array}{c} D(f_1) \\ D(f_2) \quad \ddots \\ \ddots \quad D(f_1) \\ D(f_2) \end{array} \end{array} \right) \\ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \updownarrow \\ p \text{ blocs} \\ \text{sur ch. diag} \end{array} \\ \begin{array}{c} \updownarrow \\ p-1 \text{ blocs} \\ \text{sur ch. diag} \end{array} \end{array} \\ \\ \forall p \geq 1, \quad Mat_{\mathcal{B}_{2p+1}, \mathcal{B}_{2p+2}}(d_{\tilde{T}}^{(2p+1)}) &= \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} {}^t\nabla f_1 \\ {}^t\nabla f_2 \quad \ddots \\ \ddots \quad {}^t\nabla f_1 \\ {}^t\nabla f_2 \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{c} K(f_1) \\ K(f_2) \quad \ddots \\ \ddots \quad K(f_1) \\ K(f_2) \end{array} \end{array} \right) \\ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \updownarrow \\ p+1 \text{ blocs} \\ \text{sur ch. diag} \end{array} \\ \begin{array}{c} \updownarrow \\ p \text{ blocs} \\ \text{sur ch. diag} \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

- On en déduit une expression des espaces de cohomologie :

$$H^0 = A,$$

$$H^1 \simeq \left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \in A^4 \mid \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = \mathbf{g} \cdot \nabla f_2 = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned}
H^2 &\simeq \frac{\left\{ \left(\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}} \right) / \mathbf{g} \in A^2 \text{ et } \mathbf{h} \in A^6 \text{ et } L(f_1)\mathbf{h} = L(f_2)\mathbf{h} = 0 \right\}}{\left\{ \left(\frac{\mathbf{g} \cdot \nabla f_1}{\mathbf{g} \cdot \nabla f_2} \right) / \mathbf{g} \in A^4 \right\}} \\
&\simeq \frac{A}{\langle \nabla f_1 \rangle_A} \oplus \frac{A}{\langle \nabla f_2 \rangle_A} \oplus \{ \mathbf{h} \in A^6 / L(f_1)\mathbf{h} = L(f_2)\mathbf{h} = 0 \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^3 &\simeq \frac{\left\{ \left(\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}} \right) / \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = \mathbf{g} \cdot \nabla f_2 + \mathbf{h} \cdot \nabla f_1 = \mathbf{h} \cdot \nabla f_2 = 0 \text{ et } K(f_1)\mathbf{k} = K(f_2)\mathbf{k} = 0 \right\}}{\left\{ \left(\frac{L(f_1)\mathbf{h}}{L(f_2)\mathbf{h}} \right) / \mathbf{h} \in A^6 \right\}} \\
&\simeq \frac{\left\{ \left(\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}} \right) \in A^{4+4} / \begin{array}{l} \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = \mathbf{g} \cdot \nabla f_2 + \mathbf{h} \cdot \nabla f_1 \\ \mathbf{h} \cdot \nabla f_2 = 0 \end{array} \right\}}{\left\{ \left(\frac{L(f_1)\mathbf{h}}{L(f_2)\mathbf{h}} \right) / \mathbf{h} \in A^6 \right\}} \oplus \left\{ \mathbf{k} \in A^4 / \begin{array}{l} K(f_1)\mathbf{k} \\ = K(f_2)\mathbf{k} = 0 \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^4 &\simeq \frac{\left\{ \left(\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}} \right) \in A^{3+6+6+1} / \begin{array}{l} L(f_1)\mathbf{h} = L(f_2)\mathbf{h} + L(f_1)\mathbf{k} = L(f_2)\mathbf{k} = 0 \\ \text{et } D(f_1)l = D(f_2)l = 0 \end{array} \right\}}{\left\{ \left(\frac{\mathbf{g} \cdot \nabla f_1}{\mathbf{g} \cdot \nabla f_2 + \mathbf{h} \cdot \nabla f_1} \right) / (\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k}) \in (A^4)^3 \right\}} \\
&\simeq \frac{A^3}{\left\{ \left(\frac{\mathbf{g} \cdot \nabla f_1}{\mathbf{g} \cdot \nabla f_2 + \mathbf{h} \cdot \nabla f_1} \right) / (\mathbf{g}, \mathbf{h}) \in (A^4)^2 \right\}} \oplus \frac{\left\{ \left(\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{k}} \right) \in A^{6+6} / \begin{array}{l} L(f_1)\mathbf{h} \\ = L(f_2)\mathbf{h} + L(f_1)\mathbf{k} \\ = L(f_2)\mathbf{k} = 0 \end{array} \right\}}{\left\{ \left(\frac{K(f_1)\mathbf{k}}{K(f_2)\mathbf{k}} \right) / \mathbf{k} \in A^4 \right\}} \\
&\oplus \{ l \in A / D(f_1)l = D(f_2)l = 0 \},
\end{aligned}$$

et $\forall p \geq 2$,

$$H^{2p} \simeq \frac{\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}^p \\ \hline k_1 \\ \vdots \\ k_{p-1} \end{pmatrix} \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g}^1 \cdot \nabla f_1 \\ \mathbf{g}^1 \cdot \nabla f_2 + \mathbf{g}^2 \cdot \nabla f_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{p-1} \cdot \nabla f_2 + \mathbf{g}^p \cdot \nabla f_1 \\ \mathbf{g}^p \cdot \nabla f_2 \\ \hline K(f_1)\mathbf{h}^1 \\ K(f_2)\mathbf{h}^1 + K(f_1)\mathbf{h}^2 \\ \vdots \\ K(f_2)\mathbf{h}^{p-2} + K(f_1)\mathbf{h}^{p-1} \\ \hline K(f_2)\mathbf{h}^{p-1} \\ \mathbf{0}_{p-1,1} \end{pmatrix} \right\}} \quad \left/ \quad \begin{array}{l} \mathbf{g} \in A^{p+1}, \mathbf{h}^j \in A^6, k_j \in A \\ L(f_1)\mathbf{h}^1 = L(f_2)\mathbf{h}^1 + L(f_1)\mathbf{h}^2 = \dots = L(f_2)\mathbf{h}^{p-1} + L(f_1)\mathbf{h}^p = L(f_2)\mathbf{h}^p = 0 \\ D(f_1)k_1 = D(f_2)k_1 + D(f_1)k_2 = \dots = D(f_2)k_{p-2} + D(f_1)k_{p-1} = D(f_2)k_{p-1} = 0 \end{array} \right.$$

$\forall p \geq 1$,

$$H^{2p+1} \simeq \frac{\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{p+1} \\ \hline \mathbf{h}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}^p \end{pmatrix} \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} L(f_1)\mathbf{h}^1 \\ L(f_2)\mathbf{h}^1 + L(f_1)\mathbf{h}^2 \\ \vdots \\ L(f_2)\mathbf{h}^1 + L(f_1)\mathbf{h}^2 \\ \hline L(f_2)\mathbf{h}^p \\ D(f_1)k_1 \\ D(f_2)k_1 + D(f_1)k_2 \\ \vdots \\ D(f_2)k_{p-2} + D(f_1)k_{p-1} \\ \hline D(f_2)k_{p-1} \end{pmatrix} \right\}} \quad \left/ \quad \begin{array}{l} \mathbf{g}^j \in A^4, \mathbf{h}^j \in A^4 \\ \mathbf{g}^1 \cdot \nabla f_1 = \mathbf{g}^1 \cdot \nabla f_2 + \mathbf{g}^2 \cdot \nabla f_1 = \dots = \mathbf{g}^p \cdot \nabla f_2 + \mathbf{g}^{p+1} \cdot \nabla f_1 = \mathbf{g}^{p+1} \cdot \nabla f_2 = 0 \\ K(f_1)\mathbf{h}^1 = K(f_2)\mathbf{h}^1 + K(f_1)\mathbf{h}^2 = \dots = K(f_2)\mathbf{h}^{p-1} + K(f_1)\mathbf{h}^p = K(f_2)\mathbf{h}^p = 0 \end{array} \right.$$

Expliciter entièrement ces espaces demeure un problème ouvert. Il reste en effet à résoudre les équations qui apparaissent dans les quotients ci-dessus : la présence des *deux* ensembles d'inconnues (les $\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^{p+1}$ et les $\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^p$) constitue le principal obstacle à cette résolution. . .

CHAPITRE 3

Homologie de Poisson en degré 0 pour certaines algèbres d'invariants symplectiques

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , S et W son groupe de Weyl. Le groupe W agit de façon diagonale sur $V := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$ et sur $\mathbb{C}[V]$. Le but de ce chapitre est d'étudier l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[V]^W$ munie du crochet symplectique standard.

Nous commençons par donner des résultats généraux sur l'espace d'homologie de Poisson en degré 0, noté $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$, dans le cas où \mathfrak{g} est du type $B_n - C_n$ ou D_n , résultats qui vont dans le sens de la conjecture de J. Alev :

Conjecture 3.0.1 (*Alev*)

L'égalité $\dim HP_0(\mathbb{C}[V]^G) = \dim HH_0(A_n(\mathbb{C})^G)$, où $A_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Weyl, est vraie dans les deux cas suivants :

- $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$, \mathfrak{h} étant une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} de rang $n \in \mathbb{N}^*$, et G son groupe de Weyl.
- $V = (\mathbb{C}^2)^n$, G étant un produit en couronne $G = \Gamma \curvearrowright \mathfrak{S}_n = \Gamma^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, et Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$.

Nous focalisons ensuite notre intérêt sur les rangs 2 et 3 : nous calculons l'espace d'homologie de

Poisson en degré 0 dans le cas où \mathfrak{g} est du type B_2 (\mathfrak{so}_5), D_2 (\mathfrak{so}_4), puis B_3 (\mathfrak{so}_7), et $D_3 = A_3$ ($\mathfrak{so}_6 \simeq \mathfrak{sl}_4$), en utilisant une équation fonctionnelle introduite par Y. Berest, P. Etingof et V. Ginzburg. Nous retrouvons, par une méthode différente, le résultat établi par J. Alev et L. Foissy, selon lequel la dimension de $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$ est égale à 2 pour B_2 . Nous calculons ensuite la dimension de cet espace et nous montrons qu'elle vaut 1 pour D_2 . Pour le rang 3, nous montrons qu'elle est égale à 3 pour $B_3 - C_3$ et à 1 pour $D_3 = A_3$.

Il est à noter que ce sujet suscite un intérêt toujours actuel puisque tout récemment encore, en juin 2009, Etingof et Schedler se sont intéressés à la conjecture d'Alev. En effet, dans l'article [ES09], ils considèrent un polynôme f quasi-homogène à singularité isolée en l'origine (voir la Définition 1.4.1), X_f la surface qu'il définit, i. e.

$$X_f := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / f(z_1, z_2, z_3) = 0\},$$

et $X_f^{(n)} = S^n X_f$, la n -ème puissance symétrique de X_f . Ils déterminent alors l'espace d'homologie $HP_0(\mathcal{F}(X_f^{(n)}))$.

En particulier, si Γ est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ et si G est un produit en couronne de la forme

$$G = \Gamma \smile \mathfrak{S}_n = \Gamma^n \rtimes \mathfrak{S}_n,$$

ils en déduisent une démonstration de la conjecture de J. Alev, à savoir

$$HP_0(\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})^G) \simeq HH_0(A_n(\mathbb{C})^G).$$

Quand Γ est du type A_2 (i. e. $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), G s'identifie au groupe de Weyl du type $B_n - C_n$. La conjecture de J. Alev est donc démontrée dans le cas de $B_n - C_n$. Le problème reste encore ouvert pour les groupes de Weyl des autres types.

3.1 Introduction

Soit G un sous-groupe fini du groupe symplectique $\mathbf{Sp}(V)$, où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2n$. L'algèbre de fonctions polynomiales sur V , notée $\mathbb{C}[V]$, est alors une algèbre de Poisson pour le crochet symplectique standard, et comme G est un sous-groupe du groupe symplectique, l'algèbre des invariants, notée $\mathbb{C}[V]^G$, est aussi une algèbre de Poisson.

Plusieurs articles ont été consacrés au calcul de l'homologie et de la cohomologie de Poisson de l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[V]^G$. En particulier, Y. Berest, P. Etingof et V. Ginzburg prouvent dans [BEG04] que l'espace d'homologie de Poisson de degré 0 de $\mathbb{C}[V]^G$ est de dimension finie. De plus, ils montrent que le calcul de l'homologie se réduit à la résolution d'une équation fonctionnelle.

Dans [AL98], J. Alev et T. Lambre s'intéressent aux surfaces de Klein, i. e. au cas où G est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C} = \mathbf{Sp}_2\mathbb{C}$. Ils comparent l'espace d'homologie de Poisson de degré 0 de $\mathbb{C}[V]^G$ à l'espace d'homologie de Hochschild de degré 0 de $A_1(\mathbb{C})^G$, où $A_1(\mathbb{C})$ est l'algèbre

de Weyl.

J. Alev et T. Lambre étudient aussi le cas général d'un sous-groupe fini G de $\mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C}$ et calculent la dimension de l'espace d'homologie de Hochschild de degré 0 de $A_n(\mathbb{C})^G$, où $A_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Weyl (voir [AL99]).

Dans [AFLS00], J. Alev, M. A. Farinati, T. Lambre et A. L. Solotar établissent un résultat fondamental : ils calculent tous les espaces d'homologie et de cohomologie de Hochschild de $A_n(\mathbb{C})^G$ pour tout sous-groupe fini G de $\mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C}$. Ils appliquent en particulier ce résultat au cas des groupes de Weyl des algèbres de Lie semi-simples (voir aussi l'article [Pin07] de G. Pinczon pour une autre démonstration). Soulignons encore qu'il est intéressant de comparer l'homologie de Hochschild de $A_n(\mathbb{C})^G$ avec l'homologie de Poisson de l'anneau des invariants $\mathbb{C}[V]^G$.

J. Alev et L. Foissy considèrent dans [AF09] une algèbre de Lie semi-simple de rang 2, de sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et de groupe de Weyl W . Ils calculent la dimension de l'espace d'homologie de Poisson de degré 0 de $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}']^W$, et montrent que cette dimension coïncide avec la dimension de l'espace d'homologie de Hochschild de degré 0 de $A_2(\mathbb{C})^W$. De plus, J. Alev conjecture que pour tout n , et pour toute algèbre de Lie semi-simple de rang n , la dimension de l'espace d'homologie de Poisson de degré 0 de $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}']^W$ est égale à la dimension de l'espace d'homologie de Hochschild de degré 0 de $A_n(\mathbb{C})^W$.

Dans la suite du chapitre, étant donné une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} de dimension finie, une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , et son groupe de Weyl W , nous nous intéressons à l'homologie de Poisson de $\mathbb{C}[V]^G$ dans le cas où V est l'espace symplectique $V := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$ et où $G := W$.

Le groupe W agit de façon diagonale sur V , ce qui induit une action de W sur $\mathbb{C}[V]$. On désigne par $\mathbb{C}[V]^W$ l'algèbre des invariants sous cette action. Munie du crochet symplectique standard, cette algèbre est une algèbre de Poisson. L'action du groupe W sur V induit aussi une action de W sur l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{C})$.

Dans un premier temps, nous donnons des résultats généraux sur l'espace d'homologie de Poisson de degré 0 de $\mathbb{C}[V]^W$ pour les types $B_n - C_n$ et D_n , résultats qui vont dans le sens de la conjecture d'Alev et établissent un cadre d'étude pour une future démonstration. Les Paragraphes 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4 contiennent les résultats principaux de cette étude.

Nous utilisons ensuite ces résultats pour calculer complètement l'espace d'homologie de Poisson de degré 0, noté $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$, dans le cas où \mathfrak{g} est \mathfrak{so}_5 (i. e. B_2) (ainsi nous retrouvons, par une méthode différente, le résultat établi par J. Alev et L. Foissy pour \mathfrak{so}_5 dans l'article [AF09], à savoir $\dim HP_0(\mathbb{C}[V]^W) = 2$) puis dans le cas où \mathfrak{g} est \mathfrak{so}_4 (i. e. $D_2 = A_1 \times A_1$) en montrant que $\dim HP_0(\mathbb{C}[V]^W) = 1$. Enfin, le résultat principal que nous démontrons est la proposition suivante pour le rang 3 :

Proposition 3.1.1 (*Homologie de Poisson de degré 0 pour \mathfrak{g} de rang 3*)

Soient $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$ l'espace d'homologie de Poisson de degré 0 de $\mathbb{C}[V]^W$ et $HH_0(A_n(\mathbb{C})^W)$ l'espace d'homologie de Hochschild de degré 0 de $A_n(\mathbb{C})^W$.

Pour \mathfrak{g} de type B_3 (\mathfrak{so}_7), on a $\dim HP_0(\mathbb{C}[V]^W) = \dim HH_0(A_n(\mathbb{C})^W) = 3$.

Pour \mathfrak{g} de type $D_3 = A_3$ ($\mathfrak{so}_6 \simeq \mathfrak{sl}_4$), on a $\dim HP_0(\mathbb{C}[V]^W) = \dim HH_0(A_n(\mathbb{C})^W) = 1$.

Pour effectuer les calculs, nous utilisons l'équation donnée dans l'article [BEG04] cité ci-dessus.

3.1.1 Exemples où $\dim HP_0(S^G) \neq \dim HH_0(A^G)$

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, il est classique de comparer les dimensions des espaces $HP_0(S^G)$ et $HH_0(A^G)$. Avant d'effectuer notre étude, il est intéressant de remarquer que ces deux dimensions ne coïncident pas toujours. Le but de ce paragraphe est précisément de donner un exemple pour lequel la différence entre les deux dimensions peut être arbitrairement grande.

Soient $n \geq 2$ et $p \geq 3$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ et on considère le groupe

$$G = \{(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \mid \overline{k_1} + \dots + \overline{k_n} = 0\}.$$

On pose $S = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$, et on munit cette algèbre de sa structure de Poisson standard, i. e.

$$\{P, Q\} := \nabla_{\mathbf{x}} P \cdot \nabla_{\mathbf{y}} Q - \nabla_{\mathbf{y}} P \cdot \nabla_{\mathbf{x}} Q.$$

Le groupe G agit sur S par

$$(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \cdot x_i = \omega^{k_i} x_i, \text{ et } (\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \cdot y_i = \omega^{-k_i} y_i,$$

et sur l'algèbre de Weyl $A = A_n(\mathbb{C})$ par

$$(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \cdot p_i = \omega^{k_i} p_i, \text{ et } (\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \cdot q_i = \omega^{-k_i} q_i.$$

La propriété suivante est une généralisation du résultat démontré par J. Alev dans [AF09] pour $p = 3$.

Proposition 3.1.2

La dimension de $HP_0(S^G)$ est $(p-1)^n - (p-2)^n - 1$.

La dimension de $HH_0(A^G)$ est $\frac{1}{p}((p-1)^n + (p-1)(-1)^n)$.

Démonstration :

- Soient $t_i = x_i y_i$ et $\mathfrak{g} = \text{Vect}(t_1, \dots, t_n)$. On a $t_i \in S^G$, et \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de S^G . La formule

$$\{t_j, \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta\} = (\beta_j - \alpha_j) \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$$

montre que l'action de \mathfrak{g} est diagonalisable. De plus, comme $\mathfrak{g} \subset S^G$, l'action de \mathfrak{g} et celle de G commutent. On peut alors décomposer S^G en composantes isotypiques. Toutes les composantes isotypiques non triviales sont dans $\{S^G, S^G\}$. Ainsi, $S^G = S_{\mathfrak{g}}^G + \{S^G, S^G\}$, où $S_{\mathfrak{g}}^G$ désigne la composante isotypique triviale. D'où $HP_0(S^G) = \frac{S_{\mathfrak{g}}^G}{S_{\mathfrak{g}}^G \cap \{S^G, S^G\}}$, avec $S_{\mathfrak{g}}^G = \mathbb{C}[\mathbf{t}]$.

La relation

$$\{\mathbf{t}^\alpha x_j^p, y_j^p\} = p(\alpha_j + 3) t_1^{\alpha_1} \dots t_i^{\alpha_i + p - 1} \dots t_n^{\alpha_n}$$

montre que l'idéal $L := \langle t_1^{p-1}, \dots, t_n^{p-1} \rangle$ est inclus dans $\{S^G, S^G\}$. On en déduit

$$HP_0(S^G) = \frac{\mathbb{C}[\mathbf{t}]}{L} \Big/ \frac{\mathbb{C}[\mathbf{t}] \cap \{S^G, S^G\}}{L}.$$

Soit $J := (\mathbb{C}[\mathbf{t}] \cap \{S^G, S^G\}) / L$. L'espace $\mathbb{C}[\mathbf{t}] / L$ admet pour base $(t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n})_{0 \leq \alpha_j \leq n}$, de sorte que

$$\dim HP_0(S^G) = (p-1)^n - \dim J.$$

• On a les équivalences

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta \in S^G &\Leftrightarrow \forall (\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \in G, (\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \cdot \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta = \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta \\ &\Leftrightarrow \forall (\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \in G, k_1(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + k_n(\alpha_n - \beta_n) \equiv 0 \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket / \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_j - \beta_j \equiv \lambda \pmod{p}. \end{aligned}$$

Or, par un calcul direct,

$$\{\mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta, \mathbf{x}^\gamma \mathbf{y}^\delta\} = \sum_{j=1}^n (\alpha_j \gamma_j - \beta_j \delta_j) t_1^{\alpha_1 + \gamma_1} \dots t_j^{\alpha_j + \gamma_j - 1} \dots t_n^{\alpha_n + \gamma_n},$$

et cet élément est dans l'idéal L dès qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ou δ_j soit supérieur ou égal à p . De plus, en prenant $\lambda = 0$ avec les conditions $\alpha_j - \beta_j \equiv \lambda \pmod{p}$ et $\alpha_j - \beta_j + \gamma_j - \delta_j = 0$, on a $\alpha_j = \beta_j$, d'où $\gamma_j = \delta_j$, ce qui entraîne $\alpha_j \gamma_j - \beta_j \delta_j = 0$. Donc

$$\begin{aligned} J = \text{Vect} \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j \gamma_j - \beta_j \delta_j) \overline{t_1^{\alpha_1 + \gamma_1} \dots t_j^{\alpha_j + \gamma_j - 1} \dots t_n^{\alpha_n + \gamma_n}} \right. \\ \left. / \begin{array}{l} \exists \lambda \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_j - \beta_j \equiv \lambda \pmod{p}, \\ \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \text{ et } \alpha_j - \beta_j + \gamma_j - \delta_j = 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

• Pour $\lambda \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a $\alpha_j - \beta_j \equiv \lambda \pmod{p}$ et $\alpha_j - \beta_j \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket$, d'où les deux cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j = \beta_j + \lambda \\ \delta_j = \gamma_j + \lambda \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_j = \beta_j + (\lambda - p) \\ \delta_j = \gamma_j + (\lambda - p) \end{array} \right\}.$$

Les quadruplets $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ apparaissant dans (3.1) sont donc les éléments de l'ensemble

$$I = \{(k+\lambda, k, j, j+\lambda) / (k, j) \in \llbracket 0, p-1-\lambda \rrbracket^2\} \cup \{(k, k+p-\lambda, j+p-\lambda, j) / (k, j) \in \llbracket 0, \lambda-1 \rrbracket^2\},$$

avec $\alpha_j \gamma_j - \beta_j \delta_j = \lambda(j-k)$ dans le premier cas et $\alpha_j \gamma_j - \beta_j \delta_j = (\lambda-p)(j-k)$ dans le second. Quand $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ parcourt I avec $\lambda = 1$, l'exposant $\varepsilon_j := \alpha_j + \gamma_j$ parcourt l'ensemble $\llbracket 1, 2p-3 \rrbracket$, et si $\lambda \geq 2$, l'exposant ε_j parcourt un sous-ensemble de $\llbracket 1, 2p-3 \rrbracket$.

• Prenons $\lambda = 1$, et déterminons la dimension de J : par récurrence sur l'exposant ε_j maximal, on va construire une base de J . Soit $P := \sum_{j=1}^n (\alpha_j \gamma_j - \beta_j \delta_j) t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j^{\varepsilon_j - 1} \dots t_n^{\varepsilon_n}$.

▷ Dès qu'un exposant ε_j est supérieur ou égal à p , P est dans L . On prend donc $\varepsilon_j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Dès qu'au moins deux exposants ε_j sont supérieurs ou égaux à $p-1$, P est dans L . Si exactement un des exposants vaut $p-1$, seul le terme $t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j^{p-2} \dots t_n^{\varepsilon_n}$ est non nul modulo L . On pose donc $B_{p-1} := \{t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j^{p-2} \dots t_n^{\varepsilon_n} / j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \forall i \neq j, \varepsilon_i \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket\}$. On a $|B_{p-1}| = (p-2)^n - (p-3)^n$.

▷ On prend $\varepsilon_j \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket$. Dès qu'au moins deux exposants ε_j sont supérieurs ou égaux à $p-2$, P est dans $L + \langle B_{p-1} \rangle$. Si exactement un des exposants vaut $p-2$, seul le terme $t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j^{p-3} \dots t_n^{\varepsilon_n}$ est non nul modulo $L + \langle B_{p-1} \rangle$.

On pose donc $B_{p-2} := \{t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j^{p-3} \dots t_n^{\varepsilon_n} / j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \forall i \neq j, \varepsilon_i \in \llbracket 1, p-3 \rrbracket\}$.

On a $|B_{p-2}| = (p-3)^n - (p-4)^n$.

▷ On poursuit le processus jusqu'à $\varepsilon_j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$: dès qu'au moins deux exposants ε_j sont supérieurs ou égaux à 3, P est dans $L + \langle B_{p-1} + \dots + B_4 \rangle$. Si exactement un des exposants vaut 3, seul le terme $t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j^2 \dots t_n^{\varepsilon_n}$ est non nul modulo $L + \langle B_{p-1} + \dots + B_4 \rangle$.

On pose donc $B_3 := \{t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j^2 \dots t_n^{\varepsilon_n} / j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \forall i \neq j, \varepsilon_i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket\}$. On a $|B_3| = 2^n - 1$.

▷ Finalement, pour $\varepsilon_j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, dès qu'au moins deux exposants ε_j sont supérieurs ou égaux à 2, P est dans $L + \langle B_{p-1} + \dots + B_3 \rangle$. Si exactement un des exposants vaut 2, seul le terme $t_1^{\varepsilon_1} \dots t_j \dots t_n^{\varepsilon_n}$ est non nul modulo $L + \langle B_{p-1} + \dots + B_3 \rangle$. On pose donc $B_2 := \{t_1 \dots t_n\}$. On a $|B_2| = 1$.

Pour $\varepsilon_j = 1$, P est proportionnel à $t_2 \dots t_n + t_1 t_3 \dots t_n + \dots + t_1 \dots t_{n-1}$.

On pose donc $B_1 := \{t_2 \dots t_n + t_1 t_3 \dots t_n + \dots + t_1 \dots t_{n-1}\}$. On a $|B_1| = 1$.

La réunion $B := \bigcup_{j=1}^{p-1} B_j$ est alors une base de J , d'où $\dim J = (p-2)^n + 1$.

• D'après l'article [AFLS00], la dimension de $HH_0(A^G)$ est le nombre de classes de conjugaison de G admettant la valeur propre 1 avec la multiplicité 0. Ainsi,

$$d_n := \dim HH_0(A^G) = \left| \{(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\} / \overline{k_1} + \dots + \overline{k_n} = \overline{0}\} \right|.$$

On pose $a_0 = 1$, de sorte que $|G| = p^{n-1} = 1 + \sum_{j=1}^n C_n^j d_j = \sum_{j=0}^n C_n^j d_j$. On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}(e^{pz} - 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n-1}}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n C_n^j d_j \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n C_n^j d_j \frac{z^n}{n} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{z^{n-j}}{(n-j)!} \frac{d_j z^j}{j!} - 1 \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j z^j}{j!} \right) - 1 = e^z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j z^j}{j!} - 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j z^j}{j!} - 1 = \frac{e^{(p-1)z}}{p} + \frac{p-1}{p} e^{-z},$$

et ainsi $d_j = \frac{1}{p}((-1)^n(p-1) + (p-1)^n)$. ■

Pour $p = 3$, on retrouve le résultat de Jacques Alev :

$$\dim(HP_0(S^G)) = 2^n - 2 \text{ et } \dim(HH_0(A^G)) = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n).$$

Ainsi, $\dim(HP_0(S^G)) - \dim(HH_0(A^G)) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

3.2 Résultats sur $B_n - C_n$ et D_n

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, nous nous intéressons à l'homologie de Poisson de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}']^W$, où \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie \mathfrak{g} , et W son groupe de Weyl. Nous allons étudier les types B_n et D_n . Rappelons que le système de racines de C_n est le dual du système de racines de B_n . Ainsi leurs groupes de Weyl sont isomorphes, et l'étude du cas C_n se réduit à l'étude du cas B_n .

3.2.1 Définitions et notations

• Soit $S := \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $S(m)$ l'espace formé des éléments de S de degré m .

Pour B_n , on a $W = (\pm 1)^n \rtimes \mathfrak{S}_n = (\pm 1)^n \cdot \mathfrak{S}_n$ (permutations des variables et changements de signes des variables).

Notons que le groupe de Weyl de type B_n est appelé groupe hyperoctaédral : c'est le groupe des isométries qui conservent un hypercube, i. e. le polyèdre intersection des demi-hyperespaces de \mathbb{R}^n d'équations $x_j = \pm 1$ (voir [Del01]). En particulier, pour $n = 2$ ce groupe est le groupe du carré, pour $n = 3$ celui du cube.

Pour D_n , on a $W = (\pm 1)^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_n = (\pm 1)^{n-1} \cdot \mathfrak{S}_n$ (permutations des variables et changements de signes d'un nombre pair de variables).

Tout élément $(a_1, \dots, a_n) \in (\pm 1)^n$ s'identifie à la matrice diagonale $Diag(a_1, \dots, a_n)$, et tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'identifie à la matrice $(\delta_{i, \sigma(j)})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Nous notons s_j le j -ème changement de signe, i. e.

$$s_j(x_k) = x_k \text{ si } k \neq j, s_j(x_j) = -x_j, \text{ et } s_j(y_k) = y_k \text{ si } k \neq j, s_j(y_j) = -y_j.$$

En ce qui concerne les éléments de $(\pm 1)^{n-1}$, ils sont identifiés aux matrices de la forme

$$Diag((-1)^{i_1}, (-1)^{i_1+i_2}, (-1)^{i_2+i_3}, \dots, (-1)^{i_{n-2}+i_{n-1}}, (-1)^{i_{n-1}}),$$

avec $i_k \in \{0, 1\}$. Nous notons $s_{i,j}$ les changements de signes des variables d'indices i et j .

Ainsi, tous ces éléments appartiennent à $\mathbf{O}_n \mathbb{C}$, et en identifiant $g \in W$ et $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$, nous obtenons $W \subset \mathbf{Sp}_{2n} \mathbb{C}$.

• L'action (à droite) de W sur S est définie pour $P \in S$ et $g \in W$ par

$$g \cdot P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := P \left(\sum_{j=1}^n g_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n g_{nj} x_j, \sum_{j=1}^n g_{1j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n g_{nj} y_j \right).$$

Ainsi, on a $h \cdot (g \cdot P) = (gh) \cdot P$.

Dans le cas particulier où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sigma \cdot P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}, y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(n)})$.

• Sur S , on définit le crochet de Poisson

$$\{P, Q\} := \langle \nabla P, \nabla Q \rangle = \nabla P \cdot (J \nabla Q) = \nabla_{\mathbf{x}} P \cdot \nabla_{\mathbf{y}} Q - \nabla_{\mathbf{y}} P \cdot \nabla_{\mathbf{x}} Q,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit symplectique standard, associé à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Comme le groupe W est un sous-groupe de $\mathbf{Sp}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \mathbf{Sp}_{2n} \mathbb{C}$, l'algèbre des invariants S^W est une algèbre de Poisson pour le crochet ci-dessus.

• On définit l'opérateur de Reynolds comme l'application linéaire R_n de S dans S déterminée par

$$R_n(P) = \frac{1}{|W|} \sum_{g \in W} g \cdot P.$$

On pose $A = \mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{t}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_n]$ et $S' := A[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, et on étend l'application R_n en une application A -linéaire de S' dans S' .

Remarque 3.2.1

Dans le cas de B_n , tout élément de S^W a un degré pair. (Ce n'est pas vrai pour D_n).

Démonstration :

Soit $M = \mathbf{x}^i \mathbf{y}^j \in S^G$, un monôme de degré impair. Alors il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i_k + j_k$ est impair. Si s_k est le k -ème changement de signe, on a $s_k(M) = -M$, et en écrivant $G = s_k \cdot H \sqcup H$, on obtient $M = R_n(M) = 0$. ■

- Dans la suite, on désignera $HP_0(\mathbb{C}[V]^W)$ par $HP_0(W)$ et $HH_0(\mathbb{C}[V]^W)$ par $HH_0(W)$.

3.2.2 Vecteurs de plus haut poids 0

Le but de ce paragraphe est de montrer que $S^W(2)$ est isomorphe à \mathfrak{sl}_2 et que les vecteurs qui n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$, sont à rechercher parmi les vecteurs de plus haut poids 0 du \mathfrak{sl}_2 -module S^W : cette observation simplifiera les calculs.

Proposition 3.2.2

Pour B_n ($n \geq 2$) et D_n ($n \geq 3$), le sous-espace $S^W(2)$ est isomorphe à \mathfrak{sl}_2 . Plus précisément, $S^W(2) = \langle E, F, H \rangle$ avec les relations $\{H, E\} = 2E$, $\{H, F\} = -2F$ et $\{E, F\} = H$, où les éléments E, F, H sont donnés explicitement par

$$E = \frac{n}{2} R_n(x_1^2) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad F = -\frac{n}{2} R_n(y_1^2) = -\frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \quad H = -n R_n(x_1 y_1) = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Pour D_2 , on a $S^W(2) = \langle E, F, H \rangle \oplus \langle E', F', H' \rangle$ (somme directe de deux algèbres de Lie isomorphes à \mathfrak{sl}_2).

Ainsi les espaces S et S^W sont des \mathfrak{sl}_2 -modules.

Démonstration :

Nous démontrons la proposition pour B_n , la preuve étant analogue pour D_n .

- Comme x_1^2 est invariant par changements de signes, on peut écrire $R_n(x_1^2) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot x_1^2$. De plus, on a la partition $\mathfrak{S}_n = \coprod_{j=1}^n A_j$, où $A_j := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \sigma(1) = j\}$ a pour cardinal $(n-1)!$.

Donc $R_n(x_1^2) = \frac{(n-1)!}{n!} \sum_{j=1}^n x_j^2$. On procède de la même façon avec $R_n(y_1^2)$ et $R_n(x_1 y_1)$.

- On a évidemment $S^W(2) \supset \langle E, F, H \rangle$.

En outre, $R(x_j^2) = R(x_1^2)$, $R(y_j^2) = R(y_1^2)$ et $R(x_j y_j) = R(x_1 y_1)$. Enfin, si $i \neq j$, alors $x_i x_j$, $y_i y_j$ et $x_i y_j$ sont envoyés sur leur opposé par le i -ème changement de signe s_i , et

$$W = s_i \cdot \langle s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n \rangle \cdot \mathfrak{S}_n \sqcup \langle s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n \rangle \cdot \mathfrak{S}_n,$$

donc $R_n(x_i x_j) = R_n(y_i y_j) = R_n(x_i y_j) = 0$. D'où $S^W(2) \subset \langle E, F, H \rangle$.

- On a $\nabla E = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\nabla F = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}$ et $\nabla H = \begin{pmatrix} -\mathbf{y} \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix}$,

ainsi $\{E, F\} = H$, $\{H, E\} = 2E$ et $\{H, F\} = -2F$. ■

On note $S_{\mathfrak{sl}_2}$ l'ensemble des vecteurs de plus haut poids 0, i. e. l'ensemble des éléments de S qui sont annulés par l'action de \mathfrak{sl}_2 .

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $S(j)_{\mathfrak{sl}_2}$ l'ensemble des éléments de $S_{\mathfrak{sl}_2}$ de degré j .

Comme l'action de W et l'action de \mathfrak{sl}_2 commutent, on peut écrire $(S^W)_{\mathfrak{sl}_2} = (S_{\mathfrak{sl}_2})^W = S_{\mathfrak{sl}_2}^W$, et de même pour $S^W(j)_{\mathfrak{sl}_2}$.

Proposition 3.2.3

- Si S^W ne contient aucun élément de degré 1, alors les vecteurs de plus haut poids 0 de degré 0 n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$.
- Soit W du type B_n ($n \geq 2$) ou D_n ($n \geq 3$). Si S^W ne contient aucun élément de degré 1, 3, alors les vecteurs de plus haut poids 0 de degré 4 n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$.

Démonstration :

- Le crochet de Poisson étant homogène de degré -2 , on a

$$S^W(0) \cap \{S^W, S^W\} = \{S^W(2), S^W(0)\} = \{0\}.$$

- De même, $S^W(4) \cap \{S^W, S^W\} = \{S^W(0), S^W(6)\} + \{S^W(2), S^W(4)\} = \{\mathfrak{sl}_2, S^W(4)\}$, d'après la Proposition 3.4.2. Avec la décomposition des \mathfrak{sl}_2 -modules, on a $S^W(4) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} V(m)$, avec $\{\mathfrak{sl}_2, V(m)\} = V(m)$ si $m \in \mathbb{N}^*$ et $\{\mathfrak{sl}_2, V(0)\} = \{0\}$. Ainsi, si $a \in S^W(4) \cap \{S^W, S^W\}$, alors $a \in \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^*} V(m)$. ■

Proposition 3.2.4

Pour tout monôme $M = \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}^{\mathbf{j}}$, on a

$$\begin{aligned} \{H, M\} &= (|\mathbf{i}| - |\mathbf{j}|)M = (\deg_x(M) - \deg_y(M))M, \\ \{E, M\} &= \sum_{k=1}^n j_k x_1^{i_1} \dots x_{k-1}^{i_{k-1}} x_k^{i_k+1} x_{k+1}^{i_{k+1}} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \dots y_{k-1}^{j_{k-1}} y_k^{j_k-1} y_{k+1}^{j_{k+1}} \dots y_n^{j_n}, \\ \{F, M\} &= \sum_{k=1}^n i_k x_1^{i_1} \dots x_{k-1}^{i_{k-1}} x_k^{i_k-1} x_{k+1}^{i_{k+1}} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \dots y_{k-1}^{j_{k-1}} y_k^{j_k+1} y_{k+1}^{j_{k+1}} \dots y_n^{j_n}. \end{aligned}$$

En particulier, tout vecteur de plus haut poids 0 est de degré pair.

Démonstration :

Soit $M = \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}^{\mathbf{j}}$ un monôme. D'après les gradients calculés dans la démonstration de la Proposition 3.4.2, on a $\{H, M\} = -\mathbf{y} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} M + \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} M$. Or

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} M &= i_k x_1^{i_1} \dots x_{k-1}^{i_{k-1}} x_k^{i_k-1} x_{k+1}^{i_{k+1}} \dots x_n^{i_n} \mathbf{y}^{\mathbf{j}}, \\ \partial_{y_k} M &= j_k \mathbf{x}^{\mathbf{i}} y_1^{j_1} \dots y_{k-1}^{j_{k-1}} y_k^{j_k-1} y_{k+1}^{j_{k+1}} \dots y_n^{j_n}, \end{aligned}$$

donc $\{H, M\} = (\sum_{k=1}^n i_k - \sum_{k=1}^n j_k)M$.

On a de même $\{E, M\} = \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} M$ et $\{F, M\} = \mathbf{y} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} M$. ■

Remarque 3.2.5

Soient $j \in \mathbb{N}$ et $P \in S^W(j)$. D'après la décomposition des \mathfrak{sl}_2 -modules $S^W(j)$ en sous-espaces de poids, on peut écrire $P = \sum_{k=-m}^m P_k$ avec $\{H, P_k\} = k P_k$. Ainsi, on a

$$\frac{S^W(j)}{\{S^W, S^W\} \cap S^W(j)} = \frac{S^W(j)_{\mathfrak{sl}_2}}{\{S^W, S^W\} \cap S^W(j)_{\mathfrak{sl}_2}}.$$

Donc les vecteurs qui n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$ sont à rechercher parmi les vecteurs de plus haut poids 0.

La propriété suivante est une généralisation de la Proposition 3 prouvée par J. Alev et L. Foissy dans [AF09]. Elle permet de connaître la série de Poincaré de l'algèbre $S_{\mathfrak{sl}_2}$.

Proposition 3.2.6

Pour $l \in \mathbb{N}$, on a $S_{\mathfrak{sl}_2}(2l+1) = \{0\}$ et $\dim S_{\mathfrak{sl}_2}(2l) = (C_{l+n-1}^{n-1})^2 - C_{l+n}^{n-1} C_{l+n-2}^{n-1}$.

Démonstration :

On procède comme dans [AF09].

• On a $S(1) = S(1)_1 \oplus S(1)_{-1} = \langle \mathbf{x} \rangle \oplus \langle \mathbf{y} \rangle$, donc S est engendrée par $S(1)$. On peut alors graduer S sur \mathbb{N}^2 en attribuant le degré $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) aux éléments de $S(1)_1$ (resp. $S(1)_{-1}$). On note $S(i, j)$ les composantes homogènes pour cette graduation, et on considère la série

$$\Phi(t, u) = \sum_{i, j} \dim S(i, j) t^i u^j.$$

Les éléments de $S(i, j)$ sont les combinaisons linéaires des monômes de la forme $M = \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}^{\mathbf{j}}$ avec $|\mathbf{i}| = i$ et $|\mathbf{j}| = j$.

• Par ailleurs, on a les égalités

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^n} \frac{1}{(1-u)^n} &= \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} t^{i_1} \right) \dots \left(\sum_{i_n=0}^{\infty} t^{i_n} \right) \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} u^{j_1} \right) \dots \left(\sum_{j_n=0}^{\infty} u^{j_n} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} t^{|\mathbf{i}|} u^{|\mathbf{j}|} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{|\mathbf{i}|=i} 1 \right) \left(\sum_{|\mathbf{j}|=j} 1 \right) t^i u^j \\ &= \Phi(t, u). \end{aligned}$$

Et en dérivant n fois $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^n} \frac{1}{(1-u)^n} &= \sum_{i=n-1}^{\infty} \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{i(i-1) \dots (i-n+2)}{(n-1)!} \frac{j(j-1) \dots (j-n+2)}{(n-1)!} t^{i-n+1} u^{j-n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{i+n-1}^{n-1} C_{j+n-1}^{n-1} t^i u^j, \end{aligned}$$

d'où

$$\dim S(i, j) = C_{i+n-1}^{n-1} C_{j+n-1}^{n-1}. \quad (3.2)$$

• On a de plus $S(1)_1 = S(1, 0) = \bigoplus_{\substack{i+j=1 \\ i-j=1}} S(i, j)$ et $S(1)_{-1} = S(0, 1) = \bigoplus_{\substack{i+j=1 \\ i-j=-1}} S(i, j)$,

et comme $S(1)_k = \{0\}$ si $k \neq \pm 1$, on a $S(1)_k = \bigoplus_{\substack{i+j=1 \\ i-j=k}} S(i, j)$, d'où

$$S(m)_k = \bigoplus_{\substack{i+j=m \\ i-j=k}} S(i, j). \quad (3.3)$$

On pose ensuite $\chi_m(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim S(m)_k q^k$ et $\chi(q, h) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m(q) h^m$.

D'après la Formule (3.3),

$$\begin{aligned}
 \chi(q, h) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{N}}} \sum_{\substack{i+j=m \\ i-j=k}} \dim S(i, j) h^m q^k \\
 &= \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \dim S(i, j) \sum_{\substack{m+k=i, \\ \frac{m-k}{2}=j}} h^{i+j} q^{i-j} \\
 &= \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \dim S(i, j) (hq)^i \left(\frac{h}{q}\right)^j \\
 &= \Phi(hq, \frac{h}{q}) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} C_{i+n-1}^{n-1} C_{j+n-1}^{n-1} (hq)^i \left(\frac{h}{q}\right)^j \\
 &= \sum_{i, j \in \mathbb{N}} C_{i+n-1}^{n-1} C_{j+n-1}^{n-1} h^{i+j} q^{i-j},
 \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant de la Formule (3.2).

- La dimension de $S(m)_{\mathfrak{sl}_2}$ est donnée par la différence du terme de degré 0 de χ_m , qui correspond à $i = \frac{m}{2}$ et $j = \frac{m}{2}$, et du terme de degré 2, qui correspond à $i = \frac{m}{2} + 1$ et $j = \frac{m}{2} - 1$. Donc
 - ▷ si m est impair, alors $S(m)_{\mathfrak{sl}_2} = \{0\}$,
 - ▷ si m est pair, alors $m = 2l$ et $\dim S(m)_{\mathfrak{sl}_2} = (C_{l+n-1}^{n-1})^2 - C_{l+n}^{n-1} C_{l+n-2}^{n-1}$. ■

Le résultat suivant est important pour la résolution de l'Equation de Berest-Etingof-Ginzburg, car il donne une description de l'espace des vecteurs de plus haut poids 0, espace dans lequel nous chercherons les solutions de cette équation. Dans la démonstration de cette proposition, nous utilisons les articles [DCP76] et [GK04] concernant les algèbres pfaffiennes.

Proposition 3.2.7

Pour $i \neq j$, soit $X_{i,j} := x_i y_j - y_i x_j$. Alors l'algèbre $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{\mathfrak{sl}_2}$ est l'algèbre engendrée par les $X_{i,j}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Nous désignons cette algèbre par $\mathbb{C}\langle X_{i,j} \rangle$.

Notons que cette algèbre n'est pas une algèbre de polynômes pour $n \geq 4$ (en effet, on a la relation $X_{1,2}X_{3,4} - X_{1,3}X_{2,4} + X_{2,3}X_{1,4} = 0$).

Démonstration :

- L'inclusion $\mathbb{C}\langle X_{i,j} \rangle \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{\mathfrak{sl}_2}$ étant évidente, il suffit de montrer que les séries de Poincaré des deux espaces sont égales, sachant que celle de $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{\mathfrak{sl}_2}$ est déjà donnée par la Proposition 3.2.6.
- Considérons les vecteurs $u_j := \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ pour $j = 1 \dots n$, dans l'espace symplectique \mathbb{C}^2 muni

de la forme symplectique standard $\langle \cdot \rangle$ définie par la matrice $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\{T_{i,j} / 1 \leq i < j \leq n\}$ un ensemble d'indéterminées, et soit \tilde{T} une matrice antisymétrique de terme général $T_{i,j}$ si $i < j$. Alors, d'après le Paragraphe 6 de [DCP76], l'idéal I_2 de relations entre les $\langle u_i, u_j \rangle$ (i. e. entre les $X_{i,j}$) est engendré par les mineurs pfaffiens de \tilde{T} de taille 4×4 . Soit $PF := \mathbb{C}\langle X_{i,j} \rangle$. Ainsi on a $PF \simeq \mathbb{C}[(T_{i,j})_{i < j}] / I_2 =: PF_0$, i. e. l'algèbre PF est isomorphe

à l'algèbre pfaffienne PF_0 . Sa série de Poincaré est donnée dans le Paragraphe 4 de [GK04] par

$$\dim PF_0(m) = (C_{m+n-2}^m)^2 - C_{m+n-2}^{m-1} C_{m+n-2}^{m+1}.$$

Ainsi on a $\dim PF(2l) = (C_{l+n-2}^l)^2 - C_{l+n-2}^{l-1} C_{l+n-2}^{l+1}$. On vérifie que

$$\dim PF(2l) = (C_{l+n-1}^{n-1})^2 - C_{l+n}^{n-1} C_{l+n-2}^{n-1} = \dim \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{\mathfrak{sl}_2}(2l).$$

On a évidemment $\dim PF(2l+1) = 0 = \dim \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{\mathfrak{sl}_2}(2l+1)$. D'où l'égalité des séries de Poincaré. ■

3.2.3 Equation de Berest-Etingof-Ginzburg

Nous étudions l'équation fonctionnelle introduite par Y. Berest, P. Etingof et V. Ginzburg dans [BEG04]. Le résultat-clé pour la suite tient au fait suivant : la résolution de cette équation, dans l'espace $S_{\mathfrak{sl}_2}^W$, est équivalente à la détermination du quotient $\frac{S^W}{\{S^W, S^W\}}$, c'est-à-dire au calcul de l'espace d'homologie de Poisson de degré 0 de S^W .

Lemme 3.2.8 (Berest - Etingof - Ginzburg)

On considère \mathbb{C}^{2n} , muni de sa forme symplectique standard, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $j \in \mathbb{N}$.

Soit $S := \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, et soit $\mathcal{L}_j := \left(\frac{S^W(j)}{\{S^W, S^W\} \cap S^W(j)} \right)^*$ le dual de $\frac{S^W(j)}{\{S^W, S^W\} \cap S^W(j)}$.

Alors \mathcal{L}_j est isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{C}[\mathbf{w}]^W(j)$ vérifiant l'équation suivante :

$$\forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{C}^{2n}, \sum_{g \in W} \langle \mathbf{w}, g\mathbf{w}' \rangle P(\mathbf{w} + g\mathbf{w}') = 0. \quad (3.4)$$

Démonstration :

• Pour $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{C}^{2n}$ et $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}^{2n}$, on pose $L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) := \sum_{g \in W} e^{\langle \mathbf{w}, g\mathbf{z} \rangle}$.

Ainsi on a $\{L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}), L_{\mathbf{w}'}(\mathbf{z})\} = \nabla_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} L_{\mathbf{w}'}(\mathbf{z}) - \nabla_{\mathbf{y}} L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{w}'}(\mathbf{z})$.

On en déduit la formule

$$\{L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}), L_{\mathbf{w}'}(\mathbf{z})\} = \sum_{g \in W} \langle \mathbf{w}, g\mathbf{w}' \rangle L_{\mathbf{w}+g\mathbf{w}'}(\mathbf{z}). \quad (3.5)$$

• De plus, $L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z})$ est une série formelle en \mathbf{w} , dont les coefficients engendrent S^W :

$$L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|W|}{p!} R_n \left[\left(\sum_{i=1}^n y_i u_i - x_i v_i \right)^p \right]. \quad (3.6)$$

Les coefficients de la série sont les images par R_n des éléments de la base canonique de S .

Remarque : dans le cas de B_n , il n'y a aucun invariant de degré impair. Ainsi on a l'égalité $L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) = \sum_{g \in W} \text{ch}(\langle \mathbf{w}, g\mathbf{z} \rangle)$.

▷ Soient $M_p(\mathbf{z}) = \{\mathbf{z}^{\mathbf{i}} / |\mathbf{i}| = p\}$ et $M_p(\mathbf{w}) = \{\mathbf{w}^{\mathbf{i}} / |\mathbf{i}| = p\}$.

Pour tout monôme $m = \mathbf{x}^i \mathbf{y}^j \in M_p(\mathbf{z})$, posons $\tilde{m} = \mathbf{u}^j \mathbf{v}^i$.

De même, pour tout monôme $m = \mathbf{u}^i \mathbf{v}^j \in M_p(\mathbf{w})$, posons $\tilde{m} = \mathbf{x}^j \mathbf{y}^i$.

Ainsi, pour $m \in M_p(\mathbf{z})$, on a $\tilde{\tilde{m}} = m$, et pour $m \in M_p(\mathbf{w})$, on a $\tilde{\tilde{m}} = m$.

La série $L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z})$ peut s'écrire sous la forme

$$L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) = |W| + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{z})} \alpha_{m_j} R_n(\tilde{m}_j) m_j = |W| + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{z})} \alpha_{\tilde{m}_j} R_n(m_j) \tilde{m}_j = |W| + \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathbf{w}}^j(\mathbf{z}), \quad (3.7)$$

avec $\alpha_{m_j} \in \mathbb{Q}^*$.

▷ Or $(\sum_{i=1}^n y_i u_i - x_i v_i)^p = \sum_{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|=p} (-1)^{|\mathbf{b}|} C_p^{\mathbf{a},\mathbf{b}} \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mathbf{y}^{\mathbf{a}} \mathbf{u}^{\mathbf{a}} \mathbf{v}^{\mathbf{b}}$, où $C_p^{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{p!}{a_1! \dots a_n! b_1! \dots b_n!}$ est le coefficient multinomial, donc d'après la Formule (3.6), on a

$$L_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}) = |W| + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|=p} (-1)^{|\mathbf{b}|} \frac{|W|}{p!} C_p^{\mathbf{a},\mathbf{b}} R_n(\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mathbf{y}^{\mathbf{a}}) \mathbf{u}^{\mathbf{a}} \mathbf{v}^{\mathbf{b}}. \quad (3.8)$$

En regroupant les Formules (3.7) et (3.8), on obtient

$$\alpha_{\mathbf{u}^{\mathbf{a}} \mathbf{v}^{\mathbf{b}}} = (-1)^{|\mathbf{b}|} \frac{|W|}{p!} C_p^{\mathbf{a},\mathbf{b}}. \quad (3.9)$$

• On identifie \mathcal{L}_j avec l'espace vectoriel des formes linéaires sur $S^W(j)$ qui s'annulent sur $\{S^W, S^W\} \cap S^W(j)$.

Définissons l'application

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{L}_j &\rightarrow \{P \in \mathbb{C}[\mathbf{w}]^W(j) / \forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{C}^{2n}, \sum_{g \in W} \langle \mathbf{w}, g\mathbf{w}' \rangle P(\mathbf{w} + g\mathbf{w}') = 0\} \\ f &\mapsto \pi_f := f(L_{\mathbf{w}}^j). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Alors π est bien définie : en effet, $L_{\mathbf{w}}^j$ est un polynôme en \mathbf{z} de degré j à coefficients dans $\mathbb{C}[\mathbf{w}]$, et explicitement, on a

$$f(L_{\mathbf{w}}^j) = \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{z})} \alpha_{\tilde{m}_j} f(R_n(m_j)) \tilde{m}_j \in \mathbb{C}[\mathbf{w}]. \quad (3.11)$$

▷ Si deux monômes $m_j, m'_j \in M_j(\mathbf{z})$ appartiennent à une même orbite sous l'action de \mathfrak{S}_n , alors les coefficients $\alpha_{\tilde{m}_j} f(R_n(m_j))$ et $\alpha_{\tilde{m}'_j} f(R_n(m'_j))$ de m_j et m'_j sont les mêmes, donc $f(L_{\mathbf{w}}^j)$ est invariant sous W .

▷ De plus, π_f est solution de $E_n(P) = 0$: en effet, on peut étendre f en une application linéaire définie sur $\frac{S^W}{\{S^W, S^W\}} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{S^W(i)}{\{S^W, S^W\} \cap S^W(i)}$, en posant $f = 0$ sur $\frac{S^W(i)}{\{S^W, S^W\} \cap S^W(i)}$ pour $i \neq j$. Alors, d'après la Formule (3.5), on a l'égalité

$$0 = f(\{L_{\mathbf{w}}, L_{\mathbf{w}'}\}) = \sum_{g \in W} \langle \mathbf{w}, g\mathbf{w}' \rangle f(L_{\mathbf{w}+g\mathbf{w}'}),$$

d'où $\sum_{g \in W} \langle \mathbf{w}, g\mathbf{w}' \rangle f(L_{\mathbf{w}+g\mathbf{w}'}^j) = 0$. Ainsi, le polynôme $f(L_{\mathbf{w}}^j) \in \mathbb{C}[\mathbf{w}]$ vérifie l'Equation (3.4).

• Définissons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \{P \in \mathbb{C}[\mathbf{w}]^W(j) \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{C}^{2n}, \sum_{g \in W} \langle \mathbf{w}, g\mathbf{w}' \rangle P(\mathbf{w} + g\mathbf{w}') = 0\} &\rightarrow \mathcal{L}_j \\ P = \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{w})} \beta_{m_j} m_j &\mapsto \left(\varphi_P : R_n(\overline{m_j}) \mapsto \frac{\beta_{m_j}}{\alpha_{m_j}} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

▷ Pour $f \in \mathcal{L}_j$, on a

$$\varphi_{\pi_f}(R_n(\overline{m_j})) = \frac{\alpha_{m_j} f(R_n(\overline{m_j}))}{\alpha_{m_j}} = f(R_n(\overline{m_j})),$$

donc $\varphi_{\pi_f} = f$.

▷ Pour $P = \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{w})} \beta_{m_j} m_j \in \mathbb{C}[\mathbf{w}]^W(j)$, on a $P = \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{z})} \beta_{\widetilde{m_j}} \widetilde{m_j}$. Ainsi si $m_j \in M_j(\mathbf{z})$, alors

$\varphi_P(R_n(m_j)) = \frac{\beta_{\widetilde{m_j}}}{\alpha_{\widetilde{m_j}}}$. Par conséquent,

$$\pi_{\varphi_P} = \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{z})} \alpha_{\widetilde{m_j}} \varphi_P(R_n(m_j)) \widetilde{m_j} = \sum_{m_j \in M_j(\mathbf{z})} \alpha_{\widetilde{m_j}} \frac{\beta_{\widetilde{m_j}}}{\alpha_{\widetilde{m_j}}} \widetilde{m_j} = P.$$

Ainsi π est bijective et son inverse est φ .

▷ Il ne reste plus qu'à montrer que φ_P s'annule sur $\{S^W, S^W\} \cap S^W(j)$.

Soit $P \in \mathbb{C}[\mathbf{w}]^W(j)$ une solution de l'Equation (3.4). Alors, comme $\pi_{\varphi_P} = P$, on a pour $k+l=j$,

$$0 = \sum_{g \in W} \langle \mathbf{w}, g\mathbf{w}' \rangle P(\mathbf{w} + g\mathbf{w}') = \varphi_P(\{L_{\mathbf{w}}^k, L_{\mathbf{w}'}^l\}).$$

Or

$$\{L_{\mathbf{w}}^k, L_{\mathbf{w}'}^l\} = \sum_{m_k \in M_k(\mathbf{w})} \sum_{\mu_l \in M_l(\mathbf{w}')} \alpha_{m_k} \alpha_{\mu_l} m_k \mu_l \{R_n(\overline{m_k}), R_n(\overline{\mu_l})\},$$

de sorte que

$$\sum_{m_k \in M_k(\mathbf{w})} \sum_{\mu_l \in M_l(\mathbf{w}')} \alpha_{m_k} \alpha_{\mu_l} m_k \mu_l \varphi_P(\{R_n(\overline{m_k}), R_n(\overline{\mu_l})\}) = 0.$$

Cette dernière égalité est équivalente à

$$\forall k+l=j, \varphi_P(\{R_n(\overline{m_k}), R_n(\overline{\mu_l})\}) = 0,$$

ce qui montre que φ_P s'annule sur $\{S^W, S^W\} \cap S^W(j)$. ■

Le corollaire suivant permet de rendre l'Equation de Berest-Etingof-Ginzburg plus explicite.

Corollaire 3.2.9

On introduit $2n$ indéterminées, notées $z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_n$, et on étend l'opérateur de Reynolds en une application de $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}]$ dans lui-même qui est $\mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{t}]$ -linéaire. Alors l'espace

vectoriel \mathcal{L}_j est isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes $P \in S^W(j)$ vérifiant l'équation suivante :

$$R_n \left(\left(\sum_{i=1}^n z_i y_i - t_i x_i \right) P(z_1 + x_1, \dots, z_n + x_n, t_1 + y_1, \dots, t_n + y_n) \right) = 0, \quad (3.13)$$

i. e.

$$\boxed{E_n(P) := R_n \left((\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) P(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \right) = 0}. \quad (3.14)$$

Démonstration :

On a $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle = \mathbf{w} \cdot (J\mathbf{w}') = \sum_{i=1}^n (w_i w'_{n+i} - w_{n+i} w'_i)$. Alors l'Equation (3.13) est équivalente à

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{C}, \quad & \sum_{g \in W} \sum_{i=1}^n (w_i \sum_{j=1}^n g_{ij} w'_{n+j} - w_{n+i} \sum_{j=1}^n g_{ij} w'_j) \\ & P \left(w_1 + \sum_{j=1}^n g_{1j} w'_j, \dots, w_n + \sum_{j=1}^n g_{nj} w'_j, \right. \\ & \left. w_{n+1} + \sum_{j=1}^n g_{1j} w'_{n+j}, \dots, w_{2n} + \sum_{j=1}^n g_{nj} w'_{n+j} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cela signifie que le polynôme

$$\sum_{g \in W} \sum_{i=1}^n \left(z_i \sum_{j=1}^n g_{ij} y_j - t_i \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) P \left(z_1 + \sum_{j=1}^n g_{1j} x_j, \dots, z_n + \sum_{j=1}^n g_{nj} x_j, t_1 + \sum_{j=1}^n g_{1j} y_j, \dots, t_n + \sum_{j=1}^n g_{nj} y_j \right) \quad (3.16)$$

est nul.

Cela équivaut à

$$\sum_{i=1}^n (z_i g \cdot y_i - t_i g \cdot x_i) \sum_{g \in W} g \cdot \left(P(z_1 + x_1, \dots, z_n + x_n, t_1 + y_1, \dots, t_n + y_n) \right) = 0, \quad (3.17)$$

c'est-à-dire

$$R_n \left(\left(\sum_{i=1}^n z_i y_i - t_i x_i \right) P(z_1 + x_1, \dots, z_n + x_n, t_1 + y_1, \dots, t_n + y_n) \right) = 0, \quad (3.18)$$

où R_n est l'opérateur de Reynolds étendu en une application $\mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{t}]$ -linéaire. ■

Remarque 3.2.10

• Cas de B_n : pour un monôme $M \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$,

▷ soit il existe un changement de signe qui envoie M sur son opposé, et alors $R_n(M) = 0$

▷ soit M est invariant par tout changement de signe et alors $R_n(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot M$.

Si $Q = R_n(P)$ avec $P \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, nous pouvons donc toujours supposer que tout monôme de P , et en particulier P lui-même, est invariant par les changements de signes.

• Cas de D_n : on a le même résultat, en considérant cette fois les changement de signes d'un nombre pair de variables.

L'intérêt de la Proposition 3.2.11 et de son corollaire est de réduire de façon considérable l'espace dans lequel on doit chercher les solutions de l'Equation (3.14) : nous montrons qu'il est possible de se limiter à l'espace des éléments qui sont annulés par l'action de \mathfrak{sl}_2 .

Proposition 3.2.11

Soit $P \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^W$. Nous considérons l'élément $E_n(P)$ défini par la Formule (3.14) comme un polynôme en les indéterminées \mathbf{z}, \mathbf{t} à coefficients dans $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Alors le coefficient de $z_1 t_1$ dans $E_n(P)$ est $\frac{-1}{n} \{H, P\}$, celui de t_1^2 est $\frac{-1}{n} \{E, P\}$ et celui de z_1^2 est $\frac{1}{n} \{F, P\}$.

Démonstration :

Nous effectuons la démonstration pour B_n ; c'est la même pour D_n .

• On désigne par $c_{z_1 t_1}(P)$ le coefficient de $z_1 t_1$ dans $E_n(P)$. Puisque les applications $P \mapsto c_{z_1 t_1}(P)$ et $P \mapsto \{H, P\}$ sont linéaires, il suffit de démontrer la propriété pour P de la forme $P = R_n(M)$, où $M = \mathbf{x}^i \mathbf{y}^j$ est un monôme que nous pouvons supposer invariant par les changements de signes grâce à la Remarque 3.2.10.

Alors la Formule (3.14) peut s'écrire

$$\begin{aligned} |W| E_n(M) &= |W| R_n((\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{x} + \mathbf{z})^i (\mathbf{y} + \mathbf{t})^j) \\ &= \sum_{c \in (\pm 1)^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c \cdot \left[(z_1 y_{\sigma^{-1}(1)} + \cdots + z_n y_{\sigma^{-1}(n)}) \prod_{k=1}^n (z_k + x_{\sigma^{-1}(k)})^{i_k} (t_k + y_{\sigma^{-1}(k)})^{j_k} \right] \\ &\quad - \sum_{c \in (\pm 1)^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c \cdot \left[(t_1 x_{\sigma^{-1}(1)} + \cdots + t_n x_{\sigma^{-1}(n)}) \prod_{k=1}^n (z_k + x_{\sigma^{-1}(k)})^{i_k} (t_k + y_{\sigma^{-1}(k)})^{j_k} \right]. \end{aligned}$$

• Ainsi le coefficient de $z_1 t_1$ est donné par

$$\begin{aligned} |W| c_{z_1 t_1}(M) &= \sum_{c \in (\pm 1)^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c \cdot \left[y_{\sigma^{-1}(1)} \left(\prod_{k=1}^n x_{\sigma^{-1}(k)}^{i_k} \right) j_1 y_{\sigma^{-1}(1)}^{j_1-1} \left(\prod_{k=2}^n y_{\sigma^{-1}(k)}^{j_k} \right) \right. \\ &\quad \left. - x_{\sigma^{-1}(1)} i_1 x_{\sigma^{-1}(1)}^{i_1-1} \left(\prod_{k=2}^n x_{\sigma^{-1}(k)}^{i_k} \right) \left(\prod_{k=1}^n y_{\sigma^{-1}(k)}^{j_k} \right) \right] \\ &= |(\pm 1)^n| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (j_1 - i_1) \left(\prod_{k=1}^n x_{\sigma^{-1}(k)}^{i_k} y_{\sigma^{-1}(k)}^{j_k} \right) \\ &= |W| (j_1 - i_1) R_n(M). \end{aligned}$$

Comme $P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^n x_k^{i_{\sigma(k)}} y_k^{j_{\sigma(k)}}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} n! c_{z_1 t_1}(P) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{z_1 t_1} \left(\prod_{k=1}^n x_k^{i_{\sigma(k)}} y_k^{j_{\sigma(k)}} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (j_{\sigma(1)} - i_{\sigma(1)}) R_n \left(\prod_{k=1}^n x_k^{i_{\sigma(k)}} y_k^{j_{\sigma(k)}} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (j_{\sigma(1)} - i_{\sigma(1)}) R_n(M) = (n-1)! \sum_{k=1}^n (j_k - i_k) R_n(M) \\ &= (n-1)! (\deg_y(M) - \deg_x(M)) R_n(M) = -(n-1)! \{H, P\}. \end{aligned}$$

• On procède comme pour $z_1 t_1$, en désignant par $c_{t_1^2}(P)$ le coefficient de t_1^2 dans $E_n(P)$. On a alors

$$\begin{aligned} |W| c_{t_1^2}(M) &= - \sum_{c \in (\pm 1)^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c \cdot \left[x_{\sigma^{-1}(1)} \left(\prod_{k=1}^n x_{\sigma^{-1}(k)}^{i_k} \right) j_1 y_{\sigma^{-1}(1)}^{j_1-1} \left(\prod_{k=2}^n y_{\sigma^{-1}(k)}^{j_k} \right) \right] \\ &= -|(\pm 1)^n| j_1 \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma^{-1}(1)}^{i_1+1} y_{\sigma^{-1}(1)}^{j_1-1} \left(\prod_{k=2}^n x_{\sigma^{-1}(k)}^{i_k} y_{\sigma^{-1}(k)}^{j_k} \right) \\ &= -|W| j_1 R_n \left(x_1^{i_1+1} y_1^{j_1-1} \left(\prod_{k=2}^n x_k^{i_k} y_k^{j_k} \right) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
n! c_{t_1^2}(P) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{t_1^2} \left(\prod_{k=1}^n x_k^{i_{\sigma(k)}} y_k^{j_{\sigma(k)}} \right) = - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} j_{\sigma(1)} R_n \left(x_1^{i_{\sigma(1)}+1} y_1^{j_{\sigma(1)}-1} \left(\prod_{k=2}^n x_k^{i_{\sigma(k)}} y_k^{j_{\sigma(k)}} \right) \right) \\
&= - \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(1)=p}} j_{\sigma(1)} R_n \left(x_1^{i_{\sigma(1)}+1} y_1^{j_{\sigma(1)}-1} \left(\prod_{k=2}^n x_k^{i_{\sigma(k)}} y_k^{j_{\sigma(k)}} \right) \right) \\
&= -(n-1)! \sum_{p=1}^n j_p R_n \left(x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p+1} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \dots y_p^{j_p-1} \dots y_n^{j_n} \right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
n! \{E, P\} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \{E, x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}} y_1^{j_{\sigma(1)}} \dots y_n^{j_{\sigma(n)}}\} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{p=1}^n j_{\sigma(p)} x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_p^{i_{\sigma(p)}+1} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}} y_1^{j_{\sigma(1)}} \dots y_p^{j_{\sigma(p)}-1} \dots y_n^{j_{\sigma(n)}} \\
&= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(p)=q}} j_{\sigma(p)} x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_p^{i_{\sigma(p)}+1} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}} y_1^{j_{\sigma(1)}} \dots y_p^{j_{\sigma(p)}-1} \dots y_n^{j_{\sigma(n)}} \\
&= \sum_{q=1}^n j_q \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(p)=q}} x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_p^{i_{\sigma(p)}+1} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}} y_1^{j_{\sigma(1)}} \dots y_p^{j_{\sigma(p)}-1} \dots y_n^{j_{\sigma(n)}} \\
&= n! \sum_{q=1}^n j_q R_n \left(x_1^{i_1} \dots x_q^{i_q+1} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \dots y_q^{j_q-1} \dots y_n^{j_n} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi $c_{t_1^2}(P) = \frac{-1}{n} \{E, P\}$. De la même façon, on montre que $c_{z_2^2}(P) = \frac{1}{n} \{F, P\}$. ■

Corollaire 3.2.12

- Soit $P \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^W$. Si P vérifie l'Equation (3.14), alors P est annulé par \mathfrak{sl}_2 , i. e. $P \in S_{\mathfrak{sl}_2}^W$.
- Par conséquent, l'espace vectoriel \mathcal{L}_j est isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes $P \in S_{\mathfrak{sl}_2}^W(j)$ vérifiant l'Equation (3.14).

Donc la détermination de $\frac{S^W}{\{S^W, S^W\}} \left(= \frac{S_{\mathfrak{sl}_2}^W}{\{S^W, S^W\} \cap S_{\mathfrak{sl}_2}^W} \right)$ est équivalente à la résolution, dans $S_{\mathfrak{sl}_2}^W$, de l'Equation (3.14).

Démonstration :

Soit $P \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^W$ un polynôme invariant vérifiant l'Equation (3.14). Alors tous les coefficients du polynôme $E_n(P) \in (\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])[\mathbf{z}, \mathbf{t}]$ sont nuls. En particulier, d'après la Proposition 3.2.11, $\{H, P\} = \{E, P\} = \{F, P\} = 0$. D'où $P \in S_{\mathfrak{sl}_2}^W$.

Le second point du corollaire résulte du Corollaire 3.2.9 et du premier point qui vient d'être établi. ■

Nous terminons ce paragraphe en définissant deux variantes de l'Equation de Berest-Etingof-Ginzburg : ce sont des outils techniques qui permettront d'éliminer des variables et donc de résoudre plus facilement l'Equation (3.14).

Définition 3.2.13

On définit l'application (intermédiaire)

$$\begin{aligned} s_{int}^n : \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}] &\rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}] \\ P &\mapsto P(\mathbf{0} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z} \ t_1, \mathbf{0}), \end{aligned}$$

et on pose

$$E_{int}^n(P) := s_{int}^n(E_n(P)). \quad (3.19)$$

De même, on définit l'application

$$\begin{aligned} s_n : \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}] &\rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}] \\ P &\mapsto P(\mathbf{0} \ y_1, \mathbf{0} \ \mathbf{z} \ t_1, \mathbf{0}), \end{aligned}$$

et on pose

$$E'_n(P) := s_n(E_n(P)). \quad (3.20)$$

La dernière équation est l'Equation (3.14) après la substitution

$$x_1 = \cdots = x_n = y_2 = \cdots = y_n = t_2 = \cdots = t_n = 0.$$

Remarque 3.2.14

Si P vérifie l'Equation (3.14), il vérifie a fortiori l'Equation (3.20).

Dans le cas où n est un entier impair, les vecteurs de plus haut poids 0 de degré pair sont les mêmes pour B_n et D_n , et les Equations (3.20) sont identiques pour les deux types. De plus, le lien entre les Equations (3.14) pour B_n et D_n permet de démontrer l'inégalité $\dim HP_0(D_n) \leq \dim HP_0(B_n)$. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 3.2.15

Par abus de notation, on désigne par $S^{B_n}(2p)$ (resp. $S^{D_n}(2p)$) l'ensemble des éléments invariants de degré $2p$ pour le type B_n (resp. D_n).

Alors on a $S^{B_{2n+1}}(2p) = S^{D_{2n+1}}(2p)$, $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_{2n+1}}(p) = S_{\mathfrak{sl}_2}^{D_{2n+1}}(p)$, et les Equations (3.20) dans $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_{2n+1}} = S_{\mathfrak{sl}_2}^{D_{2n+1}}$ associées aux deux types sont les mêmes.

Ce résultat n'est pas vrai pour les indices pairs : contre-exemple : $\dim S_{\mathfrak{sl}_2}^{D_4}(6) = 1$, alors que $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_4}(6) = \{0\}$.

Démonstration :

- On pose

$$\Phi_{2n+1}(P) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1}} \sigma \cdot P, \quad \Psi_{2n+1}^B(P) = \sum_{g \in (\pm 1)^{2n+1}} g \cdot P, \quad \Psi_{2n+1}^D(P) = \sum_{g \in (\pm 1)^{2n}} g \cdot P,$$

de sorte que

$$R_{2n+1}^B(P) = \frac{1}{|B_{2n+1}|} \Phi_{2n+1} \circ \Psi_{2n+1}^B, \quad \text{et} \quad R_{2n+1}^D(P) = \frac{1}{|D_{2n+1}|} \Phi_{2n+1} \circ \Psi_{2n+1}^D.$$

On a évidemment $\Psi_{2n+1}^B(S(2p)) \subset \Psi_{2n+1}^D(S(2p))$.

Réciproquement, puisque $\Psi_{2n+1}^D(S(2p))$ est engendré par les éléments de la forme $\Psi_{2n+1}^D(\mathbf{m})$ avec \mathbf{m} monôme appartenant à $S(2p)$, il suffit de montrer que $\Psi_{2n+1}^D(\mathbf{m})$ appartient à $\Psi_{2n+1}^B(S(2p))$, i. e. $\Psi_{2n+1}^D(\mathbf{m})$ est invariant par les changements de signes. Or $\mathbf{m} = x_1^{i_1} \dots x_{2n+1}^{i_{2n+1}} y_1^{j_1} \dots y_{2n+1}^{j_{2n+1}}$ avec $\sum_{k=1}^{2n+1} (i_k + j_k) = 2p$, donc au moins l'un des $i_k + j_k$ est pair. Notons l l'indice correspondant. Ainsi, pour tout $k \neq l$, on a $s_k(\mathbf{m}) = (-1)^{i_k + j_k} \mathbf{m} = s_{k,l}(\mathbf{m})$ et $s_l(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$. Or

$$\Psi_{2n+1}^D(\mathbf{m}) = \underbrace{\left(\sum_{q_1=0,1 \dots q_{2n+1}=0,1} (-1)^{q_1[(i_1+j_1)+(i_2+j_2)]+q_2[(i_2+j_2)+(i_3+j_3)]+\dots+q_{2n}[(i_{2n}+j_{2n})+(i_{2n+1}+j_{2n+1})]} \right)}_{a_{\mathbf{m}}} \mathbf{m},$$

$$\text{donc } s_k(\Psi_{2n+1}^D(\mathbf{m})) = \begin{cases} a_{\mathbf{m}} s_{k,l}(\mathbf{m}) = s_{k,l}(a_{\mathbf{m}} \mathbf{m}) = s_{k,l}(\Psi_{2n+1}^D(\mathbf{m})) & \text{si } k \neq l \\ a_{\mathbf{m}} \mathbf{m} & \text{si } k = l \end{cases} = \Psi_{2n+1}^D(\mathbf{m}).$$

• Ainsi on a $S^{D_n}(2p) = \Phi_{2n+1}(\Psi_{2n+1}^D(S(2p))) = \Phi_{2n+1}(\Psi_{2n+1}^B(S(2p))) = S^{B_n}(2p)$.

D'où $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_n}(2p) = S_{\mathfrak{sl}_2}^{D_n}(2p)$. En outre, d'après la Proposition 3.2.4, $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_n}(2p+1) = S_{\mathfrak{sl}_2}^{D_n}(2p+1)$ est nul.

• Pour $P \in S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_n}$, l'Equation (3.20) s'écrit

$$\sum_{i=1}^{2n+1} z_i \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(1)=i}} \left[y_1 P(z_1, \dots, z_{2n+1}, t_1, 0, \dots, 0, \underbrace{y_1}_i, 0, \dots, 0) - y_1 P(z_1, \dots, z_{2n+1}, t_1, 0, \dots, 0, \underbrace{-y_1}_i, 0, \dots, 0) \right] = 0.$$

C'est exactement l'Equation (3.20) pour $P \in S_{\mathfrak{sl}_2}^{D_n}$. ■

Proposition 3.2.16

Soit P invariant par changements de signes. Si P est solution de l'Equation (3.14) pour D_n , alors P est solution de l'Equation (3.14) pour B_n .

En particulier, on a $\dim HP_0(D_{2n+1}) \leq \dim HP_0(B_{2n+1})$.

Démonstration :

Soit SB_n (resp. SD_n) le groupe des changements de signes de B_n (resp. D_n). On peut écrire $SB_n = SD_n \sqcup SD_n \cdot s_1$.

Soit P invariant par changements de signes. Ainsi on a $P = R_n^B(P) = R_n^D(P)$, et l'Equation (3.14) pour B_n (resp. D_n) s'écrit $E_n^B(P) = R_n^B(Q)$ (resp. $E_n^D(P) = R_n^D(Q)$), avec

$$Q = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) P(\mathbf{x} + \mathbf{z} \mathbf{y} + \mathbf{t}).$$

Si P est solution de l'Equation (3.14) pour D_n , alors on a :

$$\begin{aligned} R_n^B(Q) &= \sum_{h \in SB_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\sigma h) \cdot Q = \sum_{h \in SB_n} h \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot Q \right) \\ &= \sum_{g \in SD_n} g \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot Q \right) + \sum_{g \in SD_n} (g s_1) \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot Q \right) \\ &= \sum_{g \in SD_n} g \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot Q \right) + s_1 \cdot \left[\sum_{g \in SD_n} g \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot Q \right) \right] \\ &= R_n^D(Q) + s_1 \cdot R_n^D(Q) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, P est solution de l'Equation (3.14) pour B_n .

On en déduit l'inégalité annoncée, sachant que, d'après la Proposition 3.2.15, $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_{2n+1}} = S_{\mathfrak{sl}_2}^{D_{2n+1}}$. ■

3.2.4 Construction de graphes associés aux polynômes invariants

Rappelons l'égalité de la Proposition 3.2.7 : $S_{\mathfrak{sl}_2}^W = R_n(\mathbb{C}\langle X_{i,j} \rangle)$. De plus, d'après le Corollaire 3.2.12, le calcul de $HP_0(S^W)$ se ramène à la résolution de l'Equation (3.14) dans l'espace $S_{\mathfrak{sl}_2}^W$.

Pour avoir des notations plus succinctes et plus visuelles, nous allons représenter les polynômes de cet espace par des graphes, selon la méthode expliquée dans la Définition 3.2.20.

Mais citons auparavant, dans le cas particulier qui nous intéresse, le résultat fondamental établi par J. Alev, M. A. Farinati, T. Lambre et A. L. Solotar dans [AFLS00] :

Théorème 3.2.17 (*Alev-Farinati-Lambre-Solotar*)

Pour $k = 0 \dots 2n$, la dimension de $HH_k(A_n(\mathbb{C})^W)$ est le nombre de classes de conjugaison de W admettant la valeur propre 1 avec la multiplicité k .

En appliquant ce résultat aux cas de B_n et D_n , on obtient :

Corollaire 3.2.18 (*Alev-Farinati-Lambre-Solotar*)

- Pour le type B_n , la dimension de $HH_0(A_n(\mathbb{C})^W)$ est le nombre de partitions $\pi(n)$ de l'entier n .
- Pour le type D_n , la dimension de $HH_0(A_n(\mathbb{C})^W)$ est le nombre de partitions $\tilde{\pi}(n)$ de l'entier n ayant un nombre pair de parts.

La conjecture de J. Alev peut alors être énoncée comme suit :

Conjecture 3.2.19 (*Alev*)

- Pour le type B_n , la dimension de $HP_0(S^W)$ est égale au nombre de partitions $\pi(n)$ de l'entier n .
- Pour le type D_n , la dimension de $HP_0(S^W)$ est égale au nombre de partitions $\tilde{\pi}(n)$ de l'entier n ayant un nombre pair de parts.

Montrons maintenant comment construire $\pi(n)$ solutions de l'Equation (3.14) dans le cas de B_n .

Définition 3.2.20

Pour $i \neq j$, on note $X_{i,j} = x_i y_j - y_i x_j$.

A chaque élément de la forme $M := \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n X_{i,j}^{2a_{i,j}}$, nous associons le graphe (non-orienté)

$\widetilde{\Gamma}_M$ tel que

▷ l'ensemble des sommets de $\widetilde{\Gamma}_M$ est l'ensemble des indices

$$\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket / \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket / a_{i,k} \neq 0 \text{ ou } a_{k,i} \neq 0\},$$

▷ deux sommets i, j de $\widetilde{\Gamma}_M$ sont reliés par une arête $i \xrightarrow{a_{i,j}} j$ si $a_{i,j} \neq 0$.

- Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors le graphe $\widetilde{\Gamma_{\sigma \cdot M}}$ est obtenu par permutation des sommets de $\widetilde{\Gamma_M}$. Ainsi, en remplaçant chaque sommet par le symbole \bullet , nous obtenons un graphe Γ_M tel que l'application $M \mapsto \Gamma_M$ est constante sur toute orbite sous l'action de B_n (resp. D_n). Nous pouvons donc associer ce graphe à l'élément $R_n \left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n X_{i,j}^{2a_{i,j}} \right)$.
A toute combinaison linéaire $\sum_{k=1}^p \alpha_k R_n(M_k)$, nous associons le graphe $\sum_{k=1}^p \alpha_k \Gamma_{M_k}$.
- On peut étendre cette définition aux éléments de la forme $M := \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n X_{i,j}^{b_{i,j}}$ en représentant une arête par $\bullet \xrightarrow{\frac{b_{i,j}}{2}} \bullet$ si $b_{i,j}$ est pair et par $\bullet \xrightarrow{\frac{b_{i,j}+1}{2}} \bullet$ si $b_{i,j}$ est impair. Attention ! On a par exemple $\bullet \xrightarrow{\dots} \bullet = 0$.

Exemple 3.2.21

Le polynôme $R_4(X_{1,2}^4 X_{1,3}^2 X_{1,4}^2)$ est représenté par le graphe $\bullet \equiv \bullet \text{---} \bullet$.



- Si un graphe contient seulement des arêtes paires (i. e. de la forme $\bullet \xrightarrow{a_{i,j}} \bullet$), alors il est représenté dans B_n et dans D_n par le même élément. Ce résultat n'est plus vrai dans le cas des graphes qui contiennent des arêtes impaires : par exemple, l'élément $\bullet \xrightarrow{\dots} \bullet$ est nul dans B_4 , mais non nul dans D_4 .



Remarque 3.2.22

Les graphes correspondant à des polynômes obtenus par application de l'opérateur de Reynolds R_n pour différents indices n à un même élément de l'algèbre engendrée par les $X_{i,j}$ sont les mêmes. Par exemple, les éléments $R_3(X_{1,2}^2)$ et $R_{44}(X_{1,2}^2)$ sont représentés de cette façon par le même graphe $\bullet \text{---} \bullet$. Les Propositions 3.2.24 et 3.2.25 montrent que cela n'a pas d'effet sur l'étude de l'Equation (3.14) pour B_n .

Proposition 3.2.23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de graphes linéaires sans boucle et sans sommet isolé est égal au nombre de partitions de n (une arête multiple est considérée comme une boucle).

Démonstration :

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On note $G(n)$ l'ensemble des graphes linéaires sans boucle et sans sommet isolé ayant au plus n sommets. On complète tout élément $\delta \in G(n)$ en un graphe $\widehat{\delta}$ ayant n sommets en lui ajoutant des sommets isolés. L'ensemble $\widehat{G(n)}$ ainsi obtenu est en bijection avec $G(n)$.

A toute partition p de n , on associe un élément $\gamma(p) \in \widehat{G(n)}$ comme suit :

- ▷ A la partition $n = 1 + \dots + 1$, on associe le graphe $\widehat{\bullet} = \bullet \dots \bullet$.
- ▷ A toute partition p de la forme $n = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + np_n$, on associe le graphe $\gamma(p) = \widehat{\delta}$, où δ est l'élément de $G(n)$ ayant p_j composantes connexes à j sommets. La complétion ajoute ici p_1 sommets isolés à δ .

Par exemple, on a

$$G(4) = \{\bullet, \bullet \text{ --- } \bullet, \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet, \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet, \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet\},$$

et si $\delta = \bullet \text{ --- } \bullet$, alors γ est complété en $\widehat{\delta} = \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet$, et ce graphe est associé à la partition $4 = 2 + 1 + 1$ de l'entier 4.

L'application γ ainsi définie est une bijection de l'ensemble des partitions de n sur l'ensemble $\widehat{G}(n)$. ■

Proposition 3.2.24

- Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$. Si $R_n(P) \neq 0$, alors $R_{n+1}(P) \neq 0$.
- Soient $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$. Si $R_n(P_1), \dots, R_n(P_m)$ sont linéairement indépendants, alors $R_{n+1}(P_1), \dots, R_{n+1}(P_m)$ sont linéairement indépendants.

Démonstration :

- On effectue la démonstration pour B_n . On procéderait de la même façon pour D_n .

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ tel que $R_n(P) \neq 0$. D'après la Remarque 3.2.10, on peut supposer que les termes de P sont invariants par changements de signes.

On considère l'ensemble \mathcal{T}_n des termes de $R_n(P)$ que l'on partitionne en orbites sous l'action de \mathfrak{S}_n : ainsi on a l'égalité $\mathcal{T}_n = \coprod_{j=1}^r \mathcal{O}_j$. Par conséquent, on peut écrire

$$R_n(P) = \sum_{j=1}^r \alpha_j R_n(M_j),$$

où $M_j \in \mathcal{O}_j$.

Soient $c_{n+1} := (1, \dots, n+1) \in \mathfrak{S}_{n+1}$, et s_{n+1} le $(n+1)$ -ème changement de signe, de sorte que $B_{n+1} = \langle s_{n+1}, c_{n+1} \rangle \cdot B_n$. A nouveau, par invariance par changements de signes, on en déduit

$$R_{n+1}(P) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^r \alpha_j \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n c_{n+1}^k \cdot R_n(M_j) \right)}_{t_j}.$$

Or si $i \neq j$, alors t_i et t_j appartiennent à deux orbites distinctes sous l'action de \mathfrak{S}_{n+1} , donc les t_j sont linéairement indépendants. Ainsi $R_{n+1}(P) \neq 0$.

- Soient $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ tels que $R_n(P_1), \dots, R_n(P_m)$ soient linéairement indépendants. Considérons une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^m \lambda_j R_{n+1}(P_j) = 0$, i. e. $R_{n+1} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \right) = 0$. Alors, d'après le premier point, on a

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j R_n(P_j) = R_n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \right) = 0,$$

donc par hypothèse, $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\lambda_j = 0$. ■

La proposition suivante montre que, pour un graphe, le fait d'être solution de l'Equation (3.14) pour B_n est indépendant de n , pourvu que n soit au moins égal au nombre de sommets du graphe ! Cette proposition justifie le fait que la notation des graphes est indépendante de n .

Proposition 3.2.25

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$.

- Cas de B_n : si $R_n(P)$ vérifie l'équation $E_n(R_n(P)) = 0$,
alors $R_{n+1}(P) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1}]$ vérifie l'équation $E_{n+1}(R_{n+1}(P)) = 0$.
- Cas de D_n : si $R_n(P)$ vérifie l'équation $E_n(R_n(P)) = 0$,
alors $R_{n+2}(P) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+2}, y_1, \dots, y_{n+2}]$ vérifie l'équation $E_{n+2}(R_{n+2}(P)) = 0$.

Démonstration :

On effectue la démonstration pour B_n ; on procéderait de même pour D_n .

D'après la Remarque 3.2.10, on peut supposer que P est invariant par changements de signes.
Pour tout $n \geq 2$, on note $Q_n := R_n(P)$. Alors

$$E_{n+1}(Q_{n+1}) = R_{n+1} \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k y_k - t_k x_k \right) Q_{n+1}(x_1 + z_1, \dots, x_{n+1} + z_{n+1}, y_1 + t_1, \dots, y_{n+1} + t_{n+1}) \right).$$

Soient $c_{n+1} := (1, \dots, n+1) \in \mathfrak{S}_{n+1}$, et s_{n+1} le $(n+1)$ -ème changement de signe, de sorte que $B_{n+1} = \langle s_{n+1}, c_{n+1} \rangle \cdot B_n$. Alors on peut écrire

$$Q_{n+1} = R_{n+1}(P) = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{\substack{i=0,1 \\ j=1 \dots n+1}} (s_{n+1}^i c_{n+1}^j) \cdot Q_n.$$

Or les polynômes $(s_{n+1}^i c_{n+1}^j) \cdot Q_n$ ne contiennent que les indices $1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1$, donc $(z_j y_j - t_j x_j)(s_{n+1}^i c_{n+1}^j) \cdot Q_n$ est dans le noyau de R_{n+1} . Ainsi,

$$E_{n+1}(Q_{n+1}) = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{\substack{i=0,1 \\ j=1 \dots n+1}} R_{n+1} \left[\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} z_k y_k - t_k x_k \right) \left((s_{n+1}^i c_{n+1}^j) \cdot Q_n \right) (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \right],$$

i. e.

$$\begin{aligned} E_{n+1}(Q_{n+1}) &= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{\substack{i=0,1 \\ j=1 \dots n+1}} R_{n+1} \left[(\widetilde{s_{n+1}^i c_{n+1}^j}) \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^n z_k y_k - t_k x_k \right) Q_n(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} R_{n+1} \left[\widetilde{c_{n+1}^j} \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^n z_k y_k - t_k x_k \right) Q_n(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \right) \right], \end{aligned}$$

où $\widetilde{s_{n+1}}$ et $\widetilde{c_{n+1}}$ agissent sur les $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}$ comme s_{n+1} et c_{n+1} agissent sur les \mathbf{x}, \mathbf{y} . (Dans la deuxième égalité, on a utilisé l'invariance par changements de signes de P).

En indexant les variables par $\llbracket 1, n \rrbracket$ au lieu de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{j\}$, on note que chaque terme de cette somme est par hypothèse dans le noyau de R_n , donc dans le noyau de R_{n+1} . Ainsi, $E_{n+1}(Q_{n+1}) = 0$. ■

Corollaire 3.2.26

La suite $(\dim HP_0(B_n))_{n \geq 2}$ est croissante.

Les suites $(\dim HP_0(D_{2n}))_{n \geq 1}$ et $(\dim HP_0(D_{2n+1}))_{n \geq 1}$ sont croissantes.

La Proposition 3.2.27 est fondamentale pour la construction des solutions de l'Equation de Berest-Etingof-Ginzburg pour B_n .

Proposition 3.2.27

Si $R_i(P)$ et $R_j(Q)$ vérifient l'Equation (3.14), et si leurs ensembles d'indéterminées sont disjoints, alors $R_{i+j}(PQ)$ vérifie l'Equation (3.14).

En termes de graphes, cela signifie que si deux graphes disjoints vérifient l'Equation (3.14), alors leur réunion vérifie aussi cette équation.

Ainsi il suffit que les composantes connexes d'un graphe vérifient l'Equation (3.14) pour que le graphe lui-même la vérifie.

Démonstration :

- Soient $R_i(P)$ et $R_j(Q)$ dont les ensembles d'indéterminées sont disjoints.

On note $E_P := \{x_k, k \in I_P\} \cup \{y_k, k \in I_P\}$ (resp. $E_Q := \{x_k, k \in I_Q\} \cup \{y_k, k \in I_Q\}$) l'ensemble des indéterminées de P (resp. Q), et on pose $n := i + j$, de sorte que l'on a $|E_P| = 2i$, $|E_Q| = 2j$, $I_P \sqcup I_Q = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbb{C}[E_P, E_Q] = \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Le groupe B_i (resp. B_j) agit seulement sur les indéterminées de E_P (resp. E_Q).

Calculons $R_n(PQ)$:

$$\begin{aligned}
 |B_n|R_n(PQ) &= \frac{1}{|B_i||B_j|} \sum_{g \in B_i} \sum_{h \in B_j} \sum_{\sigma \in B_n} (gh\sigma) \cdot (PQ) \\
 &= \frac{1}{|B_i||B_j|} \sum_{\sigma \in B_n} \sigma \cdot \left[\sum_{g \in B_i} \sum_{h \in B_j} \underbrace{(h \cdot (g \cdot P))}_{g \cdot P} \underbrace{(h \cdot (g \cdot Q))}_{h \cdot Q} \right] \\
 &= \frac{1}{|B_i||B_j|} \sum_{\sigma \in B_n} \sigma \cdot \left[\left(\sum_{g \in B_i} g \cdot P \right) \left(\sum_{h \in B_j} h \cdot Q \right) \right] \\
 &= \sum_{\sigma \in B_n} \sigma \cdot [R_i(P)R_j(Q)] \\
 &= |B_n|R_n(R_i(P)R_j(Q)).
 \end{aligned}$$

D'où $R_n(PQ) = R_n(R_i(P)R_j(Q))$.

- Si $R_i(P)$ et $R_j(Q)$ vérifient en outre l'Equation (3.14), on a

$$\begin{aligned}
 &(\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) [R_n(PQ)] (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \\
 &= \frac{1}{|B_n|} \sum_{\sigma \in B_n} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) [\sigma \cdot (R_i(P)R_j(Q))] (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \\
 &= \frac{1}{|B_n|} \sum_{\sigma \in B_n} \left[\underbrace{\left(\sum_{k \in \sigma^{-1}(I_P)} z_k y_k - t_k x_k \right)}_{A_{P,\sigma}} [\sigma \cdot R_i(P)] (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \underbrace{[\sigma \cdot R_j(Q)] (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t})}_{A_{Q,\sigma}} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left(\sum_{k \in \sigma^{-1}(I_Q)} z_k y_k - t_k x_k \right)}_{B_{Q,\sigma}} [\sigma \cdot R_j(Q)] (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) \underbrace{[\sigma \cdot R_i(P)] (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t})}_{B_{P,\sigma}} \right],
 \end{aligned}$$

où les éléments $A_{P,\sigma}$ et $B_{P,\sigma}$ (resp. $A_{Q,\sigma}$ et $B_{Q,\sigma}$) ne contiennent que les indices de $\sigma^{-1}(I_P)$ (resp. $\sigma^{-1}(I_Q)$).

• Montrons que $A_{P,\sigma}A_{Q,\sigma}$ est dans le noyau de R_n :

$$\begin{aligned}
 |B_n| R_n(A_{P,\sigma}A_{Q,\sigma}) &= \sum_{g \in B_n} g \cdot (A_{P,\sigma}A_{Q,\sigma}) \\
 &= \frac{1}{|B_i|} \sum_{h \in B_i} \sum_{g \in hB_n} g \cdot (A_{P,\sigma}A_{Q,\sigma}) \\
 &= \frac{1}{|B_i|} \sum_{g \in B_n} g \cdot \left(\sum_{h \in B_i} h \cdot (A_{P,\sigma}A_{Q,\sigma}) \right) \\
 &= \frac{1}{|B_i|} \sum_{g \in B_n} g \cdot \left(\left(\sum_{h \in B_i} h \cdot A_{P,\sigma} \right) A_{Q,\sigma} \right) \\
 &= \sum_{g \in B_n} g \cdot \left(\underbrace{R_i(A_{P,\sigma})}_{=0} A_{Q,\sigma} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que $R_i(P)$ vérifie l'Equation (3.14).

De même, $B_{P,\sigma}B_{Q,\sigma}$ est dans le noyau de R_n . D'où $(\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) [R_n(PQ)] (\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{t}) = 0$. ■

Ainsi la Proposition 3.2.27 donne un moyen de construire des solutions de l'Equation (3.14) pour B_n à partir de solutions déjà connues de cette équation pour B_m avec $m < n$, en prenant les unions disjointes des graphes solutions. En effet, d'après la Proposition 3.2.25, si un graphe est solution pour B_m , alors il est aussi solution pour B_n avec $n > m$.

Nous pouvons donc formuler la conjecture suivante :

Conjecture 3.2.28

Pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique polynôme de degré $4(n-1)$ dans $S_{\text{sl}_2}^W$ (i. e. une combinaison linéaire de graphes à $n-1$ arêtes) qui est solution de l'Equation (3.14). Ce polynôme est représenté par un graphe qui est formé du graphe linéaire sans boucle et sans sommet isolé à $n-1$ arêtes et n sommets, et d'autres graphes que l'on peut voir comme des termes correctifs, et qui ont tous $n-1$ arêtes et n sommets (non isolés).

Ce graphe est appelé n -ème graphe simple.

Le nombre de graphes que nous pouvons construire à partir des graphes simples en utilisant la Proposition 3.2.27 est égal au nombre de graphes linéaires sans boucle et sans sommet isolé de la Proposition 3.2.23, puisque les graphes ainsi construits sont obtenus en substituant, à certains graphes linéaires sans boucle et sans sommet isolé, une combinaison linéaire de graphes contenant ce graphe et d'autres graphes (éventuellement non linéaires ou avec boucles), qui ont le même nombre de sommets et le même nombre d'arêtes.

Grâce à des calculs effectués avec **Maple**, on détermine la liste des premiers graphes simples :

Conjecture 3.2.29
Pour tout entier $n \geq 2$, les $\pi(n)$ graphes construits selon le processus décrit ci-dessus sont les seules solutions de l'Equation (3.14).

D_n	Solutions de l'Equation (3.14)			
D_2	1			
D_3	1			
D_4	1	$\bullet - \bullet$	$\bullet - \bullet \quad \bullet - \bullet$	$-2 \bullet - \bullet - \bullet$

Nous appliquons maintenant aux cas B_2 , D_2 , B_3 et D_3 les résultats établis précédemment pour le cas général. Cela permettra de calculer explicitement la dimension de leur 0-ème espace d'homologie de Poisson, en traitant ainsi entièrement le rang 3, et en même temps de vérifier la conjecture de J. Alek pour ce rang.

3.3.1 Etude de B_2 et D_2

Le calcul de la dimension du 0-ème espace d'homologie de Poisson dans le cas de B_2 a été effectué par J. Alev et L. Foissy dans [AF09]. Ici, nous retrouvons ce résultat par une autre méthode. Nous en déduisons la dimension du 0-ème espace d'homologie de Poisson dans le cas de D_2 .

Proposition 3.3.1

Pour B_2 , l'espace des solutions de l'Equation (3.14) est le plan engendré par les polynômes 1 et $(x_1y_2 - y_1x_2)^2$. Ainsi, la dimension du 0-ème espace d'homologie de Poisson de B_2 est $\dim(HP_0(B_2)) = 2$.

Les éléments 1 et $(x_1y_2 - y_1x_2)^2$ n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$.

Démonstration :

- Soit $X = x_1y_2 - y_1x_2$. On a $\mathbb{C}[X] \subset S_{\mathfrak{sl}_2}$. Or d'après la Proposition 3.2.6, on a $\dim(S(2l)_{\mathfrak{sl}_2}) = 1$ donc la série de Poincaré de $S_{\mathfrak{sl}_2}$ est $\frac{1}{1-z^2}$. Cette série est exactement la série de Poincaré de $\mathbb{C}[X]$, d'où $S_{\mathfrak{sl}_2} = \mathbb{C}[X]$. Par conséquent, $S_{\mathfrak{sl}_2}^W = \mathbb{C}[X]^W = R_2(\mathbb{C}[X]) = \mathbb{C}[X^2]$.
- D'après la Proposition 3.2.3, les éléments 1 et X^2 n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$. On montre par un calcul direct (par exemple avec **Maple**; voir le Paragraphe 3.5 consacré au calcul formel) que l'élément X^2 vérifie l'Equation (3.14).
- Pour avoir le résultat annoncé, il suffit, d'après le Corollaire 3.2.12, de montrer que pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'élément X^{2j} ne vérifie pas l'Equation (3.14), i. e. $E_2(X^{2j}) \neq 0$. Pour cela, il suffit, d'après la Remarque 3.2.14, de montrer que $E'_2(X^{2j}) \neq 0$. De l'expression

$$E_{int}^2(X^{2j}) = z_1 R_2(y_1((x_1+z_1)y_2 - (y_1+t_1)(x_2+z_2))^{2j}) + z_2 R_2(y_2((x_1+z_1)y_2 - (y_1+t_1)(x_2+z_2))^{2j}),$$

on déduit

$$E'_2(X^{2j}) = \frac{1}{8} z_1 \sum_{\text{chgts de sgn}} y_1(-(y_1+t_1)z_2)^{2j} + \frac{1}{8} z_2 \sum_{\text{chgts de sgn}} y_1(z_1y_1 - t_1z_2)^{2j},$$

i. e.

$$E'_2(X^{2j}) = \frac{1}{4} [z_1 y_1 z_2^{2j} (y_1+t_1)^{2j} - z_1 y_1 z_2^{2j} (-y_1+t_1)^{2j} + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} - z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j}].$$

Ainsi le terme du type $\alpha z_1 t_1 y_1^{2j} z_2^{2j}$ est $\frac{1}{4} z_1 y_1 z_2^{2j} (C_{2j}^1 y_1^{2j-1} t_1) - \frac{1}{4} z_1 y_1 z_2^{2j} (-C_{2j}^1 y_1^{2j-1} t_1)$, et on trouve $\alpha = j \neq 0$. Cela prouve que X^{2j} ne vérifie pas l'Equation (3.14). ■

Proposition 3.3.2

Pour $D_2 = A_1 \times A_1$, l'espace des solutions de l'Equation (3.14) est la droite engendrée par 1. Ainsi la dimension du 0-ème espace d'homologie de Poisson de D_2 est 1, i. e. $\dim(HP_0(D_2)) = 1$.

L'élément 1 est le seul élément qui n'appartient pas à $\{S^W, S^W\}$.

Démonstration :

La méthode est la même que pour B_2 : en posant $X = x_1y_2 - y_1x_2$, on a $S_{\mathfrak{sl}_2}^W = \mathbb{C}[X^2]$. D'après la Proposition 3.2.3, l'élément 1 n'appartient pas à $\{S^W, S^W\}$. On montre par un calcul (voir le Paragraphe 3.5) que l'élément X^2 ne vérifie pas l'Equation (3.14).

Ainsi il suffit, d'après le Corollaire 3.2.12, de montrer que pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $E'_2(X^{2j}) \neq 0$. Or cette expression est la même que celle qui a été obtenue pour B_2 ; elle est donc non nulle. ■

3.3.2 Etude de B_3 — Vecteurs de plus haut poids 0

Pour étudier le type B_3 , nous commençons par expliciter les vecteurs de plus haut poids 0.

Proposition 3.3.3

On pose $X = x_1y_2 - y_1x_2$, $Y = x_2y_3 - y_2x_3$ et $Z = x_3y_1 - y_3x_1$.

Alors $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_3}$ est l'image de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ par R_3 .

Démonstration :

D'après la Proposition 3.2.7, on a $\mathbb{C}[X, Y, Z] = S_{\mathfrak{sl}_2}$, donc $\mathbb{C}[X, Y, Z]^{B_3} = S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_3}$.

Remarque 3.3.4

Les seuls monômes $X^iY^jZ^k$ ($i, j, k \in \mathbb{N}^3$) dont l'image par R_3 est non nulle sont

▷ les monômes de la forme $X^iY^jZ^k$ avec i, j, k pairs,

▷ les monômes de la forme $X^iY^jZ^k$ avec i, j, k impairs et deux à deux distincts. Pour ces monômes, il suffit de prendre $i < j < k$.

Ainsi le vecteur de plus haut poids 0 de plus petit degré non multiple de 4 est de degré 18.

Proposition 3.3.5

Les éléments 1 et $R_3(X^2)$ n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$.

Les éléments 1, $R_3(X^2)$ et $R_3(X^2Y^2)$ vérifient l'Equation (3.14).

Ainsi, $\dim(HP_0(B_3)) \geq 3$.

Démonstration :

Nous savons d'après la Proposition 3.2.3 que les éléments 1 et $R_3(X^2)$ n'appartiennent pas à $\{S^W, S^W\}$.

Un calcul (voir le Paragraphe 3.5) montre que les éléments $R_3(X^2)$ et $R_3(X^2Y^2)$ vérifient l'Equation (3.14). ■

Pour démontrer l'égalité $\dim(HP_0(B_3)) = 3$, nous allons montrer que les éléments de $S_{\mathfrak{sl}_2}^{B_3}$ qui n'appartiennent pas à l'espace $\langle 1, R_3(X^2), R_3(X^2Y^2) \rangle$ ne vérifient pas l'Equation (3.14), et en fait, d'après la Remarque 3.2.14, qu'ils ne vérifient pas l'Equation (3.20). C'est le but du paragraphe suivant.

3.3.3 Etude de B_3 — Equation de Berest-Etingof-Ginzburg

A tout polynôme de la forme $P := R_3(X^iY^jZ^k)$ spécifiée dans la Remarque 3.3.4, nous associons un monôme M_P qui apparaît avec un coefficient non nul dans l'Equation (3.20), et tel que si P_1 et P_2 sont deux polynômes distincts, alors le monôme M_{P_1} n'apparaît pas dans $E'_n(P_2)$ et le monôme M_{P_2} n'apparaît pas dans $E'_n(P_1)$, où $E'_n(P)$ représente l'Equation (3.20).

▷ Au polynôme $R_3(X^{2j})$ (avec $j \geq 2$), on associe le monôme $M_j = z_1t_1y_1^{2j}z_3^{2j}$.

▷ Au polynôme $R_3(X^{2j}Y^{2l})$ (avec $1 \leq l \leq j$ et $j \geq 2$), on associe $M_{j,l} = z_1 t_1 y_1^{2j+2l} z_3^{2j} z_2^{2l}$.

▷ Au polynôme $R_3(X^{2j}Y^{2l}Z^{2k})$ (avec $1 \leq l \leq k \leq j$), on associe

$$M_{j,k,l} = z_1 t_1 y_1^{2j+2l} z_3^{2j+2k} z_2^2 t_1^{2k} z_1^{2l-2}.$$

▷ Au polynôme $R_3(X^{2i+1}Y^{2j+1}Z^{2k+1})$ (avec $0 \leq i < j < k$), on associe

$$\widetilde{M}_{k,j,i} = z_1 t_1 y_1^{2i+2k+2} z_3^{2j+2k+2} z_2^2 t_1^{2j+1} z_1^{2i-1}.$$

Première étape

Pour tout polynôme P , on calcule le coefficient du monôme M_P qui apparaît dans l'Equation $E'_3(P)$.

Cas 1. $P = R_3(X^{2j}) = \frac{1}{3}(X^{2j} + Y^{2j} + Z^{2j})$ (avec $j \geq 2$) :

On a

$$\begin{aligned} |W|E_{int}^3(P) &= \frac{|W|}{3} R_3 \left[(z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3) \left[((z_1 y_2 - (y_1 + t_1) z_2)^{2j} + (z_2 y_3 - y_2 z_3)^{2j} + (z_3(y_1 + t_1) - y_3 z_1)^{2j}) \right] \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |W|E_{int}^3(P) &= y_2(\dots) + y_3(\dots) + \frac{2}{3} \sum_{\text{chgts de sgn}} z_1 y_1 [(y_1 + t_1) z_2]^{2j} + (z_3(y_1 + t_1))^{2j} \\ &\quad + \frac{2}{3} \sum_{\text{chgts de sgn}} z_2 y_1 [(z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} + (y_1 z_3)^{2j} + (t_1 z_3)^{2j}] \\ &\quad + \frac{2}{3} \sum_{\text{chgts de sgn}} z_3 y_1 [(t_1 z_2)^{2j} + (z_2 y_1)^{2j} + (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j}]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |W|E'_3(P) &= \frac{8}{3} \left[z_1 y_1 [(y_1 + t_1) z_2]^{2j} + (z_3(y_1 + t_1))^{2j} - z_1 y_1 [((-y_1 + t_1) z_2)^{2j} + (z_3(-y_1 + t_1))^{2j}] \right] \\ &\quad + \frac{8}{3} \left[z_2 y_1 [(z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} + \underline{(y_1 z_3)^{2j}} + \underline{(t_1 z_3)^{2j}}] - z_2 y_1 [(-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} + \underline{(y_1 z_3)^{2j}} + \underline{(t_1 z_3)^{2j}}] \right] \\ &\quad + \frac{8}{3} \left[z_3 y_1 [\underline{(t_1 z_2)^{2j}} + \underline{(z_2 y_1)^{2j}} + (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j}] - z_3 y_1 [\underline{(t_1 z_2)^{2j}} + \underline{(z_2 y_1)^{2j}} + (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2j}] \right], \end{aligned} \tag{3.21}$$

où les termes soulignés s'annulent.

Le monôme $M_j = z_1 t_1 y_1^{2j} z_3^{2j}$ apparaît seulement dans la première ligne de la dernière expression, et son coefficient est $\frac{1}{|W|} \frac{8}{3} [2C_{2j}^1 + 2C_{2j}^1] = \frac{32}{3} j$.

Ainsi, le coefficient de M_j dans $E'_3(P)$ est $\frac{2}{9} j$.

Cas 2. $P = R_3(X^{2j}Y^{2l})$ (avec $1 \leq l \leq j$ et $j \geq 2$) :

On a

$$|W|E_{int}^3(P) = \frac{|W|}{6}R_3 \left[(z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3) \left[((z_1y_2 - (y_1 + t_1)z_2)^{2j} (z_2y_3 - y_2z_3)^{2l} \right. \right. \\ \left. \left. + (z_2y_3 - y_2z_3)^{2j} (z_3(y_1 + t_1) - y_3z_1)^{2l} + (z_3(y_1 + t_1) - y_3z_1)^{2j} (z_1y_2 - (y_1 + t_1)z_2)^{2l} \right. \right. \\ \left. \left. + ((z_1y_2 - (y_1 + t_1)z_2)^{2l} (z_2y_3 - y_2z_3)^{2j} + (z_2y_3 - y_2z_3)^{2l} (z_3(y_1 + t_1) - y_3z_1)^{2j} \right. \right. \\ \left. \left. + (z_3(y_1 + t_1) - y_3z_1)^{2l} (z_1y_2 - (y_1 + t_1)z_2)^{2j} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } |W|E'_3(P) &= \frac{8}{6} \left[z_1y_1 \left[(z_3(y_1 + t_1))^{2j} ((y_1 + t_1)z_2)^{2l} \right] - z_1y_1 \left[(z_3(-y_1 + t_1))^{2j} ((-y_1 + t_1)z_2)^{2l} \right] \right. \\ &\quad + z_2y_1 \left[(z_1y_1 - t_1z_2)^{2j} (y_1z_3)^{2l} + (y_1z_3)^{2j} (z_3t_1)^{2l} + (z_3t_1)^{2j} (z_1y_1 - t_1z_2)^{2l} \right] - \dots \\ &\quad + z_3y_1 \left[(t_1z_2)^{2j} (z_2y_1)^{2l} + (z_2y_1)^{2j} (z_3t_1 - y_1z_1)^{2l} + (z_3t_1 - y_1z_1)^{2j} (t_1z_2)^{2l} \right] - \dots \\ &\quad + z_1y_1 \left[(z_3(y_1 + t_1))^{2l} ((y_1 + t_1)z_2)^{2j} \right] - z_1y_1 \left[(z_3(-y_1 + t_1))^{2l} ((-y_1 + t_1)z_2)^{2j} \right] \\ &\quad + z_2y_1 \left[(z_1y_1 - t_1z_2)^{2l} (y_1z_3)^{2j} + (y_1z_3)^{2l} (z_3t_1)^{2j} + (z_3t_1)^{2l} (z_1y_1 - t_1z_2)^{2j} \right] - \dots \\ &\quad \left. + z_3y_1 \left[(t_1z_2)^{2l} (z_2y_1)^{2j} + (z_2y_1)^{2l} (z_3t_1 - y_1z_1)^{2j} + (z_3t_1 - y_1z_1)^{2l} (t_1z_2)^{2j} \right] - \dots \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

où sur chaque ligne, les points de suspension représentent l'image de l'expression par le changement de signe $y_1 \mapsto -y_1$. Comme dans le cas précédent, les termes soulignés s'annulent.

▷ Si $j \neq l$ et $l \neq 1$, le monôme $M_{j,l}$ apparaît seulement dans la première ligne de l'expression précédente et son coefficient dans cette expression est $\frac{32}{6}(j+l)$.

▷ Si $j \neq l$ et $l = 1$, le monôme $M_{j,l}$ apparaît aussi dans la cinquième ligne de (3.22) et son coefficient est $\frac{32}{6}(j+l-l)$.

▷ Si $j = l$, on a $l \neq 1$ (car $j \geq 2$). Alors $M_{j,l}$ apparaît aussi dans la quatrième ligne et son coefficient est donc $\frac{64}{6}(j+l)$.

Le tableau suivant regroupe les coefficients de $M_{j,l}$ dans $E'_3(P)$:

(j, l)	$j \neq l$ et $l \neq 1$	$j \neq l$ et $l = 1$	$j = l$
Coefficient	$(j+l)/9$	$j/9$	$4j/9$

Cas 3. $P = R_3(X^{2j}Y^{2l}Z^{2k})$ (avec $1 \leq l \leq k \leq j$) :

On a

$$|W|E_{int}^3(P) = \frac{|W|}{6}R_3 \left[(z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3) \left[((z_1y_2 - (y_1 + t_1)z_2)^{2j} (z_2y_3 - y_2z_3)^{2l} (z_3(y_1 + t_1) - y_3z_1)^{2k} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\substack{\text{permutations} \\ \text{de } (j,l,k)}} \dots \right) \right].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |W|E'_3(P) &= \frac{8}{6} \sum_{\substack{\text{permutations} \\ \text{de } (j,l,k)}} \left[z_2y_1 (z_1y_1 - t_1z_2)^{2j} (y_1z_3)^{2l} (z_3t_1)^{2k} - z_2y_1 (-z_1y_1 - t_1z_2)^{2j} (y_1z_3)^{2l} (z_3t_1)^{2k} \right. \\ &\quad \left. + z_3y_1 (t_1z_2)^{2j} (z_2y_1)^{2l} (z_3t_1 - y_1z_1)^{2k} - z_3y_1 (t_1z_2)^{2j} (z_2y_1)^{2l} (z_3t_1 + y_1z_1)^{2k} \right]. \end{aligned}$$

On note $\alpha_{j,k,l}$ le coefficient du monôme $M_{j,k,l}$ dans l'expression précédente, et on distingue 4 cas :

- ▷ Si $l = k = j$, on a $M_{j,j,j} = z_1 t_1 z_1^{2j-2} y_1^{4j} z_3^{2j} t_1^{2j}$ et $\alpha_{j,j,j} = -32j$.
- ▷ Si $l = k < j$, on a $M_{j,l,l} = z_1 t_1 z_1^{2l-2} y_1^{2j+2l} z_3^{2j+2l} z_2^{2l} t_1^{2l}$, et

$$|W|E'_3(P) = \frac{8}{6} \left[z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} (y_1 z_3)^{2l} (z_3 t_1)^{2l} - \dots + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2j} (z_2 y_1)^{2l} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2l} - \dots \right. \\ \left. + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} (y_1 z_3)^{2j} (z_3 t_1)^{2l} - \dots + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2l} (z_2 y_1)^{2j} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2l} - \dots \right. \\ \left. + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} (y_1 z_3)^{2l} (z_3 t_1)^{2j} - \dots + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2l} (z_2 y_1)^{2l} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j} - \dots \right],$$

avec les conventions précédentes. Ainsi le coefficient cherché est $\alpha_{j,l,l} = -\frac{32}{3}l$.

- ▷ Si $l < k = j$, on a $M_{j,j,l} = z_1 t_1 z_1^{2l-2} y_1^{2j+2l} z_3^{4j} z_2^{2l} t_1^{2j}$. De même, on trouve $\alpha_{j,j,l} = -32j$.
- ▷ Si $l < k < j$, on a

$$|W|E'_3(P) = \frac{8}{6} \left[z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} (y_1 z_3)^{2l} (z_3 t_1)^{2k} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2j} (z_2 y_1)^{2l} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2k} - \dots \right. \\ \left. + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} (y_1 z_3)^{2k} (z_3 t_1)^{2l} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2j} (z_2 y_1)^{2k} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2l} - \dots \right. \\ \left. + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2k} (y_1 z_3)^{2j} (z_3 t_1)^{2l} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2k} (z_2 y_1)^{2j} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2l} - \dots \right. \\ \left. + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} (y_1 z_3)^{2j} (z_3 t_1)^{2k} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2l} (z_2 y_1)^{2j} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2k} - \dots \right. \\ \left. + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2k} (y_1 z_3)^{2l} (z_3 t_1)^{2j} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2k} (z_2 y_1)^{2l} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j} - \dots \right. \\ \left. + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} (y_1 z_3)^{2k} (z_3 t_1)^{2j} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2l} (z_2 y_1)^{2k} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j} - \dots \right], \quad (3.23)$$

toujours avec les mêmes conventions.

Le monôme cherché apparaît seulement sur la quatrième ligne, et son coefficient est $\alpha_{j,k,l} = -\frac{32}{6}l$.

Finalement, nous regroupons les coefficients des monômes $M_{j,k,l}$ dans $E'_3(P)$ dans le tableau suivant :

(j, k, l)	$l = k = j$	$l = k < j$	$l < k = j$	$l < k < j$
Coefficient	$-2l/3$	$-2l/9$	$-2l/9$	$-l/9$

Cas 4. $P = R_3(X^{2i+1}Y^{2j+1}Z^{2k+1})$ (avec $0 \leq i < j < k$) : on a

$$|W|E_{int}^3(P) = \frac{|W|}{6} R_3 \left[(z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3) \left[((z_1 y_2 - (y_1 + t_1) z_2)^{2i+1} (z_2 y_3 - y_2 z_3)^{2j+1} (z_3 (y_1 + t_1) - y_3 z_1)^{2k+1} + \sum_{\substack{\text{permutations} \\ \text{de } (i,j,k)}} \dots) \right] \right].$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|W|E'_3(P) &= \frac{8}{6} \sum_{\substack{\text{permutations} \\ \text{de } (j,j,k)}} \left[z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2i+1} (y_1 z_3)^{2j+1} (z_3 t_1)^{2k+1} \right. \\
&\quad + z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2i+1} (y_1 z_3)^{2j+1} (z_3 t_1)^{2k+1} \\
&\quad + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2i+1} (z_2 y_1)^{2j+1} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2k+1} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2i+1} (z_2 y_1)^{2j+1} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2k+1} \left. \right] \\
&= z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2i+1} (y_1 z_3)^{2j+1} (z_3 t_1)^{2k+1} + z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2i+1} (y_1 z_3)^{2j+1} (z_3 t_1)^{2k+1} \\
&\quad + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2i+1} (z_2 y_1)^{2j+1} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2k+1} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2i+1} (z_2 y_1)^{2j+1} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2k+1} \\
&\quad + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2i+1} (y_1 z_3)^{2k+1} (z_3 t_1)^{2j+1} + z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2i+1} (y_1 z_3)^{2k+1} (z_3 t_1)^{2j+1} \\
&\quad + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2i+1} (z_2 y_1)^{2k+1} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j+1} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2i+1} (z_2 y_1)^{2k+1} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2j+1} \\
&\quad + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j+1} (y_1 z_3)^{2i+1} (z_3 t_1)^{2k+1} + z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j+1} (y_1 z_3)^{2i+1} (z_3 t_1)^{2k+1} \\
&\quad + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2j+1} (z_2 y_1)^{2i+1} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2k+1} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2j+1} (z_2 y_1)^{2i+1} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2k+1} \\
&\quad + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2k+1} (y_1 z_3)^{2j+1} (z_3 t_1)^{2i+1} + z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2k+1} (y_1 z_3)^{2j+1} (z_3 t_1)^{2i+1} \\
&\quad + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2k+1} (z_2 y_1)^{2j+1} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2i+1} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2k+1} (z_2 y_1)^{2j+1} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2i+1} \\
&\quad + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j+1} (y_1 z_3)^{2k+1} (z_3 t_1)^{2i+1} + z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j+1} (y_1 z_3)^{2k+1} (z_3 t_1)^{2i+1} \\
&\quad + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2j+1} (z_2 y_1)^{2k+1} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2i+1} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2j+1} (z_2 y_1)^{2k+1} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2i+1} \\
&\quad + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2k+1} (y_1 z_3)^{2i+1} (z_3 t_1)^{2j+1} + z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2k+1} (y_1 z_3)^{2i+1} (z_3 t_1)^{2j+1} \\
&\quad + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2k+1} (z_2 y_1)^{2i+1} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j+1} + z_3 y_1 (t_1 z_2)^{2k+1} (z_2 y_1)^{2i+1} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2j+1}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Pour trouver les monômes de la forme $\alpha \widetilde{M}_{k,j,i}$, nous nous intéressons d'abord à l'exposant de z_3 , ensuite à celui de y_1 . Ainsi il reste seulement à considérer les lignes 1 et 3, puis seulement la ligne 3. Le coefficient de $\widetilde{M}_{k,j,i}$ dans $|W|E'_3(P)$ est $-\frac{16}{6}(2i+1)$.

Ainsi, le coefficient de $\widetilde{M}_{k,j,i}$ dans $E'_3(P)$ est $-\frac{1}{18}(2i+1)$.

Seconde étape

Pour deux polynômes P_1 et P_2 distincts, de même degré supérieur ou égal à 12, on montre que M_{P_1} n'apparaît pas dans $E'(P_2)$.

Cas 1. $P = R_3(X^{2j})$ ($j \geq 3$) : d'après (3.21), aucun terme de $E'_3(P)$ ne contient en même temps z_1, z_2, z_3 .

Or si $l+k=j$ avec $1 \leq k \leq l$ et $l \geq 2$, alors $M_{l,k} = z_1 t_1 y_1^{2l+2k} z_3^{2l} z_2^{2k}$, donc $M_{l,k}$ n'apparaît pas dans $E'_3(P)$.

De même, si $m+l+k=j$ avec $0 < k \leq l \leq m$, on a $M_{m,l,k} = z_1 t_1 y_1^{2m+2k} z_3^{2m+2l} z_2^2 t_1^{2l} z_1^{2k-2}$, donc $M_{m,l,k}$ n'apparaît pas dans $E'_3(P)$.

Cas 2. $P = R_3(X^{2j} Y^{2l})$ (avec $1 \leq l \leq j$ et $j \geq 2$) : l'Equation (3.22) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{6}{8}|W|E'_3(P) = & z_1 y_1 (z_3 (y_1 + t_1))^{2j} ((y_1 + t_1) z_2)^{2l} - z_1 y_1 (z_3 (-y_1 + t_1))^{2j} ((-y_1 + t_1) z_2)^{2l} \\
& + z_1 y_1 (z_3 (y_1 + t_1))^{2l} ((y_1 + t_1) z_2)^{2j} - z_1 y_1 (z_3 (-y_1 + t_1))^{2l} ((-y_1 + t_1) z_2)^{2j} \\
& + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} (y_1 z_3)^{2l} + z_2 y_1 (z_3 t_1)^{2j} (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} \\
& - z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} (y_1 z_3)^{2l} - z_2 y_1 (z_3 t_1)^{2j} (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} \\
& + z_2 y_1 (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} (y_1 z_3)^{2j} + z_2 y_1 (z_3 t_1)^{2l} (z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} \\
& - z_2 y_1 (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2l} (y_1 z_3)^{2j} - z_2 y_1 (z_3 t_1)^{2l} (-z_1 y_1 - t_1 z_2)^{2j} \\
& + z_3 y_1 (z_2 y_1)^{2j} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2l} + z_3 y_1 (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j} (t_1 z_2)^{2l} \\
& - z_3 y_1 (z_2 y_1)^{2l} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2j} - z_3 y_1 (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2l} (t_1 z_2)^{2j} \\
& + z_3 y_1 (z_2 y_1)^{2l} (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2j} + z_3 y_1 (z_3 t_1 - y_1 z_1)^{2l} (t_1 z_2)^{2j} \\
& - z_3 y_1 (z_2 y_1)^{2j} (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2l} - z_3 y_1 (z_3 t_1 + y_1 z_1)^{2j} (t_1 z_2)^{2l}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

• Si $m = j + l$, alors $M_m = z_1 t_1 y_1^{2m} z_3^{2m}$ n'apparaît pas dans $E(P)$. En effet, le plus grand exposant de z_3 dans $E(P)$ est $\leq 2j + 1 < 2m$.

• Si $m + p = j + l$, avec $1 \leq p \leq m$, $m \geq 2$, $m \neq j$ et $p \neq l$, alors $M_{m,p} = z_1 t_1 y_1^{2m+2p} z_3^{2m} z_2^{2p}$ n'apparaît pas dans $E(P)$. En effet,

▷ Si $m > j$, nécessairement $p < l$. Alors le plus grand exposant de z_3 dans $E(P)$ est $\leq 2j + 1 < 2m$.
▷ Si $m < j$, nécessairement $p > l$. Alors les seuls termes de $E(P)$ qui comportent $z_1 t_1$ avec l'exposant 1 sont

$$\begin{aligned}
L_1 &= 8j z_1 t_1 y_1^{2j+2l} z_3^{2j} z_2^{2l} \\
L_2 &= 8l z_1 t_1 y_1^{2j+2l} z_3^{2l} z_2^{2j} \\
L_3 &= -4z_1 t_1 y_1^{2j+2} z_3^{2j} z_2^2 \quad \text{si } l = 1 \\
L_4 &= -4z_1 t_1 y_1^{2j+2} z_3^2 z_2^{2j} \quad \text{si } l = 1.
\end{aligned}$$

L_1 et L_3 ne sont pas colinéaires à $M_{m,p}$, car ils ne sont pas colinéaires à $M_{j,l}$.

L_2 est colinéaire à $M_{m,p}$ seulement si $m = l$ et $j = p$. Mais alors $m = l \leq j = p \leq m$, d'où $m = j$ et $p = l$, ce qui est absurde. Le même argument peut être appliqué à L_4 .

• Si $m + p + q = j + l$, avec $1 \leq q \leq p \leq m$, alors $M_{m,p,q} = z_1 t_1 y_1^{2m+2q} z_3^{2m+2p} z_2^{2p} t_1^{2p} z_1^{2q-2}$ n'apparaît pas dans $E(P)$. En effet,

▷ Si $m + p > j$, le plus grand exposant de z_3 dans $E(P)$ est $\leq 2j + 1 < 2m + 2p$.
▷ Si $m + p < j$, on a nécessairement $q \geq l + 1$, donc $2q - 1 > 2l \geq 2$. Alors les seuls termes de $E(P)$ qui comportent z_1 avec l'exposant $2q - 1$ sont

$$\begin{aligned}
L_1 &= -2C_{2j}^{2q-1} y_1^{2q+2l} z_1^{2q-1} z_2^{2j-2q+2} z_3^{2l} t_1^{2j-2q+1} \\
L_2 &= -2C_{2j}^{2q-1} y_1^{2q} z_1^{2q-1} z_2^{2j-2q+2} z_3^{2l} t_1^{2j-2q+2l+1} \\
L_3 &= -2C_{2j}^{2q-1} y_1^{2q} z_1^{2q-1} z_2^{2l} z_3^{2j-2q+2} t_1^{2j-2q+2l-1} \\
L_4 &= -2C_{2j}^{2q-1} y_1^{2q+2l} z_1^{2q-1} z_2^{2l} z_3^{2j-2q+2} t_1^{2j-2q+1}.
\end{aligned}$$

Si L_1 est colinéaire à $M_{m,p,q}$, on a
$$\begin{cases} m + q = q + l \\ 2 = 2j - 2q + 2 \\ 2m + 2p = 2l \\ 2p + 1 = 2j - 2q + 1 \end{cases}, \text{ d'où } p = 0, \text{ ce qui est absurde.}$$

De même, L_2 , L_3 et L_4 ne sont pas colinéaires à $M_{m,p,q}$.

▷ Si $m + p = j$, on a nécessairement $q = l$ (mais seulement $2q - 1 \geq 1$). D'où les deux cas :

◊ Si $l \geq 2$, i. e. $q \geq 2$, en plus des termes L_1, \dots, L_4 , on obtient les termes

$$\begin{aligned}
L_5 &= -4lz_2y_1z_3^{2j}t_1^{2j}z_1^{2l-1}y_1^{2l-1}t_1z_2 \\
L_6 &= -4lz_2y_1z_1^{2l-1}y_1^{2l-1}t_1z_2y_1^{2j}z_3^{2j} \\
L_7 &= -4lz_3y_1z_2^{2j}y_1^{2j}z_3t_1y_1^{2l-1}z_1^{2l-1} \\
L_8 &= -4lz_3y_1z_3t_1y_1^{2l-1}z_1^{2l-1}t_1^{2j}z_2^{2j}.
\end{aligned}$$

Si L_5 est colinéaire à $M_{m,p,q}$, on a en particulier $2m + 2l = 2l$, d'où $m = 0$, ce qui est absurde.

De même, L_6 , L_7 et L_8 ne sont pas colinéaires à $M_{m,p,q}$.

◇ Si $l = 1$, i. e. $q = 1$, en plus des termes L_1, \dots, L_8 , on obtient aussi les termes

$$\begin{aligned}
&z_1y_1z_3^{2j}z_2^2(y_1 + t_1)^{2j+2} - z_1y_1z_3^{2j}z_2^2(-y_1 + t_1)^{2j+2} \\
&z_1y_1z_3^2z_2^{2j}(y_1 + t_1)^{2j+2} - z_1y_1z_3^2z_2^{2j}(-y_1 + t_1)^{2j+2}.
\end{aligned}$$

Parmi ces termes, ceux qui comportent t_1 avec l'exposant $2p$ disparaissent en raison des signes dans le développement du binôme.

Cas 3. $P = R_3(X^{2j}Y^{2l}Z^{2k})$ (avec $1 \leq l \leq k \leq j$) :

• D'après la Formule (3.23), le plus grand exposant de z_3 dans $E'_3(P)$ est $\leq 2l + 2k$. Ainsi si $m = j + k + l$, alors $M_m = z_1t_1y_1^{2m}z_3^{2m}$ n'apparaît pas dans $E'_3(P)$.

• Si $m + p = j + l + k$ avec $1 \leq p \leq m$, $m \geq 2$, alors $M_{m,p} = z_1t_1y_1^{2m+2p}z_3^{2m}z_2^{2p}$ n'apparaît pas dans $E'_3(P)$. En effet,

▷ Si $j + k < m$, alors z_3 n'apparaît jamais dans $E'_3(P)$ avec l'exposant $2m$.

▷ Si $j + k \geq m$, on écrit les termes de $E'_3(P)$ qui comportent y_1 avec l'exposant $2m + 2p$:

$$\begin{aligned}
L_1 &= -4jz_2y_1z_1^{2j-1}y_1^{2j-1}t_1z_2y_1^{2l}z_3^{2l+2k}t_1^{2k} & L_7 &= -4lz_2y_1z_1^{2l-1}y_1^{2l-1}t_1z_2y_1^{2j}z_3^{2j+2k}t_1^{2k} \\
L_2 &= -4kz_3y_1t_1^{2j}z_2^{2j+2l}y_1^{2l}z_3t_1y_1^{2k-1}z_1^{2k-1} & L_8 &= -4kz_3y_1t_1^{2l}z_2^{2l+2j}y_1^{2j}z_3t_1y_1^{2k-1}z_1^{2k-1} \\
L_3 &= -4jz_2y_1z_1^{2j-1}y_1^{2j-1}t_1z_2y_1^{2k}z_3^{2k+2l}t_1^{2l} & L_9 &= -4kz_2y_1z_1^{2k-1}y_1^{2k-1}t_1z_2y_1^{2l}z_3^{2l+2j}t_1^{2j} \\
L_4 &= -4lz_3y_1t_1^{2j}z_2^{2j+2k}y_1^{2k}z_3t_1y_1^{2l-1}z_1^{2l-1} & L_{10} &= -4jz_3y_1t_1^{2k}z_2^{2k+2l}y_1^{2l}z_3t_1y_1^{2j-1}z_1^{2j-1} \\
L_5 &= -4kz_2y_1z_1^{2k-1}y_1^{2k-1}t_1z_2y_1^{2j}z_3^{2j+2l}t_1^{2l} & L_{11} &= -4lz_2y_1z_1^{2l-1}y_1^{2l-1}t_1z_2y_1^{2k}z_3^{2k+2j}t_1^{2j} \\
L_6 &= -4lz_3y_1t_1^{2k}z_2^{2k+2j}y_1^{2j}z_3t_1y_1^{2l-1}z_1^{2l-1} & L_{12} &= -4jz_3y_1t_1^{2l}z_2^{2l+2k}y_1^{2k}z_3t_1y_1^{2j-1}z_1^{2j-1}.
\end{aligned}$$

Aucun de ces termes n'est colinéaire à $M_{m,p}$, à cause de l'exposant de t_1 qui est toujours trop grand.

• Si $m + p + q = j + l + k$ avec $1 \leq q \leq p \leq m$ et $(m, p, q) \neq (j, k, l)$,

alors $M_{m,p,q} = z_1t_1y_1^{2m+2q}z_3^{2m+2p}z_2^{2p}z_1^{2q-2}$ n'apparaît pas dans $E'_3(P)$. En effet,

▷ Si $m + p > j + k$, alors z_3 n'apparaît jamais dans $E'_3(P)$ avec l'exposant $2m + 2p$.

▷ Si $m + p \leq j + k$, on écrit les termes de $E'_3(P)$ qui comportent y_1 avec l'exposant $2m + 2q$ et z_2 avec l'exposant 2, en posant $C_n^\delta = 0$ si $\delta \notin \llbracket 0, 2k \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
L_1 &= -4jz_2y_1z_1^{2j-1}y_1^{2j-1}t_1z_2y_1^{2l}z_3^{2l+2k}t_1^{2k} & L_7 &= -4lz_2y_1z_1^{2l-1}y_1^{2l-1}t_1z_2y_1^{2j}z_3^{2j+2k}t_1^{2k} \\
L_2 &= -2C_{2k}^\alpha z_3y_1t_1^{2j}z_2^{2j+2l}y_1^{2l}z_3^{2k-\alpha}t_1^{2k-\alpha}y_1^\alpha z_1^\alpha & L_8 &= -2C_{2k}^\alpha z_3y_1t_1^{2l}z_2^{2l+2j}y_1^{2j}z_3^{2k-\alpha}t_1^{2k-\alpha}y_1^\alpha z_1^\alpha \\
L_3 &= -4jz_2y_1z_1^{2j-1}y_1^{2j-1}t_1z_2y_1^{2k}z_3^{2k+2l}t_1^{2l} & L_9 &= -4kz_2y_1z_1^{2k-1}y_1^{2k-1}t_1z_2y_1^{2l}z_3^{2l+2j}t_1^{2j} \\
L_4 &= -2C_{2l}^\beta z_3y_1t_1^{2j}z_2^{2j+2k}y_1^{2k}z_3^{2l-\beta}t_1^{2l-\beta}y_1^\beta z_1^\beta & L_{10} &= -2C_{2j}^\gamma z_3y_1t_1^{2k}z_2^{2k+2l}y_1^{2l}z_3^{2j-\gamma}t_1^{2j-\gamma}y_1^\gamma z_1^\gamma \\
L_5 &= -4kz_2y_1z_1^{2k-1}y_1^{2k-1}t_1z_2y_1^{2j}z_3^{2j+2l}t_1^{2l} & L_{11} &= -4lz_2y_1z_1^{2l-1}y_1^{2l-1}t_1z_2y_1^{2k}z_3^{2k+2j}t_1^{2j} \\
L_6 &= -2C_{2l}^\beta z_3y_1t_1^{2k}z_2^{2k+2j}y_1^{2j}z_3^{2l-\beta}t_1^{2l-\beta}y_1^\beta z_1^\beta & L_{12} &= -2C_{2j}^\gamma z_3y_1t_1^{2l}z_2^{2l+2k}y_1^{2k}z_3^{2j-\gamma}t_1^{2j-\gamma}y_1^\gamma z_1^\gamma,
\end{aligned}$$

avec $\alpha \in \llbracket 0, 2k \rrbracket$, $\beta \in \llbracket 0, 2l \rrbracket$, $\gamma \in \llbracket 0, 2j \rrbracket$ et α, β, γ impairs.

Aucun de ces termes n'est colinéaire à $M_{m,p}$, car pour chacun de ces douze termes, l'égalité des multidegrés donne un système linéaire qui conduit à une absurdité. Par exemple, si L_1 est

$$\text{colinéaire à } M_{m,p}, \text{ on a } \begin{cases} 2m + 2q = 2j + 2l \\ 2m + 2p = 2l + 2k \\ 2p + 1 = 1 + 2k \\ 2q - 1 = 2j - 1 \end{cases}, \text{ d'où } p = k, q = j, m = l, \text{ ce qui est absurde}$$

d'après l'hypothèse.

Cas 4. $P = R_3(X^{2i+1}Y^{2j+1}Z^{2k+1})$ (avec $0 \leq i < j < k$) :

dans ce cas, à cause du degré, le seul monôme pour lequel on doit montrer qu'il n'apparaît pas dans $E'_3(P)$ est $\widetilde{M}_{m,p,q}$ avec $m + p + q = j + k + i$, $0 < q < p < m$ et $(m, p, q) \neq (k, j, i)$. L'étude est la même que celle qui a été faite dans le troisième point du cas 3.

Ainsi on a prouvé le résultat suivant :

Proposition 3.3.6

La dimension du 0-ème espace d'homologie de Poisson de B_3 est 3,

i. e. $\boxed{\dim(HP_0(B_3)) = 3}$.

Cette dimension coïncide avec $\dim(HH_0(B_3))$.

En ce qui concerne les vecteurs de plus haut poids 0 de degré congru à 2 modulo 4, nous obtenons par récurrence une formule qui nous permet de les exprimer explicitement comme sommes de crochets : c'est l'objet de la Proposition 3.3.7.

Proposition 3.3.7

Les vecteurs de plus haut poids 0 de degré congru à 2 modulo 4 sont des sommes de crochets.

Démonstration :

• On a la formule

$$\{R_3(X^{2p}), R_3(X^{2q})\} = \frac{8}{3}pq R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z). \quad (3.26)$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \{R_3(X^{2p}), R_3(X^{2q})\} \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_3|} \left\{ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} (x_{\sigma 1}y_{\sigma 2} - y_{\sigma 1}x_{\sigma 2})^{2p}, \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_3} (x_{\tau 1}y_{\tau 2} - y_{\tau 1}x_{\tau 2})^{2q} \right\} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{\sigma, \tau \in \langle (1,2,3) \rangle} \{ (x_{\sigma 1}y_{\sigma 2} - y_{\sigma 1}x_{\sigma 2})^{2p}, (x_{\tau 1}y_{\tau 2} - y_{\tau 1}x_{\tau 2})^{2q} \} \\ &= \frac{4}{9}pq \sum_{\sigma, \tau \in \langle (1,2,3) \rangle} (x_{\sigma 1}y_{\sigma 2} - y_{\sigma 1}x_{\sigma 2})^{2p-1} (x_{\tau 1}y_{\tau 2} - y_{\tau 1}x_{\tau 2})^{2q-1} \{x_{\sigma 1}y_{\sigma 2} - y_{\sigma 1}x_{\sigma 2}, x_{\tau 1}y_{\tau 2} - y_{\tau 1}x_{\tau 2}\} \\ &= \frac{4}{9}pq \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_3} \sigma \cdot (x_1y_2 - y_1x_2)^{2p-1} (x_2y_3 - y_2x_3)^{2q-1} (x_3y_1 - y_3x_1) \\ &= \frac{8}{3}pq R_3((x_1y_2 - y_1x_2)^{2p-1} (x_2y_3 - y_2x_3)^{2q-1} (x_3y_1 - y_3x_1)), \end{aligned}$$

où la quatrième égalité provient du tableau suivant :

$\{\cdot, \cdot\}$	X	Y	Z
X	0	Z	$-Y$
Y	$-Z$	0	X
Z	Y	$-X$	0

On a aussi

$$R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z)R_3(X^{2r}) = \frac{1}{3} \left[R_3(X^{2p+2r-1}Y^{2q-1}Z) + R_3(X^{2p-1}Y^{2q+2r-1}Z) + R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z^{2r+1}) \right]. \quad (3.27)$$

Ainsi, d'après la Propriété de Leibniz et la Formule (3.26), on a

$$\begin{aligned} & \{R_3(X^{2p}), R_3(X^{2q})R_3(X^{2r})\} \\ &= \{R_3(X^{2p}), R_3(X^{2q})\}R_3(X^{2r}) + \{R_3(X^{2p}), R_3(X^{2r})\}R_3(X^{2q}) \\ &= \frac{8}{3}pq R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z)R_3(X^{2r}) + \frac{8}{3}pr R_3(X^{2p-1}Y^{2r-1}Z)R_3(X^{2q}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

• On en déduit

$$\begin{aligned} & R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z^{2r+1}) \\ &= 3R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z)R_3(X^{2r}) - R_3(X^{2p+2r-1}Y^{2q-1}Z) - R_3(X^{2p-1}Y^{2q+2r-1}Z) \\ &= \frac{9}{8pq} \{R_3(X^{2p}), R_3(X^{2q})R_3(X^{2r})\} - \frac{3r}{q} R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z)R_3(X^{2q}) \\ & \quad - R_3(X^{2p+2r-1}Y^{2q-1}Z) - R_3(X^{2p-1}Y^{2q+2r-1}Z) \\ &= \frac{9}{8pq} \{R_3(X^{2p}), R_3(X^{2q})R_3(X^{2r})\} - \frac{r}{q} \left[R_3(X^{2p+2q-1}Y^{2r-1}Z) \right. \\ & \quad \left. + R_3(X^{2p-1}Y^{2r+2q-1}Z) + R_3(X^{2p-1}Y^{2r-1}Z^{2q+1}) \right] \\ & \quad - R_3(X^{2p+2r-1}Y^{2q-1}Z) - R_3(X^{2p-1}Y^{2q+2r-1}Z), \end{aligned} \quad (3.29)$$

où les égalités 1, 2, 3 résultent respectivement des Formules (3.27), (3.28), (3.27).

• On procède alors par récurrence sur r : on montre que pour tout $r \geq 1$ fixé, pour tout (p, q) dans $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r < q < p$, l'élément $R_3(X^{2p-1}Y^{2q-1}Z^{2r-1})$ est une somme de crochets : en effet, le cas $r = 1$ résulte de (3.26) tandis que le passage de r à $r+1$ vient de la Formule (3.29). ■

3.3.4 Etude de D_3

Le résultat pour D_3 peut être déduit du résultat pour B_3 .

En effet, les vecteurs de plus haut poids 0 sont les mêmes que ceux de B_3 (cela résulte de la Proposition 3.2.15), et ils sont donnés par la Remarque 3.3.4.

L'élément 1 n'est pas un crochet, d'après la Proposition 3.2.3.

L'Equation (3.20) est la même que pour B_3 . Cela montre que les solutions de l'Equation (3.14) sont à rechercher dans l'espace vectoriel $\langle R_3(X^2), R_3(X^2Y^2) \rangle$.

Or ces deux polynômes ont des degrés distincts et on vérifie (voir le Paragraphe 3.5) qu'aucun d'eux n'est solution de l'Equation (3.14).

Ainsi on a le résultat suivant :

Proposition 3.3.8

La dimension du 0-ème espace d'homologie de Poisson de D_3 est 1, i. e. $\boxed{\dim(HP_0(D_3)) = 1}$. Cette dimension coïncide avec $\dim(HH_0(D_3))$.

Remarque 3.3.9

Les Propositions 3.3.1, 3.3.2, 3.3.6 et 3.3.8 montrent que la conjecture de J. Alev est vérifiée dans les cas B_2 , $D_2 = A_1 \times A_1$, B_3 et $D_3 = A_3$.

3.4 Produits en couronne

J. Alev a conjecturé que l'égalité $\dim HP_0(W) = \dim HH_0(W)$ est valable non seulement pour les groupes de Weyl des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie, mais aussi dans le cas des produits en couronne de la forme $W = \Gamma \smile \mathfrak{S}_n$, où Γ est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Dans ce paragraphe, nous vérifions cette conjecture, citée dans l'introduction, dans le cas où $\Gamma = A_1$: le groupe W est alors $W = \mathfrak{S}_n$ et un calcul explicite montre que $\dim HP_0(W) = 0 = \dim HH_0(W)$.

3.4.1 Définitions et notations

- On considère le produit en couronne $G = \Gamma \smile \mathfrak{S}_n$ d'un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, noté Γ , par le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . D'après la Proposition 2.4.1 du Chapitre 2, on prend pour Γ un sous-groupe de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ du type A_k , D_k ou E_k .

Par définition, le produit en couronne $G = \Gamma \smile \mathfrak{S}_n$ est le produit semi-direct $\Gamma^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, i. e. le produit cartésien $\Gamma^n \times \mathfrak{S}_n$ muni de la multiplication $*$ définie comme suit :

$$(\gamma, \sigma) * (\gamma', \sigma') = (\gamma(\sigma\gamma'), \sigma\sigma') = ((\gamma_1\gamma'_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \gamma_n\gamma'_{\sigma^{-1}(n)}), \sigma\sigma').$$

Pour tout élément $(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \sigma) \in G$, on note $M_{(\gamma, \sigma)} \in \mathbf{M}_{2n}\mathbb{C}$ la matrice par blocs dont le bloc d'indices (i, j) est $\gamma_i \delta_{i, \sigma(j)} \in \mathbf{M}_2\mathbb{C}$.

- On considère la matrice diagonale par blocs $\tilde{J} = \text{Diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathbf{GL}_{2n}\mathbb{C}$.

Alors on a ${}^t M_{(\gamma, \sigma)} \tilde{J} M_{(\gamma, \sigma)} = \tilde{J}$.

Donc en identifiant $\mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C}$ et $\mathbf{Sp}(\tilde{J}) := \{M \in \mathbf{GL}_{2n}\mathbb{C} \mid {}^t M \tilde{J} M = \tilde{J}\}$, on a $\boxed{M_{(\gamma, \sigma)} \in \mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C}}$.

- L'application

$$\begin{aligned} \Gamma \smile \mathfrak{S}_n &\rightarrow \mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C} \\ (\gamma, \sigma) &\mapsto M_{(\gamma, \sigma)} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

De plus, elle réalise une bijection de $\Gamma \smile \mathfrak{S}_n$ sur son image.

Ainsi, le groupe $\Gamma \smile \mathfrak{S}_n$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C}$.

- On considère l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$, sur laquelle le groupe $G = \Gamma \smile \mathfrak{S}_n$ agit.

Le crochet de Poisson de deux polynômes est défini par

$$\{P, Q\} := \nabla P \cdot (\tilde{J} \nabla Q) = \nabla_{\mathbf{x}} P \cdot \nabla_{\mathbf{y}} Q - \nabla_{\mathbf{y}} P \cdot \nabla_{\mathbf{x}} Q.$$

Comme G est inclus dans $\mathbf{Sp}_{2n}\mathbb{C}$, le crochet de deux polynômes invariants est invariant, de sorte que l'algèbre des polynômes invariants $\mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]^G$ est une sous-algèbre de Poisson de l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$.

On note désormais $S := \mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$, et $S(j)$ l'espace des éléments de degré j .

- La dimension de $S^G(2)$ est donnée, dans le cas où Γ est du type A_k , par le tableau suivant :

Γ	A_1	A_2	$A_k, k \geq 3$
$\dim S^G(2)$	6	3	1

Remarque 3.4.1

Dans le cas où $\Gamma = A_1$, le groupe $G = \Gamma \curvearrowright \mathfrak{S}_n$ est isomorphe à \mathfrak{S}_n .

Dans le cas où $\Gamma = A_2$, le groupe $G = \Gamma \curvearrowright \mathfrak{S}_n$ est isomorphe à B_n .

3.4.2 Etude de \mathfrak{S}_n

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où Γ est du type A_1 . Le groupe Γ est réduit à l'élément neutre, et on a donc $G = \mathfrak{S}_n$.

Proposition 3.4.2

Le sous-espace $S^G(2)$ est isomorphe à la somme directe d'algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$.

Plus précisément, on a $S^G(2) = \langle E_1, F_1, H_1, E_2, F_2, H_2 \rangle$, où les éléments $E_1, F_1, H_1, E_2, F_2, H_2$ sont donnés explicitement par

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}R_n(x_1^2) + \frac{n-1}{2}R_n(x_1x_2) & E_2 &= \frac{n-1}{2}R_n(x_1^2) - \frac{n-1}{2}R_n(x_1x_2) \\ F_1 &= -\frac{1}{2}R_n(y_1^2) - \frac{n-1}{2}R_n(y_1y_2) & F_2 &= -\frac{n-1}{2}R_n(y_1^2) + \frac{n-1}{2}R_n(y_1y_2) \\ H_1 &= -R_n(x_1y_1) - (n-1)R_n(x_1y_2) & H_2 &= -(n-1)R_n(x_1y_1) + (n-1)R_n(x_1y_2), \end{aligned}$$

avec la table de multiplication suivante.

Les espaces S et S^G sont donc des $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ -modules.

\nearrow	E_1	F_1	H_1	E_2	F_2	H_2
E_1	0	H_1	$-2E_1$	0	0	0
F_1	$-H_1$	0	$2F_1$	0	0	0
H_1	$2E_1$	$-2F_1$	0	0	0	0
E_2	0	0	0	0	H_2	$-2E_2$
F_2	0	0	0	$-H_2$	0	$2F_2$
H_2	0	0	0	$2E_2$	$-2F_2$	0

Proposition 3.4.3

On considère la base suivante de $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ (elle n'est pas adaptée à la décomposition en somme directe d'algèbres de Lie, contrairement à la précédente) :

$$\begin{aligned} E &= R_n(x_1^2) & F &= R_n(y_1^2) & H &= R_n(x_1y_1) \\ E' &= R_n(x_1x_2) & F' &= R_n(y_1y_2) & H' &= R_n(x_1y_2). \end{aligned}$$

L'Equation 3.14 associée à un polynôme $P \in S^G$ est vue comme un élément de $S[\mathbf{z}, \mathbf{t}]$, i. e. un polynôme en \mathbf{z}, \mathbf{t} à coefficients dans S . Alors les coefficients de $t_1^2, z_1^2, z_1 t_1, t_1 t_2, z_1 z_2, z_1 t_2$ s'écrivent

$$\begin{aligned} c_{t_1^2}(P) &= \alpha_1\{E, P\} & c_{z_1^2}(P) &= \alpha_2\{F, P\} & c_{z_1 t_1}(P) &= \alpha_3\{H, P\} \\ c_{t_1 t_2}(P) &= \alpha_4\{E', P\} & c_{z_1 z_2}(P) &= \alpha_5\{F', P\} & c_{z_1 t_2}(P) &= \alpha_6\{H', P\}, \end{aligned}$$

où les α_j sont dans \mathbb{Q}^* .

Corollaire 3.4.4

Si $P \in S^G$ est solution de l'Equation 3.14, alors P est annulé par $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$.

Mais l'utilisation de l'Equation 3.14 n'est pas nécessaire pour l'étude de $G = \mathfrak{S}_n$. On peut en effet écrire n'importe quel élément de S^G comme somme de crochets d'éléments de S^G . C'est l'objet de ce qui suit.

• On a $S = \mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n] = \mathbb{C}[u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}, X, Y]$, avec $u_j = x_1 - x_{j+1}$ et $v_j = y_1 - y_{j+1}$ pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $X = \sum_{j=1}^n x_j, Y = \sum_{j=1}^n y_j$.
On peut donc écrire $S = T[X, Y]$ avec $T = \mathbb{C}[u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}]$.

Alors $S^G = R_n(S) = R_n(T[X, Y])$. Or X et Y sont invariants par G , donc $\boxed{S^G = T^G[X, Y]}$.

• On calcule maintenant le crochet $\{\alpha X^i Y^j, \beta X^k Y^l\}$ pour $(\alpha, \beta) \in T^2$.

En utilisant la Propriété de Leibniz, on a

$$\{\alpha X^i Y^j, \beta X^k Y^l\} = \alpha \beta \{X^i Y^j, X^k Y^l\} + \alpha X^k Y^l \{X^i Y^j, \beta\} + \beta X^i Y^j \{\alpha, X^k Y^l\} + X^{i+k} Y^{j+l} \{\alpha, \beta\}.$$

De plus, on a la relation $\{X^i Y^j, X^k Y^l\} = \frac{1}{n}(il - jk)X^{i+k-1}Y^{j+l-1}$.

On peut aussi écrire $\{X^i Y^j, \beta\} = jX^i Y^{j-1}\{Y, \beta\} + iX^{i-1}Y^j\{X, \beta\}$.

Or $\beta \in T$, donc β est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $M = u_1^{i_1} \dots u_{n-1}^{i_{n-1}} v_1^{j_1} \dots v_{n-1}^{j_{n-1}}$.
Et

$$\{Y, M\} = \sum_{k=1}^{n-1} \{Y, u_k^{i_k}\} u_1^{i_1} \dots \widehat{u_k^{i_k}} \dots u_{n-1}^{i_{n-1}} v_1^{j_1} \dots v_{n-1}^{j_{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \{Y, v_k^{j_k}\} u_1^{i_1} \dots u_{n-1}^{i_{n-1}} v_1^{j_1} \dots \widehat{v_k^{j_k}} \dots v_{n-1}^{j_{n-1}}.$$

Enfin, $\{Y, u_k^{i_k}\} = i_k u_k^{i_k-1} \{Y, u_k\}$, et

$$\{Y, u_k\} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \{y_j, x_1 - x_{k+1}\} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-\delta_{j,1} + \delta_{j,k+1}) = \frac{1}{n}(-1 + 1) = 0,$$

donc $\{X^i Y^j, \beta\} = 0$.

Finalement

$$\boxed{\{\alpha X^i Y^j, \beta X^k Y^l\} = \frac{1}{n}(il - jk)X^{i+k-1}Y^{j+l-1}\alpha\beta + X^{i+k}Y^{j+l}\{\alpha, \beta\}}.$$

• En particulier, on a la formule $\{\alpha X^i Y^j, X^k Y^l\} = \frac{1}{n}(il - jk)X^{i+k-1}Y^{j+l-1}\alpha$.

Soit maintenant $\alpha X^p Y^q$ un élément de $T^G[X, Y]$, avec $\alpha \in T^G$.

▷ Si $p \neq q$, on a $\alpha X^p Y^q = \frac{n}{p-q} \{\alpha X^p Y^q, XY\}$.

▷ Si $p = q$, on a $\alpha X^p Y^p = -\frac{n}{(p+1)^2} \{\alpha Y^{p+1}, X^{p+1}\}$.

On a donc démontré le résultat suivant :

Proposition 3.4.5

Le 0-ème espace d'homologie de Poisson de $S^{\mathfrak{S}_n}$ est nul.

Remarque 3.4.6

On peut alors affirmer que l'Equation 3.14 pour $S^{\mathfrak{S}_n}$ n'a aucune solution.

3.5 Calculs formels

Nous regroupons dans ce paragraphe des vérifications effectuées avec Maple.

3.5.1 Définitions

- La fonction `Image` calcule l'image du polynôme $P \in \mathbb{A}[\mathbf{X}]$ par la matrice $J \in \mathbf{GL}_n \mathbb{C}$, selon l'action diagonale, avec $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, et $\mathbb{A} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{A} = \mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{t}]$.

```
Image:=proc(P,X::list,J) local n: n:=nops(X)/2:
subs({seq(X[i]=add(J[i,j]*X[j],j=1..n),i=1..n),seq(X[i]=add(J[i-n,j-n]*X[j],
j=n+1..2*n),i=n+1..2*n)},P); end proc:
```

- La fonction `Reynolds` calcule l'image par l'opérateur de Reynolds associé au groupe $W \subset \mathbf{GL}_n \mathbb{C}$ du polynôme $P \in \mathbb{A}[\mathbf{X}]$, selon l'action diagonale.

```
Reynolds:=proc(P,X::list,W::list) local card,n: card:=nops(W): n:=nops(X)/2:
1/card*add(Image(P,X,W[j]),j=1..card); end proc:
```

- La fonction `kron` retourne le symbole de Kronecker de (i, j) .

```
kron:=proc(i,j) if i=j then 1 else 0 fi; end proc:
```

- La fonction `repr` reçoit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, écrite sous la forme d'une liste $[\sigma(1), \dots, \sigma(n)]$, et retourne la matrice de taille $n \times n$ et de terme général $\delta_{i,\sigma(j)}$, i. e. la matrice de permutation associée à σ .

```
repr:=proc(sigma) local n: n:=nops(sigma): matrice(n,(i,j)->kron(i,sigma[j]));
end proc:
```

- Définition des groupes de Weyl de B_2 et D_2 :

```
t12:=<<0,1>|<1,0>>: s1:=<<-1,0>|<0,1>>: s2:=<<1,0>|<0,-1>>:
s12:=<<-1,0>|<0,-1>>:
B2:=[seq(seq(seq(t12^i.s1^j.s2^k,i=0..1),j=0..1),k=0..1)]:
D2:=[seq(seq(seq(t12^i.s12^j,i=0..1),j=0..1)]:
```

- Définition du groupe de Weyl de B_3 :

```
avec(groupe): S3gr:=permgroupe(3,[[[1,2]],[[1,2,3]]]);
S3grbis:=[op(éléments(S3gr))]:
S3grliste:=application(x->convert(x,'permlist',3),S3grbis):
S3:=application(repr,S3grliste):
s1:=<<-1,0,0>|<0,1,0>|<0,0,1>>: s2:=<<1,0,0>|<0,-1,0>|<0,0,1>>:
s3:=<<1,0,0>|<0,1,0>|<0,0,-1>>:
B3:=[seq(seq(seq(seq(S3[i].s1^j.s2^k.s3^l,i=1..6),j=0..1),k=0..1),l=0..1)]:
```

- Définition du groupe de Weyl de D_3 :

```
s12:=<<-1,0,0>|<0,-1,0>|<0,0,1>>: s23:=<<1,0,0>|<0,-1,0>|<0,0,-1>>:
D3:=[seq(seq(seq(S3[i].s12^j.s23^k,i=1..6),j=0..1),k=0..1)]:
```

3.5.2 Vérification du calcul des Propositions 3.3.1 et 3.3.2

Les calculs suivants permettent de vérifier que $E_2(R_2(X^2)) = 0$ pour B_2 et que $E_2(R_2(X^2)) \neq 0$ pour D_2 .

```
ind:=[seq(x[j],j=1..2),seq(y[j],j=1..2)]:
```

```
uB:=Reynolds((x[1]*y[2]-y[1]*x[2])^2,ind,B2);
vB:=add(z[j]*y[j]-t[j]*x[j],j=1..2)*subs({seq(x[j]=x[j]+z[j],j=1..2),
seq(y[j]=y[j]+t[j],j=1..2)},uB): equaB:=Reynolds(vB,ind,B2):
equaBd:=expand(equaB);
```

```
uD:=Reynolds((x[1]*y[2]-y[1]*x[2])^2,ind,D2);
vD:=add(z[j]*y[j]-t[j]*x[j],j=1..2)*subs({seq(x[j]=x[j]+z[j],j=1..2),
seq(y[j]=y[j]+t[j],j=1..2)},uD): equaD:=Reynolds(vD,ind,D2):
equaDd:=expand(equaD);
```


3.5.3 Vérification des identités de la Proposition 3.3.5

Les calculs suivants prouvent les identités $E_3(R_3(X^2)) = 0$ et $E_3(R_3(X^2Y^2)) = 0$.

```
ind:=[seq(x[j],j=1..3),seq(y[j],j=1..3)]:

u1:=Reynolds((x[1]*y[2]-y[1]*x[2])^2,ind,B3):
v1:=add(z[j]*y[j]-t[j]*x[j],j=1..3)*subs({seq(x[j]=x[j]+z[j],j=1..3),
seq(y[j]=y[j]+t[j],j=1..3)},u1): equa1:=Reynolds(v1,ind,B3):
equad1:=expand(equa1);

u2:=Reynolds((x[1]*y[2]-y[1]*x[2])^2*(x[2]*y[3]-y[2]*x[3])^2,ind,B3):
v2:=add(z[j]*y[j]-t[j]*x[j],j=1..3)*subs({seq(x[j]=x[j]+z[j],j=1..3),
seq(y[j]=y[j]+t[j],j=1..3)},u2): equa2:=Reynolds(v2,ind,B3):
equad2:=expand(equa2);
```

3.5.4 Vérification des calculs de la Proposition 3.3.8

Le calcul suivant montre que les polynômes $R_3(X^2)$ et $R_3(X^2Y^2)$ ne sont pas solutions de l'Equation (3.14).

```
ind:=[seq(x[j],j=1..3),seq(y[j],j=1..3)]:

u1:=Reynolds((x[1]*y[2]-y[1]*x[2])^2,ind,D3):
v1:=add(z[j]*y[j]-t[j]*x[j],j=1..3)*subs({seq(x[j]=x[j]+z[j],j=1..3),
seq(y[j]=y[j]+t[j],j=1..3)},u1): equa1:=Reynolds(v1,ind,D3):
equad1:=expand(equa1):
nops(equad1);

u2:=Reynolds((x[1]*y[2]-y[1]*x[2])^2*(x[2]*y[3]-y[2]*x[3])^2,ind,D3):
v2:=add(z[j]*y[j]-t[j]*x[j],j=1..3)*subs({seq(x[j]=x[j]+z[j],j=1..3),
seq(y[j]=y[j]+t[j],j=1..3)},u2): equa2:=Reynolds(v2,ind,D3):
equad2:=expand(equa2):
nops(equad2);
```

CHAPITRE 4

Déformation par quantification sur l'orbite nilpotente minimale d'une algèbre de Lie semi-simple

Ce chapitre s'appuie sur un texte de Christian Frønsdal (arXiv-math/0510580v1 [math.RT]).
A la demande de Daniel Sternheimer, il a été développé, précisé et approfondi.

On considère une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} , avec l'action de son groupe adjoint. Parmi les trois orbites nilpotentes canoniques sous cette action, l'orbite minimale est l'orbite non nulle de plus petite dimension.

Nous nous intéressons à la quantification par déformation équivariante et construisons des star-produits \mathfrak{g} -invariants sur la clôture de l'orbite minimale, qui est une variété algébrique singulière. Dans ce chapitre, nous utilisons l'homologie et la cohomologie de Hochschild ainsi que des résultats sur les invariants des groupes classiques, et certaines représentations intéressantes des algèbres de Lie simples.

A l'orbite minimale est associé un unique idéal bilatère complètement premier de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Cet idéal est primitif et est appelé idéal de Joseph. Nous donnons des expressions explicites de ses générateurs et calculons ses caractères infinitésimaux.

4.1 Introduction

4.1.1 Cadre de l'étude

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{C} , \mathfrak{g}' son dual sur \mathbb{C} , et G son groupe de Lie adjoint. Le groupe G agit de façon lisse sur \mathfrak{g}' et chaque orbite sous cette action est munie d'une structure de variété symplectique (voir par exemple [MR99]). De plus, la clôture de chaque orbite coadjointe est une variété algébrique du type

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n / \forall r \in R, r(x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

où R est un ensemble de polynômes. Nous nous intéressons à l'algèbre quotient $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \langle R \rangle$.

Comme l'a montré Kirillov [Kir74], il existe des liens intéressants entre les orbites coadjointes et la théorie des représentations. De leur côté, Kostant [Kos70] et Souriau [Sou70] ont repris des concepts provenant des mécaniques classique et quantique, et tout particulièrement de la quantification. Entre-temps, Gerstenhaber a développé la théorie des déformations [Ger64], et finalement, dans l'article fondateur [BFF⁺78], la quantification sur une variété symplectique a été considérée comme une déformation d'une algèbre de fonctions.

La plupart des travaux récents sur ce sujet paraît minimiser les caractéristiques des orbites coadjointes dues à l'algèbre de Lie. Ici, nous étudions une quantification par déformation qui utilise davantage la structure de l'algèbre de Lie. Nous considérons des star-produits algébriques \mathfrak{g} -invariants (voir [BFF⁺78]), mais notre but n'est pas de prouver l'existence de ces star-produits, invariants ou non. Nous utilisons l'analogie avec la quantification des systèmes mécaniques et la théorie des champs. La méthode de quantification introduite par Weyl, liée au principe de correspondance de Bohr, est efficace puisqu'elle complète les méthodes cohomologiques là où celles-ci ne sont plus applicables.

Récemment, des star-produits différentiels et algébriques sur des orbites régulières [FLL02] et sur des orbites singulières ([Lle01], [FL01], [FLV05]) de groupes de Lie semi-simples compacts ont été étudiés. Leurs auteurs considèrent une application injective [FL02]

$$(\mathbb{C}[X], *_{\text{alg}}) \hookrightarrow (\mathcal{C}^\infty(X), *_{\text{diff}}),$$

où X est une orbite coadjointe. Dans le cas non compact, ils étendent leur construction de star-produits à des orbites semi-simples singulières. Mais ils ne traitent pas l'orbite nilpotente singulière, qui est notre principale préoccupation ici.

4.1.2 Terminologie

Nous rappelons les définitions des orbites et précisons la terminologie utilisée tout au long du chapitre. Le corps de base est \mathbb{C} (sauf mention expresse du contraire).

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple complexe et G un groupe de Lie semi-simple connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , les *orbites coadjointes* sont les orbites dans le dual \mathfrak{g}' sous l'action adjointe de G . Une orbite coadjointe est dite *semi-simple* (resp. *nilpotente*) si c'est l'orbite d'un élément semi-simple (resp. nilpotent) de \mathfrak{g}' . Nous verrons dans le Paragraphe 4.4.1 qu'à la différence de

l'ensemble des orbites semi-simples, l'ensemble des orbites nilpotentes est fini et contient trois orbites canoniques : l'orbite *principale* (ou *régulière*), l'orbite *sous-régulière* et l'orbite *minimale*, notée \mathcal{O}_{min} , qui retiendra notre attention dans cette étude. Les orbites coadjointes sont des variétés différentiables (lisses). La clôture de Zariski de l'orbite minimale nilpotente est l'union disjointe de cette orbite et de l'unique orbite de dimension zéro (l'origine) ; c'est une variété algébrique singulière. Dans ce chapitre, nous construisons des star-produits \mathfrak{g} -invariants sur la clôture de Zariski $\overline{\mathcal{O}_{min}}$ de \mathcal{O}_{min} . Comme l'orbite minimale est déterminée par sa clôture, nous appellerons souvent, pour simplifier, $\overline{\mathcal{O}_{min}}$ "l'orbite minimale" au lieu de "la clôture de Zariski de l'orbite minimale". Plus généralement, la clôture $\overline{\mathcal{O}}$ d'une orbite *non générique* \mathcal{O} (une orbite générique est une orbite de dimension maximale) est une variété algébrique singulière qui est stratifiée en plusieurs orbites de dimensions différentes.

4.1.3 Résultats

Nous étudions des déformations algébriques des algèbres de coordonnées de certaines variétés algébriques avec singularités, un contexte dans lequel on peut espérer que la décomposition BGS (voir [Bar62], [Bar68], [Fle71], [Gar90], [GS87] et [Har62]) a des applications importantes. Les orbites coadjointes des groupes de Lie simples sont apparentées par leur clôture à une famille de variétés algébriques, et les algèbres de coordonnées de ces variétés ont des déformations intéressantes. Dans ce cadre, notre travail se focalise sur les star-produits invariants à l'exclusion de tous les autres.

Une des méthodes utilisées est la réduction de la cohomologie à un complexe de chaînes linéaires fermées. Contrairement à ce que l'on pouvait imaginer, il s'avère difficile d'obtenir suffisamment d'informations sur l'homologie, difficulté qui a déjà été rencontrée dans [BJ98] malgré les outils employés ([Bez95], [BGS88]). Le fait de considérer un star-produit comme une correspondance entre des polynômes ordinaires et des star-polynômes permet de terminer les calculs.

Les principaux résultats du chapitre sont les suivants :

(1) La(co)homologie de Hochschild de l'algèbre de coordonnées graduée d'une variété algébrique définie par des relations quadratiques est isomorphe à celle de la restriction aux chaînes linéaires fermées. Les obstructions à étendre un star-produit du premier ordre (une déformation infinitésimale) en un star-produit associatif formel à tous les ordres, peuvent donc être réduites à l'étude des star-produits $x * x$ et $x * x * x$ pour x de degré 1.

(2) L'orbite coadjointe nilpotente minimale d'une algèbre de Lie simple complexe \mathfrak{g} différente de \mathfrak{sl}_n , admet une famille à un paramètre de star-produits invariants. Dans le cas de \mathfrak{sl}_n , nous déterminons une famille à deux paramètres de déformations, incluant une sous-famille à un paramètre de déformations abéliennes. Dans tous les autres cas, il y a un unique star-produit invariant tel que

$$\forall u, v \in \mathfrak{g}', \quad u * v - v * u = \hbar \{u, v\}, \quad \text{et} \quad u * u = uu + k,$$

pour un unique $k \in \mathbb{C}[[\hbar]]$, où $\{u, v\}$ est le crochet de Poisson, (voir Paragraphe 4.5). La valeur

de k est déterminée par l'examen du cas suivant,

$$u * u * u = uuu + \phi(u),$$

où ϕ est un polynôme de degré un. Les paramètres k et ϕ sont tous deux déterminés de façon unique par les relations qui définissent l'orbite. Le même type de calcul est valable pour les cinq algèbres exceptionnelles.

Pour \mathfrak{sl}_n et les autres algèbres de Lie simples classiques, nous calculons les générateurs des idéaux de Joseph et nous déterminons les modules de plus haut poids associés. Il en découle l'unicité de l'idéal de Joseph (voir [GS04]).

4.1.4 Travaux récents apparentés

Dans [GW08], Gukov et Witten étudient la quantification d'une variété symplectique dans le cadre de la théorie des cordes. Ils utilisent des sigma-modèles de dimension deux et s'intéressent particulièrement au cas où la variété symplectique M admet une complexification Y qui est une variété affine, i. e. l'ensemble des zéros d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Un point important est l'existence d'une structure de Spin_c plate sur M . En conséquence, ils remarquent que ni leur méthode, ni celle de Brylinski [Bry98], n'est applicable dans le cas de l'orbite minimale nilpotente de $\mathfrak{so}(p, q)$ avec $p + q$ impair et $p, q \geq 4$. Mais les résultats obtenus dans le présent chapitre pour $sl_n(\mathbb{C})$ peuvent être appliqués à ce cas.

Une autre étude intéressante est celle de Halbout, Oudom et Tang ([HT06] et [HOT08]). Leur point de vue dans [HT06] est différent du nôtre parce qu'ils considèrent une variété symplectique M et calculent le crochet de Gerstenhaber du produit semi-direct $\mathcal{C}^\infty(M) \rtimes \Gamma$, où Γ est un groupe fini agissant sur M . Cela leur permet de classifier les structures de Poisson non commutatives sur $\mathcal{C}^\infty(M) \rtimes \Gamma$. Il existe néanmoins un lien avec nos travaux : en effet, dans le cas des orbites minimales singulières nilpotentes (que nous étudions dans ce chapitre), si une variété M est un revêtement de dimension finie d'une orbite singulière, l'orbite peut être représentée par un quotient de ce revêtement par un groupe discret. Quant à [HOT08], il traite plus particulièrement le cas de relations quadratiques généralisées dans $T(V) \rtimes \Gamma$, où $T(V)$ est l'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel V .

4.1.5 Plan du chapitre

Le Paragraphe 4.2 est une étude de la cohomologie de Hochschild des variétés algébriques définies par des ensembles de relations quadratiques. On utilise principalement ici une réduction du complexe de Hochschild à un sous-complexe de chaînes linéaires fermées (voir le Théoreme 4.2.4). La méthode est effective quand l'algèbre sous-jacente est engendrée par un nombre fini de générateurs et graduée, comme dans le cas de relations quadratiques (homogènes), avec seulement des degrés strictement positifs. La décomposition BGS est utilisée durant toute l'étude.

Le Paragraphe 4.3 introduit les star-produits invariants sur les orbites coadjointes d'une algèbre de Lie semi-simple. Le Paragraphe 4.3.3 donne un exemple où apparaissent des représentations finies. Nous incluons un exemple de polynômes harmoniques dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple. Il en résulte une "sorte de déformation" (pas une déformation formelle)

dans laquelle la variété déformée (i. e. le spectre de la déformation de l'anneau de fonctions coordonnées) est une union finie de variétés disjointes.

Dans le Paragraphe 4.4, nous étudions les orbites nilpotentes minimales d'une algèbre de Lie semi-simple. Nous rappelons des résultats importants sur la structure de ces orbites. Puis dans le Paragraphe 4.4.2 nous donnons la définition des idéaux de Joseph. Enfin nous décrivons des représentations unitarisables, qui sont associées à ces orbites et aux idéaux de Joseph, et qui jouent un rôle remarquable en physique.

Le Paragraphe 4.5 examine des star-produits invariants sur les orbites coadjointes nilpotentes minimales, avec leurs idéaux de Joseph. Dans le calcul de la cohomologie de Hochschild, nous retrouvons une difficulté déjà rencontrée par Braverman et Joseph [BJ98] qui empêche d'obtenir une description détaillée du troisième espace d'homologie HH_3 de l'algèbre de coordonnées. Nous donnons seulement une Conjecture 4.5.1, et contournons la difficulté par un calcul direct, qui consiste à regarder un star-produit invariant comme un principe de correspondance, au sens de la quantification de Weyl. Une connaissance approfondie de la cohomologie du complexe restreint n'est alors pas nécessaire. On détermine enfin les générateurs des idéaux de Joseph.

Les algèbres de Lie \mathfrak{sl}_n et \mathfrak{so}_n sont traitées séparément. En revanche, les cinq algèbres de Lie simples exceptionnelles le sont simultanément et les calculs sont courts en raison du petit nombre d'invariants de ces algèbres de Lie.

4.2 Homologie et cohomologie de Hochschild de certaines variétés singulières

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'homologie et à la cohomologie de Hochschild de variétés singulières. Pour cela, nous utilisons les résultats du Paragraphe 1.2.7 du Chapitre 1 concernant la décomposition BGS de la (co)homologie de Hochschild. Nous allons étudier des variétés pour lesquelles les espaces $Z^{3,1}$, $Z^{3,2}$ et $Z^{3,1}$ sont tous non vides.

4.2.1 Cas des relations quadratiques : les variétés coniques

Nous appelons *variété conique* une variété algébrique du type \mathbb{C}^N / R , où $R = \{g_\alpha\}_{\alpha=1,2,\dots}$ est un ensemble de polynômes homogènes quadratiques,

$$g_\alpha = \sum_{i,j=1}^N g_\alpha^{ij} x_i x_j.$$

Soit A l'algèbre de coordonnées graduée, $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] / \langle R \rangle$, et A_+ la sous-algèbre (non unitaire) des éléments de *degré strictement positif* (ainsi nous utiliserons le complexe de Hochschild réduit, appelé ici par abus de langage "complexe de Hochschild"). La restriction aux degrés positifs est essentielle : en fait, les cochaînes sur A_+ s'étendent naturellement à A , mais l'homologie de A_+ est plus riche que celle de A , qui est nulle. Dans ce paragraphe, nous utilisons certains résultats de l'article [Frø02].

Définition 4.2.1

- Une chaîne de Hochschild $a = a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_p$ est dite linéaire si a_k est de degré 1 pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$.

Le complexe homologique de Hochschild restreint est la restriction du complexe homologique de Hochschild de A aux chaînes linéaires fermées. Nous notons $\widetilde{\mathcal{C}}_p(A)$ l'espace des p -chaînes du complexe restreint.

La différentielle de ce complexe est nulle, de sorte que l'espace d'homologie de degré p est $\widetilde{\mathcal{C}}_p(A)$ lui-même.

- Pour toute cochaîne de Hochschild $C \in \mathcal{C}^p(A_+)$, on note C' sa restriction aux chaînes linéaires fermées. Le complexe cohomologique de Hochschild restreint est le complexe tel que $\widetilde{\mathcal{C}}^p(A_+) = \{C' \mid C \in \mathcal{C}^p(A_+)\}$.

Remarque 4.2.2

Dans le cas d'une variété lisse, les chaînes du complexe restreint sont les chaînes antisymétriques et le théorème suivant se réduit alors au Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg [HKR62]. Pour d'autres généralisations, voir [FG99], [FK07], et le Paragraphe 4.2.3.

Définition 4.2.3

Etant donné deux complexes, un quasi-isomorphisme entre ces deux complexes est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme en cohomologie.

Théorème 4.2.4

Le complexe de Hochschild de A est quasi-isomorphe au complexe (co)homologique restreint.

Démonstration : (voir aussi [Frø02].)

Pour $C \in \mathcal{C}^{(p)}(A_+)$, posons $R_p(C) := C'$, et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\widetilde{d^{(p-2)}}} & \widetilde{\mathcal{C}^{(p-1)}(A_+)} & \xrightarrow{\widetilde{d^{(p-1)}}} & \widetilde{\mathcal{C}^{(p)}(A_+)} & \xrightarrow{\widetilde{d^{(p)}}} & \widetilde{\mathcal{C}^{(p+1)}(A_+)} \xrightarrow{\widetilde{d^{(p+1)}}} \cdots \\
 & & \uparrow R_{p-1} & & \uparrow R_p & & \uparrow R_{p+1} \\
 \cdots & \xrightarrow{d^{(p-2)}} & \mathcal{C}^{(p-1)}(A_+) & \xrightarrow{d^{(p-1)}} & \mathcal{C}^{(p)}(A_+) & \xrightarrow{d^{(p)}} & \mathcal{C}^{(p+1)}(A_+) \xrightarrow{d^{(p+1)}} \cdots
 \end{array}$$

Nous voulons montrer que $R_\bullet := (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un quasi-isomorphisme de complexes.

On vérifie dans un premier temps que R_\bullet est un morphisme de complexes, i. e.

$$\forall C \in \mathcal{C}^{(p-1)}(A_+), \quad \widetilde{d^{(p-1)}} \circ R_{p-1}(C) = R_p \circ d^{(p-1)}(C).$$

Pour montrer que R_\bullet est un quasi-isomorphisme, on utilise les deux propositions suivantes de [Frø02] :

- Pour toute cochaîne fermée $\widetilde{C} \in \widetilde{\mathcal{C}}^{(p)}(A_+)$, il existe une cochaîne de Hochschild $C \in \mathcal{C}^{(p)}(A_+)$ telle que $C' = \widetilde{C}$.
- Soit $C \in \mathcal{C}^{(p)}(A_+)$ une cochaîne de Hochschild fermée. Si C' est exacte, alors C est elle-même exacte.

Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{R_p} : HH^p(A_+) & \rightarrow & \widetilde{HH^p(A_+)} \\
 \overline{C} & \mapsto & R_p(C).
 \end{array}$$

Si $\overline{D} \in \widetilde{HH^p}(A_+)$, d'après le premier point, on a $D = R_p(C)$, et ainsi $\overline{D} = \overline{R_p(C)} = \overline{R_p(\overline{C})}$. Donc $\overline{R_p}$ est surjective.

Si $\overline{R_p(C)} = \overline{0}$, i. e. $R_p(C) \in \text{Im } \widetilde{d^{(p-1)}}$. Comme C est fermée, C est exacte d'après le second point. Ainsi $\overline{C} = \overline{0}$ et $\overline{R_n}$ est injective. ■

En l'absence de singularité, les cochaînes restreintes sont alternées et les cochaînes sont définies seulement sur les chaînes alternées. Ces n -cochaînes sont fermées et non homologues à zéro car la différentielle ne relie pas les projecteurs $e_n(n)$ et $e_{n+1}(n+1)$. Ainsi la différentielle est nulle. En présence de singularités, il existe des chaînes supplémentaires non triviales, et la fermeture d'une cochaîne, même si elle est alternée, doit être vérifiée sur celles-là.

4.2.2 Cas d'une unique relation quadratique : le cône simple

Dans ce paragraphe, nous étudions un cas particulier de variété conique : nous supposons que $R = \{g\}$ est formé d'un seul polynôme quadratique. Dans ce cas, on a les propriétés suivantes :

Proposition 4.2.5

Toute chaîne fermée est homologue à une chaîne linéaire et aucune chaîne linéaire n'est exacte. L'espace Z_{2k+l} des $(2k+l)$ -chaînes linéaires fermées est engendré par les $(2k+l)$ -chaînes suivantes, avec $Z_{2k+l,k+l} \in Z_{2k+1,k+l}$:

$$(Z_{2k+l,k+l})_{m_1 \dots m_l} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \sum_{\sigma \in S_{i,j,m}} (-1)^\sigma \sigma(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{j_k} \otimes x_{m_1} \otimes \dots \otimes x_{m_l}), \quad m_r \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

où $S_{i,j,m}$ est l'ensemble des permutations σ de l'ensemble $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k, m_1, \dots, m_l\}$ telles que pour tout $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'équivalence $(i_r < j_r \Leftrightarrow \sigma(i_r) < \sigma(j_r))$.

Exemple 4.2.6

$$\begin{aligned} (Z_{1,1})_i &= x_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \\ (Z_{2,2})_{ij} &= x_i \wedge x_j, \\ Z_{2,1} &= g^{ij} x_i \otimes x_j, \\ (Z_{3,3})_{ijk} &= x_i \wedge x_j \wedge x_k, \\ (Z_{3,2})_k &= g^{ij} (x_i \otimes x_j \otimes x_k - x_i \otimes x_k \otimes x_j + x_k \otimes x_i \otimes x_j), \\ (Z_{4,4})_{ijkl} &= x_i \wedge x_j \wedge x_k \wedge x_l, \\ (Z_{4,3})_{kl} &= g^{ij} (x_i \otimes x_j \otimes x_k \otimes x_l + x_k \otimes x_i \otimes x_j \otimes x_l + x_i \otimes x_l \otimes x_j \otimes x_k \\ &\quad + x_k \otimes x_l \otimes x_i \otimes x_j + x_i \otimes x_k \otimes x_l \otimes x_j + x_l \otimes x_i \otimes x_k \otimes x_j - (k \leftrightarrow l)), \\ (Z_{4,2}) &= g^{ij} g^{kl} (x_i \otimes x_k \otimes x_l \otimes x_j - x_i \otimes x_k \otimes x_j \otimes x_l + x_i \otimes x_j \otimes x_k \otimes x_l). \end{aligned}$$

A partir de maintenant, les notations $Z_{k,l}$, $B_{k,l}$, $Z^{k,l}$, $B^{k,l}$ représentent les espaces définis par référence au complexe restreint. La dimension de $Z_{2k+l,k+l} \subset HH_{2k+l,k+l}$ est C_l^N ou 0. On remarque que $Z_{3,1}$ est vide. Pour un ordre inférieur, un star-produit est déterminé par la 2-cochaîne C_1 , et à équivalence près, par les 2-cochaînes restreintes, c'est-à-dire par leurs valeurs $C_1^-(x_i \wedge x_j)$ et $g^{ij} C_1^+(x_i, x_j)$. L'élément $d^{(2)} C_1^+$ est dans $B^{3,1}$, et comme $Z^{3,1}$ est vide, toute 2-cochaîne restreinte symétrique est fermée. La différentielle $d^{(2)} C_1^-$ est dans $B^{3,2}$; C_1^- est fermé si et seulement

si $d^{(2)}C_1^-$ s'annule sur $Z_{3,2}$, i. e.

$$d^{(2)}C_1^-(Z_{3,2}) = 4g^{ij}x_iC_1^-(x_j, x_k) = 0,$$

ce qui s'interprète comme une propriété de tangence du champ de vecteurs hamiltonien $C_1^-(x_k, \cdot)$. L'addition de la forme exacte $d^{(2)}E$ à C_1 (nous la considérons un peu comme une transformation de jauge) n'affecte pas C_1^- mais elle ajoute $2g^{ij}x_iE(x_j)$ à $C_1^+(Z_{2,1}) = g^{ij}C_1^+(x_i, x_j)$.

Exemple 4.2.7

Supposons que la 2-forme g est non dégénérée.

Alors C_1^+ est fixé, à équivalence près, par son terme de degré zéro (dans le cas de fonctions régulières sur la clôture, par sa valeur $c = g^{ij}C_1^+(x_i, x_j)|_{x=0}$ en $x_1 = x_2 = \dots = 0$). Ainsi, $HH^{2,2}$ est l'espace des champs de vecteurs tangents sur le cône et $HH^{2,1} = \mathbb{C}$ (voir la fin de ce paragraphe pour la cohomologie équivariante).

Nous examinons les obstructions pour étendre le star-produit à tous les ordres en \hbar , en utilisant les Equations (1.10) et (1.12).

La vacuité de $B^{3,3}$ est une obstruction qui doit être contournée en imposant l'identité de Jacobi sur C_1^- . Comme C_1^- est fermé, elle s'étend en un unique crochet de Poisson sur A . Rappelons que si $(a, b) \mapsto \{a, b\}$ est un crochet de Poisson sur A , alors pour tout élément $f \in A$, l'application $f^\sharp : A \rightarrow A$ définie par $a \mapsto \{f, a\}$ est une dérivation. La projection de (1.10) sur $Z_{2,3}$ est maintenant résolue en prenant $C_n^-(x_i, x_j) = 0$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et tout $n \geq 2$. Ce choix, implicite dans le contexte des déformations différentiables, est l'un des axiomes des star-produits invariants.

• **Résumé :** La projection de l'Equation (1.12) sur $Z_{3,3}$ entraîne que

- (1) $C_1^-(x_i, x_j) = \{x_i, x_j\}$ s'étend en un crochet de Poisson sur A ,
- (2) $\{x_i, g(x, x)\} = 0$ est la condition que C_1 soit fermé,
- (3) $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall n \geq 2, C_n^-(x_i, x_j) = 0$.

La projection de l'Equation (1.10) sur $Z_{3,2}$ s'écrit, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\sum_{m+n=p+1} (-4g^{ij}C_m^+(C_n^-(x_i, x_k), x_j) + 2g^{ij}C_m^-(C_n^+(x_i, x_j), x_k)) = d^{(2)}C_{p+1}^-(Z_{3,2})_k = 4g^{ij}x_iC_{p+1}^-(x_j, x_k). \quad (4.1)$$

Si g est non dégénérée, alors on peut restreindre la valeur de $C_1^+(x_i, x_j)$ à \mathbb{C} (voir l'Exemple 4.2.7). L'obstruction est alors le terme de degré zéro du membre de gauche. Avec la relation (3) du résumé précédent, l'Equation (4.1) se simplifie en

$$2g^{ij}C_p^+(\{x_i, x_k\}, x_j) - g^{ij}\{C_p^+(x_i, x_j), x_k\} = 0. \quad (4.2)$$

Exemple 4.2.8

Si $\{x_i, x_k\} = \varepsilon_{ik}^m x_m$, les coefficients ε_{ik}^m étant les constantes de structure d'une algèbre de Lie simple \mathfrak{g} , alors (4.2) est vérifiée quand C_p^+ est la forme de Killing de \mathfrak{g} .

Exemple 4.2.9

Dans le cas de \mathfrak{sl}_n , il y a un 3-tenseur équivariant bien connu $f : A \otimes A \rightarrow A$, et $C_p^+ = f$ vérifie aussi (4.2). Explicitement, on a $f(a \otimes b) = ab + ba - \frac{2}{n}\text{tr}(ab)I_n$.

Exemple 4.2.10

Choisissons des coordonnées telles que $g(x, x) = x_N^2 - \rho(x)$, où $\rho(x)$ est un polynôme en x_1, \dots, x_N , de degré en x_N inférieur ou égal à 1. Comme toute fonction régulière sur le cône est la restriction d'un polynôme en x_1, \dots, x_N , elle a une unique décomposition de la forme $f = f_1 + x_N f_2$, où f_1, f_2 sont des polynômes en x_1, \dots, x_{N-1} . Définissons (voir [Frø01])

$$f * g = fg + \hbar f_2 g_2 = fg|_{x_N^2 = \rho(x) + \hbar}. \quad (4.3)$$

Alors l'application bilinéaire $*$ est un star-produit. Elle peut être vue comme le produit ordinaire des fonctions sur l'hyperboloïde $g(x, x) = \hbar$. Cette déformation, dans laquelle C_1 est symétrique, peut être suivie d'une autre déformation dans laquelle C_1 est antisymétrique, menant à un crochet de Poisson tel que les champs de vecteurs $\{x_i, \cdot\}$ sont tangents à l'hyperboloïde $g(x, x) = \hbar$; la cohomologie de Harrison n'intervient à aucun niveau. Quand les deux déformations sont combinées, nous remarquons qu'avec la définition de C_1^+ donnée dans l'Equation (4.3), i. e. $C_1^+(f, g) = f_2 g_2$, l'unique contribution du membre de gauche de l'Equation (4.2) en $x = 0$ provient du terme linéaire en $\{x_i, x_k\}$. La fermeture de C_m^- implique que le champ de vecteurs $\{\cdot, x_k\}$ est tangent à $g(x, x) = \hbar$.

• **Cohomologie équivariante** : dans le contexte des algèbres de Lie et des star-produits invariants, toutes les applications seront équivariantes. Cela a des conséquences sur la question d'exactitude, comme dans l'Exemple 4.2.7, et nous en tiendrons compte quand l'occasion se présentera. Le Théorème 4.2.4 n'en est pas affecté.

4.2.3 Cas d'une unique relation polynomiale

Soit $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] / \langle g \rangle$, où g est un polynôme sans terme constant ni terme linéaire.

Graduation : désormais nous ne nous limitons plus aux chaînes homogènes. Par une transformation linéaire appropriée des variables nous transformons le polynôme g en un polynôme de la forme $x_1^t + h(x_1, \dots, x_N)$, où h est un polynôme de degré strictement inférieur à t en x_1 .

Un polynôme *normalisé* est un polynôme dont le degré en x_1 est strictement inférieur à t . Pour toute fonction régulière sur \mathbb{C}^N / g il existe un unique polynôme normalisé, obtenu par une division euclidienne dans $(\mathbb{C}[x_2, \dots, x_N])[x_1]$. Le degré de la fonction régulière est, par définition, le degré de ce polynôme normalisé.

Soit g un polynôme normalisé en x_1, \dots, x_n , sans terme constant ni terme linéaire. Ecrivons g sous la forme

$$g = \sum_{a,b=1}^K g^{ab} y_a y_b, \text{ avec } g^{ab} = g^{ba} \in \mathbb{C}, a, b = 1 \dots K,$$

où pour tout $a = 1 \dots K$, le facteur polynomial y_a n'a pas de terme constant. Soient A l'algèbre filtrée $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] / \langle g \rangle$ et A_+ l'ensemble des éléments de degré strictement positif de A . A tout élément de A_+ est associé un unique polynôme normalisé.

Notons Z_{2k+l} l'espace des p -chaînes fermées, engendrées par les p -chaînes suivantes, pour $p = 2k + l = 1, 2, \dots$, et $m_1, \dots, m_l = 1, \dots, N$,

$$(Z_{2k+l,k+l})_{m_1 \dots m_l} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_k b_k} \sum_{\sigma \in S_{a,b,m}} \varepsilon(\sigma) \sigma(y_{a_1} \otimes \dots \otimes y_{b_k} \otimes x_{m_1} \otimes \dots \otimes x_{m_l}),$$

où $S_{a,b,m}$ est l'ensemble des permutations σ de l'ensemble $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, m_1, \dots, m_l\}$ telles que pour tout $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'équivalence $(a_r < b_r \Leftrightarrow \sigma(a_r) < \sigma(b_r))$.

Théorème 4.2.11

La restriction du complexe de Hochschild aux chaînes définies ci-dessus est un quasi-isomorphisme. En particulier, leurs cohomologies sont isomorphes.

La preuve de ce théorème est semblable à celle du Théorème 4.2.4, mais elle nécessite le Lemme 4.2.12. Soit A_+ l'algèbre filtrée sans unité comme ci-dessus. Le degré d'une A_+ -chaîne $a_1 \otimes \dots \otimes a_p$ est par définition la somme des degrés de ses facteurs.

Lemme 4.2.12

Si une A_+ p -chaîne a est exacte, alors il existe une $(p+1)$ -chaîne b , de même degré que a , telle que $a = d_{p+1}b$. Voir [FK07].

4.3 Introduction aux star-produits \mathfrak{g} -invariants sur les orbites coadjointes

4.3.1 Origine du problème

L'origine du problème est la suivante (voir [AMA76]). Soit W un espace symplectique muni du tenseur de Poisson Λ et considérons une action¹ de \mathfrak{so}_3 , définie par les champs de vecteurs hamiltoniens $\Lambda(dL_i)$, $i = 1 \dots 3$ où $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{C}^\infty(W)$ vérifient les relations suivantes sur le crochet de Poisson,

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k.$$

1. Rappelons un résultat sur les orbites coadjointes de \mathfrak{so}_3' : on pose

$$e_1 := E_{3,2} - E_{2,3}, \quad e_2 := E_{1,3} - E_{3,1}, \quad e_3 := E_{2,1} - E_{1,2},$$

de sorte que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathfrak{so}_3 , avec $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$. La structure de Poisson de BKKS sur \mathfrak{so}_3' est alors définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathfrak{so}_3'), \{f, g\} = (\nabla_\xi f \wedge \nabla_\xi g) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \text{ i. e. } P(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\xi = \xi_1 e'_1 + \xi_2 e'_2 + \xi_3 e'_3$. Les orbites coadjointes sont alors les sphères concentriques de centre l'origine.

L'élément de Casimir

$$Q := \sum_{i=1}^3 L_i^2 \in \mathcal{C}^\infty(W)$$

est un invariant de l'action adjointe, i. e.

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \{L_i, Q\} = 0.$$

Les champs de vecteurs hamiltoniens laissent invariante chaque surface $\{Q = k\}$ ($k \in \mathbb{C}$), et chacune de ces surfaces est une feuille symplectique avec une structure de Poisson induite.

Le problème est de construire un star-produit invariant $*$ tel que le star-polynôme

$$\mathcal{W}(Q) := \sum_{i=1}^3 L_i * L_i$$

soit *central*, i. e.

$$L_i * \mathcal{W}(Q) = \mathcal{W}(Q) * L_i,$$

et *fixé*, i. e.

$$\exists q \in \mathbb{C} / \forall f \in \mathcal{C}^\infty(W), \mathcal{W}(Q) * f = qf.$$

4.3.2 Définition des star-produits \mathfrak{g} -invariants

Soit G un groupe de Lie, G_e la composante connexe de G contenant l'élément neutre, \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , et \mathfrak{g}' son dual. Etant donné une orbite W sous l'action coadjointe de G_e sur \mathfrak{g}' on a un morphisme de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{C}^\infty(W)$

$$S(\mathfrak{g}) = \mathcal{F}(\mathfrak{g}') \xrightarrow{\text{restriction}} \mathcal{F}(W) \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathcal{C}^\infty(W),$$

où $\mathcal{F}(W)$ désigne l'espace des fonctions polynomiales sur W . On identifie \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' comme espaces vectoriels. Alors il existe une structure de Poisson naturelle $\{\cdot, \cdot\}$ sur W (structure de Poisson de Berezin-Kirillov-Kostant-Souriau divisée par \hbar), telle que

$$\forall a, b \in \mathfrak{g}, \hbar\{a, b\} = [a, b].$$

Définition 4.3.1

Un star-produit sur une orbite coadjointe W est \mathfrak{g} -invariant si, pour tout $k \in \mathbb{C}$, pour tout $(a, b) \in \mathfrak{g}^2$ et pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(W)^2$, on a les trois propriétés suivantes

- (1) $k * a = a * k = ka$,
- (2) $a * b - b * a = \hbar\{a, b\}$,
- (3) $\{a, f * g\} = \{a, f\} * g + f * \{a, g\}$.

Tout au long du chapitre, nous nous intéressons aux star-produits algébriques, i. e. aux star-produits qui sont définis (seulement) sur $S(\mathfrak{g})$, l'ensemble des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g}' .

Etant donné un star-produit associatif $*$ sur W , on définit une application linéaire \mathcal{W} de l'algèbre symétrique dans $\mathcal{C}^\infty(W)[[\hbar]]$ par la formule

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(W)[[\hbar]] \\ a_1 \dots a_n &\mapsto \mathcal{W}(a_1 \dots a_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)} * \dots * a_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $a \in \mathfrak{g}$, on a $\mathcal{W}(a^n) = (a*)^n$, et pour tout polynôme $P(a)$ on écrit $P(a, *)$ pour $\mathcal{W}(P(a))$.

Inversement, toute application linéaire inversible \mathcal{W} , qui associe un élément de $\mathcal{C}^\infty(W)$ à chaque star-monôme formel symétrisé, définit un star-produit associatif sur $\mathcal{C}^\infty(W)$.

Le produit de Moyal original est l'unique star-produit associatif invariant pour $W = \mathbb{R}^{2N}$ muni du crochet de Poisson standard tel que $\mathcal{W}(a^n) = a^n$ pour tout a linéaire en les coordonnées naturelles. Il est invariant sous l'action de l'algèbre de Lie des transformations symplectiques affines. Son domaine de définition inclut l'espace des fonctions régulières, i. e. l'espace des polynômes en les générateurs.

Une méthode pour construire tous les star-produits invariants pour toute algèbre de Lie semi-simple compacte, sur n'importe quelle orbite coadjointe régulière, a été formulée il y a trente ans (voir [BFF⁺78] et [Frø78]). Voir [Lle01] pour les orbites non régulières d'un groupe compact.

Définition 4.3.2

Un star-produit sur W est non dégénéré si l'espace des star-polynômes (en fait, l'image par \mathcal{W}) est dense dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(W)$.

Définition 4.3.3 ([Kir74] p. 185, [Kir04] p. 368)

Soit π une représentation irréductible de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$, et soit $Z(U(\mathfrak{g}))$ le centre de $U(\mathfrak{g})$. D'après le Lemme de Schur, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $\pi(X) = \lambda_\pi(X)\mathbf{1}$, et l'application

$$Z(U(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathbb{C}, \quad X \mapsto \lambda_\pi(X)$$

est un morphisme d'algèbres appelé caractère infinitésimal de π .

Définition 4.3.4 ([Kir04] p. 155)

Une orbite coadjointe régulière (ou générique) est une orbite coadjointe de dimension maximale (nous verrons dans le Paragraphe 4.4.1 qu'il existe une unique orbite nilpotente régulière).

4.3.3 Exemples liés à \mathfrak{so}_n

Le théorème suivant décrit les star-produits dans le cas d'une orbite coadjointe régulière de \mathfrak{so}_n .

Théorème 4.3.5 ([BFF⁺78] § 11 et [BF81])

• Soit $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}_n$. Soit $\{P_0 := 1, P_1(a) := a, P_2, P_3, \dots\}$ un ensemble complet d'éléments harmoniques irréductibles homogènes de la projection de $S(\mathfrak{g}')$ sur une orbite coadjointe régulière

W , et soit $\{P_n(a, *) \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble correspondant des star-polynômes symétriques. Alors un star-produit invariant associatif, non dégénéré sur W est donné par un caractère infinitésimal $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathbb{C}$ et par les formules

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathfrak{g}, P_n(a, *) &:= C_n P_n(a), \quad C_n \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad C_0 = C_1 = 1, \\ \forall (a, b) \in \mathfrak{g}^2, \quad a * b - b * a &= \hbar[a, b]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

• Dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$, $P_n(a)$ est un polynôme de Legendre solide et les polynômes $P_n(a, *)$ peuvent être obtenus à partir de la relation de récurrence (obtenue et démontrée dans [BF81])

$$(n+1)P_{n+1}(a, *) = (2n+1)a * P_n(a, *) - n \left(q + \frac{1-n^2}{4}\hbar^2 \right) |a|^2 P_{n-1}(a, *),$$

avec $P_0(a, *) = 1$. Le paramètre q est l'image de l'opérateur de Casimir $\sum_{i=1}^3 L_i * L_i$ par le caractère infinitésimal.

Représentations de dimension finie de \mathfrak{g} :

Un star-produit invariant donne une action de \mathfrak{g} sur la star-algèbre, et sur $\mathcal{C}^\infty(W)$, par les homomorphismes $\pi_l : a \mapsto a*$ et $\pi_r : a \mapsto *(-a)$, définis par

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(W), \quad \pi_l(a)f = a * f \text{ et } \pi_r(a)f = -f * a.$$

Dans le cas des algèbres de Lie compactes, nous nous attendons à trouver des représentations de dimension finie. Et dans le cas particulier de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$, le résultat est explicite : c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.3.6

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$. Un star-produit associatif invariant est de l'un des deux types suivants, tous les deux définis comme dans l'Equation(4.4) :

- (1) Pour tout n , on a $C_n \neq 0$; l'action π_l ou π_r engendrée par $a*$ ou $*(-a)$, $a \in \mathfrak{g}$, n'est pas semi-simple. Dans ce cas, le choix $C_n = 1 + o(\hbar)$ pour $n > 1$ fournit une déformation équivariante pour toute valeur q du Casimir $\sum_{i=1}^3 L_i * L_i$: on a une famille à un paramètre de star-produits.
- (2) Si l'image du Casimir par le caractère infinitésimal prend la valeur $q = l(l+1)$, avec $2l \in \mathbb{N}$, alors l'algèbre des star-polynômes contient un idéal engendré par $P_{2l+1}(a, *)$. Le quotient est une star-algèbre de dimension finie et est engendré par la projection de $\{P_n(a, *) \mid n \in \llbracket 0, 2l \rrbracket\}$. L'action de $a*$ et $*(-a)$ est équivalente au produit direct de deux copies de la représentation irréductible de dimension $2l+1$ de \mathfrak{su}_2 . Le polynôme $P_{2l+1}(a, *)$ se réduit dans ce cas à

$$P_{2l+1}(a, *) \propto \prod_{m=-l}^l (a * -m|a|), \quad a = \sum_{i=1}^3 a_i L_i, \quad |a| := \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2},$$

et pour tout $n > 2l+1$, $P_{2l+1}(a, *)$ divise $P_n(a, *)$.

Le spectre, c'est-à-dire l'espace des idéaux maximaux, a un nombre fini de composantes connexes.

4.4 Orbites minimales, représentations, et idéaux de Joseph

4.4.1 Orbites adjointes et coadjointes

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats sur les orbites adjointes et coadjointes (voir [CM93] pour plus de détails et [Kir04] pour des exemples et d'autres propriétés des orbites coadjointes). Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, et G un groupe de Lie semi-simple, complexe, connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Définition 4.4.1

- Soit $X \in \mathfrak{g}$. On dit que X est semi-simple (resp. nilpotente) si ad_X est un endomorphisme semi-simple (resp. nilpotent) de \mathfrak{g} . L'orbite adjointe de X est l'ensemble $\mathcal{O}_X := \{Ad_g(X) \mid g \in G\}$. Elle est dite semi-simple (resp. nilpotente) si X est semi-simple (resp. nilpotent).
- Soit $\varphi \in \mathfrak{g}'$. Posons $\mathfrak{g}^\varphi := \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_X^* \varphi = 0\}$. C'est l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie de φ pour l'action coadjointe. On dit que φ est semi-simple (resp. nilpotent) si \mathfrak{g}^φ est réductif dans \mathfrak{g} (resp. $\varphi|_{\mathfrak{g}^\varphi} = 0$). On appelle \mathcal{S} (resp. \mathcal{N}) l'ensemble des éléments semi-simples (resp. nilpotents) de \mathfrak{g}' . L'orbite coadjointe de φ est l'ensemble $\mathcal{O}_\varphi := \{Ad_g^*(\varphi) \mid g \in G\}$. Elle est dite semi-simple (resp. nilpotente) si φ est semi-simple (resp. nilpotent).

Pour $\varphi \in \mathfrak{g}'$, on pose

$$\omega_\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(X, Y) \mapsto \varphi([X, Y]).$$

Alors ω_φ est une forme symplectique sur $\mathfrak{g} / \mathfrak{g}^\varphi \simeq T_\varphi \mathcal{O}_\varphi$, et ω_φ s'étend en une structure symplectique complexe sur \mathcal{O}_φ (voir par exemple [MR99] pour une preuve de ce résultat). Puisque \mathfrak{g} est semi-simple, la forme de Killing κ est non dégénérée. D'où l'isomorphisme de \mathfrak{g} -espaces

$$i_\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}', \quad X \mapsto (Y \mapsto \kappa(X, Y)).$$

Alors par invariance de κ , on a

$$\boxed{i_\kappa(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{i_\kappa(X)}}.$$

Par conséquent il existe une correspondance bijective entre les orbites adjointes et coadjointes qui préserve les propriétés de semi-simplicité et de nilpotence.

Dans la suite, nous identifierons donc parfois orbites adjointes et coadjointes.

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , et W son groupe de Weyl. Alors on a la classification suivante des orbites semi-simples.

Théorème 4.4.2

L'ensemble des orbites semi-simples est en correspondance bijective avec l'ensemble \mathfrak{h} / W . Cet ensemble est donc infini.

Au contraire, l'ensemble \mathcal{NILP} des orbites nilpotentes est fini. Il est en bijection avec l'ensemble des diagrammes de Dynkin à poids de \mathfrak{g} . La classification résulte des théorèmes de Jacobson-Morozov, Kostant, et Mal'cev (voir [CM93] pour ces théorèmes et leur preuve). De plus, il existe un ordre partiel \preceq sur l'ensemble \mathcal{NILP} , défini par

$$\forall \mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{NILP}, \quad (\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}' \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O}} \subseteq \overline{\mathcal{O}'}),$$

où $\overline{\mathcal{O}}$ est la clôture de Zariski de \mathcal{O} .

Les théorèmes suivants définissent les trois orbites nilpotentes canoniques, à savoir l'orbite principale, l'orbite sous-régulière et l'orbite minimale. Nous rappelons que le but de ce chapitre est d'étudier des star-produits sur l'orbite minimale. Ici, on suppose à nouveau que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple complexe.

Théorème 4.4.3 (*Siebenthal, Dynkin, Kostant*)

Il existe une unique orbite nilpotente de dimension maximale, égale à $\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g}$. Cette orbite, notée $\mathcal{O}_{\text{princ}}$, est appelée orbite principale (ou régulière) et est dense dans \mathcal{N} .

Théorème 4.4.4 (*Steinberg*)

Il existe une unique orbite nilpotente de dimension $\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g} - 2$. Cette orbite, notée $\mathcal{O}_{\text{subreg}}$, est appelée orbite sous-régulière et est dense dans $\mathcal{N} \setminus \mathcal{O}_{\text{princ}}$.

Théorème 4.4.5

Il existe une unique orbite non nulle de dimension minimale. Cette orbite, notée \mathcal{O}_{min} , est appelée orbite minimale et est contenue dans la clôture de toute orbite nilpotente.

On a $\overline{\mathcal{O}_{\text{min}}} = \mathcal{O}_{\text{min}} \sqcup \{0\}$.

Exemple 4.4.6

• *Le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel les trois orbites nilpotentes canoniques de \mathfrak{sl}_n sont distinctes est $n = 4$. Dans ce cas, les orbites nilpotentes de \mathfrak{sl}_4 sont données dans le tableau suivant :*

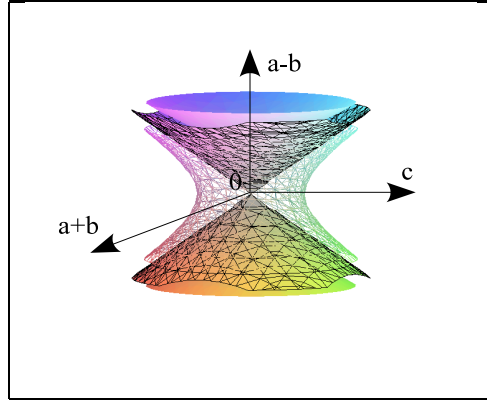
Orbite	$\mathcal{O}_{[4]} = \mathcal{O}_{\text{princ}}$	$\mathcal{O}_{[3,1]} = \mathcal{O}_{\text{subreg}}$	$\mathcal{O}_{[2,2]}$	$\mathcal{O}_{[2,1,1]} = \mathcal{O}_{\text{min}}$	$\mathcal{O}_{[1,1,1,1]} = \{0\}$
Dimension	12	10	8	6	0

• *Considérons $\mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.*

Alors les orbites semi-simples sont les ensembles $\{0\}$ et $\{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid a^2 + bc = k\}$, pour $k \in \mathbb{C}^$, et on a*

$$\mathcal{O}_{\text{princ}} = \mathcal{O}_{\text{subreg}} = \mathcal{O}_{\text{min}} = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid a^2 + bc = 0\} \setminus \{0\}$$

(cône privé de 0). Nous représentons ici sur la figure 4.1 les orbites dans \mathbb{R}^3 , i. e. les orbites coadjointes de la forme réelle $\mathfrak{so}(2, 1)$ de \mathfrak{sl}_3 considérée dans le Paragraphe 4.4.3.

FIGURE 4.1 – Orbites coadjointes de $\mathfrak{so}(2,1)$.

4.4.2 Orbites nilpotentes et idéaux de Joseph

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie, V un espace vectoriel de dimension finie, et $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation irréductible de \mathfrak{g} . La représentation π induit une unique représentation $\hat{\pi}$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} (voir [Mne06]). L'idéal bilatère $I := \text{Ker } \hat{\pi}$ est appelé idéal *primitif* associé à π .

$$\begin{array}{ccc} & U(\mathfrak{g}) & \\ \uparrow i & \searrow \hat{\pi} & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{gl}(V) \end{array}$$

D'après le Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ([Dix74]), il existe un isomorphisme d'algèbres graduées $\text{Gr}(U(\mathfrak{g})) \simeq S(\mathfrak{g})$, où $S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre symétrique de \mathfrak{g} , i. e. l'algèbre des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g}' . Et $J := \text{Gr}(\text{Ker } \hat{\pi})$ est un idéal gradué de $S(\mathfrak{g})$. Soit $\mathcal{V}(I)$ la variété des zéros communs de J dans \mathfrak{g}' .

Les deux théorèmes suivants relient les idéaux primitifs aux orbites nilpotentes et permettent de définir l'idéal de Joseph associé à une orbite minimale.

Théorème 4.4.7 (Borho, Brylinski, Joseph — [BB82], [Jos85])

Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$. Alors $\mathcal{V}(I)$ est la clôture $\overline{\mathcal{O}}$ d'une orbite nilpotente \mathcal{O} de \mathfrak{g} .

Or toute orbite coadjointe nilpotente est déterminée par sa clôture, donc on peut dire que \mathcal{O} est l'orbite nilpotente associée à l'idéal primitif I .

Théorème 4.4.8 (Joseph — [Jos74], [Jos76])

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe et \mathcal{O}_{\min} son orbite minimale. Alors il existe un unique idéal bilatère complètement premier J_{\min} dans $U(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{V}(J_{\min}) = \mathcal{O}_{\min} \sqcup \{0\}$. Cet idéal est primitif et appelé idéal de Joseph.

L'espace radiciel de *la plus grande racine* de \mathfrak{g} est contenu dans l'orbite minimale. Plus précisément, soient β la plus grande racine \mathfrak{g} (voir [Bou81] et [Hum72]), et \mathfrak{g}_β l'espace radiciel associé

$$\mathfrak{g}_\beta := \{X \in \mathfrak{g} ; \forall h \in \mathfrak{h}, [h, X] = \beta(h)X\}.$$

Alors on a $\boxed{\mathfrak{g}_\beta \subset i_\kappa^{-1}(\mathcal{O}_{min})}$ (voir [Jos76]).

Le résultat suivant, dû à Kostant [Kos63], est un outil important pour notre étude sur les orbites minimales.

Théorème 4.4.9 (*Kostant*)

La clôture de l'orbite minimale $(\mathcal{O}_{min} \sqcup \{0\})$ est une variété algébrique

$$\overline{\mathcal{O}_{min}} = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N / \forall r \in R, r(x_1, \dots, x_N) = 0\},$$

où N est la dimension de \mathfrak{g} et $R := \{g_1, \dots, g_K\}$ est un ensemble fini de relations quadratiques.

L'ensemble des fonctions régulières sur $\overline{\mathcal{O}_{min}}$ est l'ensemble

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{O}_{min}}) \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] / \langle R \rangle.$$

Dans la suite, par abus de langage, nous appellerons souvent $\overline{\mathcal{O}_{min}}$ l'orbite minimale. En fait, d'après le Théorème 4.4.4, \mathcal{O}_{min} est déterminée par $\overline{\mathcal{O}_{min}}$. De la même façon, nous parlerons souvent des relations définissant l'orbite minimale, même si ces relations définissent en fait la *clôture* de cette orbite.

Le dernier théorème du paragraphe fait le lien entre les idéaux primitifs et les modules de plus haut poids (voir [Duf77] et [Jos79]).

Théorème 4.4.10 (*Duflo, Joseph*)

Tout idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ est l'annulateur d'un module simple de plus haut poids.

4.4.3 Orbites coadjointes de $\mathfrak{so}(2, 1)$

Considérons l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{so}(2, 1)$, et soit (L_1, L_2, L_3) sa base standard, avec les relations

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

et la forme de Killing κ , de sorte que, en posant $L := a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$, nous avons

$$\kappa(L, L) = g^{ij} a_i a_j = -(a_1)^2 - (a_2)^2 + (a_3)^2.$$

L'application moment interprète L_1, L_2, L_3 comme les coordonnées pour l'espace coadjoint ; en ce sens, nous les écrivons $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$. Posons $g(\mathbf{x}) := g^{ij} x_i x_j$. Alors les orbites semi-simples sont les variétés algébriques (réelles)

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / g(\mathbf{x}) = k\},$$

pour $k \neq 0$, et la clôture de l'orbite nilpotente minimale est la variété algébrique (réelle)

$$\overline{\mathcal{O}_{min}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / g(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Cette variété est un cône simple au sens du Paragraphe 4.2.2.

Les fonctions régulières sur $\overline{\mathcal{O}_{min}}$ sont les restrictions à $\overline{\mathcal{O}_{min}}$ des polynômes en x_1, x_2, x_3 . L'ensemble des fonctions régulières est isomorphe à

$$\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3] / \langle g \rangle.$$

Le star-produit d'ordre un, $x_i * x_j = x_i x_j + \hbar C_1(x_i, x_j)$, est équivariant si $C_1^-(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x_k$ et si $C_1^+(x_i, x_j)$ est proportionnel à g_{ij} . Comme κ est non dégénérée, il existe une famille à deux paramètres de déformations équivariantes essentielles du premier ordre, indexée par \hbar et $C_1^+|_{x=0}$. Toute déformation équivariante du premier ordre peut être étendue, en utilisant par exemple la méthode suggérée ci-dessus, en un star-produit invariant.

4.4.4 Orbite minimale de \mathfrak{sl}_n

L'orbite minimale est définie par les relations

$$\boxed{U_a^b U_c^d - U_a^d U_c^b = 0, \forall a, b, c, d = 1 \dots n} . \quad (4.5)$$

Nous avons aussi la relation $\sum_{j=1}^n U_j^j = 0$ (trace nulle).

Notons que si une matrice $U \in \mathfrak{sl}_n$ appartient à l'orbite minimale, alors $U^2 = 0$.

Remarque 4.4.11

Les relations (4.5) sont résolues par la factorisation

$$U_a^b = p_a q^b, \text{ avec } q \cdot p := q^a p_a = 0, \quad (4.6)$$

qui définit une injection de \mathfrak{g} dans l'espace des polynômes du second ordre sur

$$P^{2n-2} := \mathbb{R}^{2n} / (p \cdot q, \approx),$$

où \approx est la relation d'équivalence définie par

$$\forall \lambda > 0, (\lambda p, \lambda^{-1} q) \approx (p, q).$$

Un star-produit peut être défini sur cet espace en introduisant le crochet de Poisson défini par

$$\{q^b, p_a\} = \delta_a^b, \{q^b, q_d\} = \{p^a, p_c\} = 0,$$

et en le quantifiant à la manière de Weyl (voir les Paragraphes 4.4.6 et 4.5.2).

4.4.5 Orbites minimales de \mathfrak{sp}_{2n} , \mathfrak{so}_n et \mathfrak{g}_2

- L'algèbre de Lie \mathfrak{sp}_{2n} est l'algèbre des matrices de trace nulle qui laissent invariante une 2-forme η antisymétrique non dégénérée, $U_a^b \eta_{bc} =: L_{ac} = L_{ca}$.

On prend l'injection $L_{ac} = \xi_a \xi_c$, avec $\xi_1, \dots, \xi_{2n} = q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$, qui inclut toutes les relations qui définissent l'orbite minimale.

En fait, on considère l'algèbre polynomiale $A := \mathbb{C}[q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n]$, munie du crochet de Poisson standard

$$\{F, G\} := \nabla_p F \cdot \nabla_q G - \nabla_q F \cdot \nabla_p G.$$

Le sous-espace $A(2)$ des éléments de degré deux est une algèbre de Lie pour $\{\cdot, \cdot\}$ qui est isomorphe à l'algèbre de Lie \mathfrak{sp}_{2n} . Les relations qui définissent l'orbite minimale sont alors

$$L_{ab} L_{cd} = L_{ad} L_{cb}, \quad \forall a, b, c, d = 1 \dots n.$$

- L'algèbre de Lie \mathfrak{so}_n est l'algèbre des matrices de trace nulle qui laissent invariante une 2-forme symétrique non dégénérée η . L'analogie avec \mathfrak{sp}_{2n} suggère d'utiliser les variables de Grassmann, en remplaçant l'algèbre affine commutative par une super-algèbre de Lie super-commutative. De façon plus précise, on peut remplacer l'algèbre polynomiale $A = S(E')$ (où $E = Vect(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$), donnée pour \mathfrak{sp}_{2n} par l'algèbre $\Lambda^*(E')$, et le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ par un super-crochet de Poisson convenable. Alors le sous-espace $\Lambda^2(E')$ est une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe orthogonal (pour plus d'informations sur ces espaces et leur lien avec le groupe orthosymplectique, voir le Chapitre 9 de [GRS07]). Une alternative est l'injection $L_{ac} = q_a p_c - q_c p_a$ (avec $q_a = q^b \eta_{ba}$). Les relations qui définissent l'orbite minimale sont

$$\sum_{cycl(abc)} L_{ab} L_{cd} = 0, \quad \forall d = 1 \dots n, \quad \sum_{b,c=1 \dots n} \eta^{bc} L_{ab} L_{cd} = 0, \quad \forall a, d = 1 \dots n, \quad (4.7)$$

où η^{ab} est le terme général de l'inverse de la matrice $(\eta_{ab})_{(a,b) \in \{1, \dots, n\}}$.

La première relation est impliquée par l'injection et la seconde devient superflue si l'on se restreint à $\eta^{ab} p_a p_b = \eta^{ab} q_a q_b = q^a p_a = 0$ et que l'on projette sur un quotient.

- L'algèbre de Lie \mathfrak{g}_2 est isomorphe à l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre non associative \mathbb{O} des octonions complexes de Cayley. C'est une sous-algèbre de \mathfrak{so}_7 (voir [FH91], [Hum72], et [Pos82]). L'orbite minimale peut être paramétrée, comme celle de \mathfrak{so}_7 , avec la condition supplémentaire $p \times q = 0$.

4.4.6 Représentations associées et idéaux de Joseph

Origine

Les idéaux de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple compacte sont fixés par un caractère central. Le cas non compact est plus intéressant. Un exemple est bien connu des physiciens : il s'agit de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{so}(4, 2)$, avec sa base usuelle $\{L_{ab} ; 1 \leq a < b \leq 6\}$ et les relations

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{bc} L_{ad} - \eta_{ac} L_{bd} - \eta_{bd} L_{ac} + \eta_{ad} L_{bc}, \quad (4.8)$$

où η est la métrique pseudo-euclidienne. Le tenseur $g^{bc}(L_{ab}L_{cd} + L_{db}L_{ca})$ dans l'algèbre enveloppante se réduit, dans une certaine représentation irréductible et unitarisable, à des valeurs numériques fixées, de sorte que les relations

$$\eta^{bc}(L_{ab}L_{cd} + L_{db}L_{ca}) = -\hbar^2\eta_{ad} \quad (4.9)$$

soient vraies dans la représentation. Cette représentation particulière apparaît dans l'analyse de la théorie de Schrödinger de l'atome d'hydrogène et dans la théorie des champs conformes. L'algèbre entre aussi dans la description des orbites képlériennes sur un espace des phases de dimension 6.

La Relation (4.9) suggère qu'il existe un star-produit invariant tel que

$$\eta^{bc}(L_{ab} * L_{cd} + L_{db} * L_{ca}) = -\hbar^2\eta_{ad}. \quad (4.10)$$

Une question qui a motivé ce travail est de savoir si une telle déformation existe et si c'est une déformation dans la direction du crochet de Poisson, i. e.

$$f * g = fg + \frac{\hbar}{2}\{f, g\} + \sum_{j=2}^{\infty} C_j(f, g)\hbar^j.$$

Représentations associées à \mathfrak{sl}_n

Notons V_N l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur \mathbb{C}^n engendré par l'ensemble des fonctions $x_1^{r_1}, \dots, x_n^{r_n}$, avec $r_j \in \mathbb{N}$, et $N = \sum_{i=1}^n r_i$ fixé. Pour $a, b = 1 \dots n$, soit \tilde{U}_a^b l'opérateur dans V_N , donné par

$$\tilde{U}_a^b = \hbar \left(x_a \partial_b - \frac{N}{n} \delta_a^b \right),$$

où ∂_b représente la dérivée partielle par rapport à x_b . Alors $[\tilde{U}_a^b, \tilde{U}_c^d] = \hbar(\delta_c^b \tilde{U}_a^d - \delta_a^d \tilde{U}_c^b)$, et l'application

$$\mathfrak{sl}_n \rightarrow L(V_N)$$

$$E_{ab} \mapsto \frac{1}{\hbar} \tilde{U}_a^b \text{ si } a \neq b$$

$$E_{aa} - \frac{1}{n} I_n \mapsto \frac{1}{\hbar} \tilde{U}_a^a$$

est un morphisme d'algèbres de Lie, i. e. une représentation de \mathfrak{sl}_n .

Pour être plus précis, considérons la forme réelle $\mathfrak{su}(n-1, 1)$, avec la sous-algèbre compacte \mathfrak{su}_{n-1} engendrée par $\{\tilde{U}_a^b / a, b = 1 \dots n-1\}$. Quand r_1, \dots, r_{n-1} décrivent l'ensemble des entiers naturels, on obtient, pour un intervalle de valeurs de N , une représentation de plus haut poids unitarisable, ce plus haut poids étant réduit à zéro sur \mathfrak{su}_{n-1} .

Les relations qui définissent l'orbite minimale sont $U_a^b U_c^d - U_a^d U_c^b = 0$. Par ailleurs, un calcul direct donne²

$$\tilde{U}_a^b \tilde{U}_c^d - \tilde{U}_a^d \tilde{U}_c^b = \hbar \delta_c^b \tilde{U}_a^d - \hbar \frac{N}{n} (\delta_a^b \tilde{U}_a^d \tilde{U}_c^d + \delta_c^d \tilde{U}_a^b) - \hbar^2 \frac{N}{n} \left(\frac{N}{n} + 1 \right) \delta_a^b \delta_c^d - (b \leftrightarrow d). \quad (4.11)$$

2. La notation \leftrightarrow a la signification suivante : "Formule(a, b) + ($a \leftrightarrow b$)" signifie "Formule(a, b) + Formule(b, a)". De même, "Formule(a, b, c, d) - ($a \leftrightarrow b$) - ($c \leftrightarrow d$) + ($a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d$)" signifie "Formule(a, b, c, d) - Formule(b, a, c, d) - Formule(a, b, d, c) + Formule(b, a, d, c)".

Une déformation invariante dans la direction du crochet de Poisson doit donc avoir la forme suivante

$$U_a^b * U_c^d = U_a^b U_c^d + \frac{\hbar}{2} \{U_a^b, U_c^d\} + \hbar^2 C^+(U_a^b, U_c^d). \quad (4.12)$$

Pour expliciter C^+ , on utilise le lemme suivant (voir par exemple [Wey46]).

Lemme 4.4.12

• *Les seules applications bilinéaires symétriques de $\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n$ dans \mathfrak{sl}_n qui sont \mathfrak{sl}_n -invariantes sont proportionnelles à l'anticrochet*

$$(A, B) \mapsto AB + BA - \frac{2}{n} \text{tr}(AB).$$

• *Les seules applications bilinéaires symétriques de $\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n$ dans \mathbb{C} qui sont \mathfrak{sl}_n -invariantes sont proportionnelles à la forme de Killing de \mathfrak{sl}_n*

$$(A, B) \mapsto \kappa(A, B) = 2n \text{tr}(AB).$$

Dans ce cadre, la 2-forme symétrique équivariante la plus générale C^+ s'écrit

$$\hbar^2 C^+(A, B) = \frac{k}{2} \left(AB + BA - \frac{2}{n} \text{tr}(AB) \right) + k' \text{tr}(AB). \quad (4.13)$$

L'identification $\mathfrak{g}'' \simeq \mathfrak{g}$ est donnée par $\boxed{U_a^b \mapsto E_{ab} - \frac{1}{n} \delta_a^b I_n}$.

Nous pouvons alors calculer $\hbar^2 C^+(U_a^b, U_c^d)$:

$$\begin{aligned} \hbar^2 C^+(U_a^b, U_c^d) &= \frac{k}{2} \left((E_{ab} - \frac{1}{n} \delta_a^b)(E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_c^d) + (E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_c^d)(E_{ab} - \frac{1}{n} \delta_a^b) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n} \text{tr}((E_{ab} - \frac{1}{n} \delta_a^b)(E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_c^d)) \right) \\ &\quad + k' \text{tr}((E_{ab} - \frac{1}{n} \delta_a^b)(E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_c^d)) \\ &= \frac{k}{2} \left(E_{ab} E_{cd} + E_{cd} E_{ab} - \frac{2}{n} \delta_a^b E_{cd} - \frac{2}{n} \delta_c^d E_{ab} + \frac{2}{n^2} \delta_a^b \delta_c^d \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n} \text{tr}(E_{ab} E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_a^b E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_c^d E_{ab} + \frac{1}{n^2} \delta_a^b \delta_c^d) \right) \\ &\quad + k' \text{tr}(E_{ab} E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_a^b E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_c^d E_{ab} + \frac{1}{n^2} \delta_a^b \delta_c^d) \\ &= \frac{k}{2} \left(\delta_c^b (E_{ad} - \frac{1}{n} \delta_a^d) + \delta_a^d (E_{cb} - \frac{1}{n} \delta_c^b) - \frac{2}{n} \delta_a^b (E_{cd} - \frac{1}{n} \delta_c^d) - \frac{2}{n} \delta_c^d (E_{ab} - \frac{1}{n} \delta_a^b) \right) \\ &\quad + k' \left(\delta_b^c \delta_a^d - \frac{1}{n} \delta_c^d \delta_a^b \right). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\hbar^2 C^+(U_a^b, U_c^d) = \frac{k}{2} \left(\delta_c^b U_a^d + \delta_a^d U_c^b - \frac{2}{n} (\delta_a^b U_c^d + \delta_c^d U_a^b) \right) + k' \left(\delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{n} \delta_a^b \delta_c^d \right). \quad (4.14)$$

Nous pouvons maintenant expliciter les relations $U_a^b * U_c^d - U_a^d * U_c^b$:

$$\begin{aligned}
& U_a^b * U_c^d - U_a^d * U_c^b \\
= & U_a^b U_c^d - U_a^d U_c^b + \frac{\hbar}{2} (\{U_a^b, U_c^d\} - \{U_a^d, U_c^b\}) + \hbar^2 (C^+(U_a^b, U_c^d) - C^+(U_a^d, U_c^b)) \\
= & \frac{\hbar}{2} (\delta_b^c U_a^d - \delta_a^d U_c^b - \delta_d^c U_a^b + \delta_a^b U_c^d) \\
& + \frac{k}{2} (\delta_c^b U_a^d + \delta_a^d U_c^b - \frac{2}{n} (\delta_a^b U_c^d + \delta_c^d U_a^b)) - \frac{k}{2} (\delta_c^d U_a^b + \delta_a^b U_c^d - \frac{2}{n} (\delta_a^d U_c^b + \delta_c^b U_a^d)) \\
& + k' (\delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{n} \delta_a^b \delta_c^d) - k' (\delta_a^b \delta_c^d - \frac{1}{n} \delta_a^d \delta_c^b) \\
= & \frac{\hbar}{2} (\delta_c^b U_a^d - \delta_a^d U_c^b - \delta_c^d U_a^b + \delta_a^b U_c^d) + k' (1 + \frac{1}{n}) (\delta_a^d \delta_c^b - \delta_a^b \delta_c^d) \\
& + \frac{k}{2} (1 + \frac{2}{n}) (\delta_a^d U_c^b + \delta_c^b U_a^d - \delta_a^b U_c^d - \delta_c^d U_a^b). \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Les Relations (4.15) et (4.11) ont la même forme si les paramètres k et k' sont liés au degré N des fonctions homogènes de l'espace vectoriel V_N par

$$k \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \hbar \left(1 + 2 \frac{N}{n}\right), \quad k' \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \hbar^2 \frac{N}{n} \left(\frac{N}{n} + 1\right). \tag{4.16}$$

Il s'avère qu'une telle déformation existe si et seulement si les paramètres k et k' vérifient (4.16).

Représentations associées à \mathfrak{so}_n et \mathfrak{sp}_{2n}

Etude de \mathfrak{so}_n

Soient $V_N = Vect(x_1^{r_1}, \dots, x_n^{r_n})$ l'espace défini dans le Paragraphe 4.4.6 (Représentations associées à \mathfrak{sl}_n), et η une 2-forme symétrique non dégénérée sur \mathbb{C}^n .

Soient $\partial^a := \eta_{ab} \partial_b$ et $\tilde{L}_{ab} := \hbar(x_a \partial^b - x_b \partial^a)$, ce qui donne une représentation formelle de \mathfrak{so}_n et les formules

$$\tilde{L}_{ab} \tilde{L}_{cd} = \hbar^2 (x_a x_c \partial^b \partial^d + \eta_{bc} x_a \partial^d - (a \leftrightarrow b) - (c \leftrightarrow d) + (a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d)).$$

Pour simplifier cette représentation, nous réduisons les variables au cône $\eta(x, x) = 0$ et l'espace V_N au sous-espace des fonctions harmoniques. (On vérifie que le choix $N = 2 - \frac{n}{2}$ du degré d'homogénéité donne à l'opérateur de Laplace une action bien définie sur les fonctions définies sur le cône.) Le premier terme du membre de droite satisfait maintenant les contraintes. Ce n'est pas encore un modèle de star-produit puisque les opérateurs du premier ordre du membre de droite ne se combinent pas aux \tilde{L}_{ab} . Mais les dernières relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{ab} \tilde{L}_{cd} = & \hbar^2 (x_a x_c \partial^b \partial^d + \frac{1}{2} \eta_{bc} (x_a \partial^d + x_d \partial^a) - (a \leftrightarrow b) - (c \leftrightarrow d) + (a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d)) \\
& + \frac{\hbar}{2} \eta_{bc} (\tilde{L}_{ad} - (a \leftrightarrow b) - (c \leftrightarrow d) + (a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d)).
\end{aligned}$$

La première ligne satisfait les contraintes, et si on la prend comme modèle pour la partie classique, alors on est conduit à rechercher un star-produit de la forme

$$L_{ab} * L_{cd} = L_{ab} L_{cd} + \frac{\hbar}{2} \eta_{bc} (L_{ad} - (a \leftrightarrow b) - (c \leftrightarrow d) + (a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d)) + o(\hbar^2).$$

Il s'avère qu'un tel star-produit invariant existe si et seulement si le dernier terme est précisément

$$\hbar^2 \left(2 - \frac{n}{2}\right) (1 - n) \kappa(L_{ab}, L_{cd}),$$

où κ est la forme de Killing.

Voir [BZ91] pour une étude complète des représentations singulières de $\mathfrak{so}(p, q)$.

Exemple 4.4.13

Dans le cas $n = 6$, $N = -1$, en se restreignant à la forme réelle $\mathfrak{so}(4, 2)$ et en prenant $r_1, \dots, r_4 \in \mathbb{N}$, $\frac{r_5}{r_6} \in \mathbb{N}$, on retrouve la représentation unitarisable, réalisée sur l'espace des solutions d'un champ scalaire de masse nulle en dimension 4, sous la forme découverte par Dirac. La même représentation apparaît dans la théorie de l'atome d'hydrogène, où elle est réalisée par les opérateurs auto-adjoints de $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{d^3r}{r}\right)$.

Etude de \mathfrak{sp}_{2n}

Soit $V_{2n} = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{2n}]$ l'espace des polynômes sur un espace vectoriel complexe de dimension $2n$ muni d'une 2-forme antisymétrique non dégénérée η et des coordonnées ξ_1, \dots, ξ_{2n} .

Un crochet de Poisson est défini par $\{\xi_a, \xi_b\} = \eta_{ab}$. Soient $\partial^a := \eta_{ab}\partial_b$ et $\tilde{L}_{ab} := \hbar(\xi_a\partial^b + \xi_b\partial^a)$. Alors une analyse similaire suggère un star-produit tel que

$$L_{ab} * L_{cd} = L_{ab}L_{cd} + \frac{\hbar}{2}\eta_{bc}(L_{ad} + (a \leftrightarrow b) + (c \leftrightarrow d) + (a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d)) + \frac{\hbar^2}{2}\eta_{ab}\eta_{cd}.$$

C'est bien sûr le star-produit de Moyal, restreint à \mathfrak{sp}_{2n} .

4.5 Star-produits \mathfrak{g} -invariants sur l'orbite minimale d'une algèbre de Lie simple

4.5.1 Calcul de l'homologie

Ici nous reprenons la caractérisation de Kostant (Théorème 4.4.9) de l'orbite minimale. Nous utilisons une généralisation des résultats du Paragraphe 4.2.2 au cas de relations multiples, jusqu'au niveau des 3-chaînes et 3-cochaînes. Il est clair que HH_2 est l'espace engendré par les chaînes suivantes

$$(Z_{2,1})_\alpha = g_\alpha^{ij}x_i \otimes x_j, \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}, \text{ et } (Z_{2,2})_{ij} = x_i \wedge x_j, \text{ pour } i, j = 1 \dots N.$$

Toute 3-chaîne fermée est homologue à une chaîne linéaire,

$$a = x_i \otimes x_j \otimes x_k A^{ijk},$$

avec $A^{ijk} \in \mathbb{C}$, et cette chaîne est fermée si et seulement si

$$x_i x_j A^{ijk} = 0 = x_j x_k A^{ijk}.$$

D'où

$$A^{ijk} + A^{jik} = g_\alpha^{ij}c_\alpha^k, \quad A^{ijk} + A^{ikj} = c_\alpha'^i g_\alpha^{jk},$$

avec les coefficients complexes c_α , et c'_α . Ce qui est résolu si et seulement si

$$\sum_{\text{cycl}} g_\alpha^{ij} c_\alpha^k = \sum_{\text{cycl}} c'_\alpha^i g_\alpha^{jk},$$

où les sommes sont prises sur les permutations cycliques, ce qui entraîne $c'_\alpha^i = c_\alpha^i + \rho_\alpha^i$, avec les coefficients ρ_α^i soumis à $\sum_{\text{cycl}} \rho_\alpha^i g_\alpha^{jk} = 0$, comme suit,

$$6 A^{ijk} = \text{Alt} A^{ijk} + 3(g_\alpha^{ij} c_\alpha^k - g_\alpha^{ik} c_\alpha^j + g_\alpha^{jk} c_\alpha^i) + 2(\rho_\alpha^i g_\alpha^{jk} - \rho_\alpha^j g_\alpha^{ik}), \quad \sum_{\text{cycl}(ijk)} \rho_\alpha^i g_\alpha^{jk} = 0.$$

Les trois termes appartiennent respectivement à $Z_{3,3} = HH_{3,3}$, $Z_{3,2} = HH_{3,2}$ (ils sont de la forme indiquée dans la Proposition 4.2.5) et $Z_{3,1} = HH_{3,1}$. Ce troisième espace, vide dans le cas où il n'y a qu'une relation, n'a pas encore été déterminé. Nous avons seulement la conjecture suivante :

Conjecture 4.5.1

L'espace $Z_{3,1} = HH_{3,1}$ est engendré par les chaînes de la forme

$$e_3(1) g_\alpha^{ij} g_\beta^{kl} (x_i \otimes \{x_j, x_k\} \otimes x_l),$$

où $\{g_\alpha\}$ est l'ensemble des relations binaires et $e_3(1)$ est l'idempotent BGS.

Exemple 4.5.2

Pour \mathfrak{sl}_n , les deux relations $U_a^b U_c^d - U_c^b U_a^d = 0$, $U_d^f U_g^h - U_d^h U_g^f = 0$ engendrent la chaîne fermée

$$U_a^b \otimes U_c^f \otimes U_g^h - U_c^b \otimes U_a^f \otimes U_g^h - U_a^b \otimes U_c^h \otimes U_g^f + U_c^b \otimes U_a^h \otimes U_g^f.$$

La difficulté sera surmontée à l'aide du principe de correspondance, une adaptation de la fonction de symétrisation de Weyl. C'est le sujet du paragraphe suivant.

4.5.2 Principe de correspondance pour les star-produits \mathfrak{g} -invariants

Supposons qu'un star-produit invariant vérifie la propriété suivante

$$S(x_{i_1} * \cdots * x_{i_p}) = x_{i_1} \cdots x_{i_p} + \phi_{i_1 \dots i_p}, \quad (4.17)$$

où S représente la symétrisation, i. e.

$$S(x_{i_1} * \cdots * x_{i_p}) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} x_{\sigma^{-1}(i_1)} * \cdots * x_{\sigma^{-1}(i_p)},$$

et où la fonction $\phi_{i_1 \dots i_p}$ appartient à l'idéal $\langle \hbar \rangle$ de $\mathbb{C}[[\hbar]]$.

Remarque 4.5.3

Nous faisons l'hypothèse que, à tout ordre en \hbar , $\phi_{i_1 \dots i_p}$ est un polynôme de degré strictement inférieur à p . De cette façon nous garantissons une propriété importante de la déformation, à savoir que la base de Poincaré-Birkhoff-Witt est préservée. Cette limitation est faible, puisque les 2-cochaînes équivariantes d'ordre plus élevé sont rares en raison des contraintes.

Sous cette condition, l'ensemble des monômes de $\phi_{i_1 \dots i_p}$ est fini, et $\phi_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{C}[[\hbar]][x_{i_1}, \dots, x_{i_p}]$.

Exemple 4.5.4

Si $\phi = 0$, alors nous obtenons la règle de quantification donnée par Abellanas et Martinez-Alonso dans [AMA76] qu'ils nomment quantification de Weyl.

L'invariance du star-produit nécessite que l'application ϕ :

$$A \rightarrow A, \quad x_{i_1} \dots x_{i_p} \mapsto \phi_{i_1 \dots i_p}$$

soit équivariante pour l'action adjointe. La seule autre hypothèse est le fait évident que la correspondance doit être cohérente avec les relations qui définissent la variété. En appliquant ces contraintes aux deux membres de l'Equation (4.17), nous obtenons des conditions sur l'application ϕ . Nous calculerons ces conditions explicitement pour les monômes de degrés 2 et 3. Nous montrerons que ces conditions sont précisément les mêmes que celles impliquées par l'associativité, confirmant le fait que l'associativité n'est pas un fait indépendant. Tant que la correspondance est cohérente avec les contraintes (la seule possibilité maintenant), une connaissance approfondie des espaces d'homologie restreinte n'est pas indispensable (notons cependant que la cohomologie a été cruciale pour la démonstration d'une extension aux ordres plus élevés : voir le Théorème 4.2.4).

Considérons l'opérateur de symétrisation, toujours noté S , et posons

$$S(x_i * x_j) = x_i x_j + \psi_{ij}, \quad S(x_i * x_j * x_k) = x_i x_j x_k + \phi_{ijk}. \quad (4.18)$$

Rappelons aussi que

$$x_i * x_j - x_j * x_i = \hbar \{x_i, x_j\} = \hbar \epsilon_{ij}^m x_m, \quad (4.19)$$

où les ϵ_{ij}^m sont les constantes de structure de \mathfrak{g} et où $\epsilon_{ij}^m := \frac{1}{\hbar} \epsilon_{ij}^m$.

Les polynômes ϕ_{ijk} et ψ_{ij} sont supposés définir des applications équivariantes comme expliqué ci-dessus.

Proposition 4.5.5

Supposons que les polynômes équivariants ψ et ϕ ont été choisis de sorte que les Relations (4.18) soient cohérentes avec les contraintes. Alors il existe un star-produit associatif invariant tel que (4.18) soit vérifiée.

Démonstration :

- Calculons d'abord $(x_i x_j) * x_k$. Le star-produit symétrisé est

$$\begin{aligned}
& S(x_i * x_j * x_k) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} x_{\sigma^{-1}(i)} * x_{\sigma^{-1}(j)} * x_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= \frac{1}{6} (x_i * x_j * x_k + x_i * x_k * x_j + x_k * x_i * x_j) + (i \leftrightarrow j) \\
&= \frac{1}{6} (x_i * x_j * x_k + (x_i * x_j * x_k + \hbar x_i * \{x_k, x_j\}) + (x_i * x_k * x_j + \hbar \{x_k, x_i\} * x_j)) + (i \leftrightarrow j) \\
&= \frac{1}{6} (x_i * x_j * x_k + (x_i * x_j * x_k + \hbar x_i * \{x_k, x_j\}) \\
&\quad + (x_i * x_j * x_k + \hbar x_i * \{x_k, x_j\} + \hbar \{x_k, x_i\} * x_j)) + (i \leftrightarrow j) \\
&= \frac{1}{2} x_i * x_j * x_k + \frac{\hbar}{3} x_i * \{x_k, x_j\} + \frac{\hbar}{6} \{x_k, x_i\} * x_j + (i \leftrightarrow j).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

D'après (4.18) et (4.19), on a successivement les lignes suivantes

$$\begin{aligned}
(x_i x_j) * x_k &= (S(x_i * x_j) - \psi_{ij}) * x_k \\
&= \frac{1}{2} x_i * x_j * x_k + \frac{1}{2} x_j * x_i * x_k - \psi_{ij} * x_k.
\end{aligned}$$

Donc, d'après 4.20, on en déduit

$$\begin{aligned}
(x_i x_j) * x_k &= S(x_i * x_j * x_k) - \psi_{ij} * x_k \\
&\quad + \left(-\frac{\hbar}{3} x_i * \{x_k, x_j\} - \frac{\hbar}{6} \{x_k, x_i\} * x_j \right) + (i \leftrightarrow j) \\
&= x_i x_j x_k + \phi_{ijk} - \psi_{ij} * x_k \\
&\quad - \frac{\hbar}{3} (x_i * \{x_k, x_j\} + x_j * \{x_k, x_i\}) - \frac{\hbar}{6} (\{x_k, x_i\} * x_j + \{x_k, x_j\} * x_i).
\end{aligned}$$

Posons $\Sigma := x_i * \{x_k, x_j\} + \{x_k, x_j\} * x_i$ et $\Delta := x_i * \{x_k, x_j\} - \{x_k, x_j\} * x_i$. Alors :

$$\begin{aligned}
(x_i x_j) * x_k &= x_i x_j x_k + \phi_{ijk} - \psi_{ij} * x_k \\
&\quad + \left(-\frac{\hbar}{4} \Sigma - \frac{\hbar}{12} \Delta \right) + (i \leftrightarrow j),
\end{aligned}$$

i. e., en utilisant (4.18), (4.19) (définition de Σ et Δ),

$$\begin{aligned}
(x_i x_j) * x_k &= x_i x_j x_k + \phi_{ijk} - \psi_{ij} * x_k \\
&\quad + \left(-\frac{\hbar}{2} \left(\psi(\{x_k, x_j\}, x_i) + \{x_k, x_j\} x_i \right) - \frac{\hbar^2}{12} \{x_i, \{x_k, x_j\}\} \right) + (i \leftrightarrow j).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

- De plus, d'après (4.18) et (4.19), on a

$$\begin{aligned}
-\psi(\psi_{ij}, x_k) - \psi_{ij} x_k &= -S(\psi_{ij} * x_k) = \frac{1}{2} (-\psi_{ij} * x_k - x_k * \psi_{ij}) \\
&= -\psi_{ij} * x_k + \frac{\hbar}{2} \{\psi_{ij}, x_k\},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

et, selon (4.19),

$$\begin{aligned}
& \{\psi_{ij}, x_k\} \\
&= -\{x_k, \psi_{ij}\} = -\{x_k, \frac{1}{2}x_i * x_j + \frac{1}{2}x_j * x_i - x_i x_j\} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\{x_k, x_i\} * x_j + x_i * \{x_k, x_j\} + \{x_k, x_j\} * x_i + x_j * \{x_k, x_i\} \right) + \{x_k, x_i\}x_j + \{x_k, x_j\}x_i \\
&= -\psi(\{x_k, x_i\}, x_j) - \psi(\{x_k, x_j\}, x_i),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

où l'avant-dernière ligne résulte de l'équivariance de ψ (condition (3) de la Définition 4.3.1) et de la Propriété de Leibniz de $\{\cdot, \cdot\}$. La dernière ligne est une conséquence de (4.18).

En regroupant (4.22) et (4.23), on trouve

$$-\psi_{ij} * x_k - \frac{\hbar}{2} \left(\psi(\{x_k, x_j\}, x_i) + \psi(\{x_k, x_i\}, x_j) \right) = -\psi(\psi_{ij}, x_k) - \psi_{ij} x_k.$$

Finalement, (4.21) s'écrit

$$\begin{aligned}
(x_i x_j) * x_k &= x_i x_j x_k + \phi_{ijk} - \psi_{ij} x_k - \psi(\psi_{ij}, x_k) \\
&\quad - \frac{\hbar}{2} (\{x_k, x_i\} x_j + (i \leftrightarrow j)) - \frac{\hbar^2}{12} (\{x_i, \{x_k, x_j\}\} + (i \leftrightarrow j)).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

• De même, on a

$$\begin{aligned}
x_i * (x_j x_k) &= x_i x_j x_k + \phi_{ijk} - x_i \psi_{jk} - \psi(x_i, \psi_{jk}) \\
&\quad - \frac{\hbar}{2} (\{x_k, x_i\} x_j + (j \leftrightarrow k)) - \frac{\hbar^2}{12} (\{\{x_j, x_i\}, x_k\} + (j \leftrightarrow k)).
\end{aligned}$$

Ces équations donnent des expressions explicites pour les valeurs des 2-formes C_1 et C_2 définies par

$$\begin{aligned}
(x_i x_j) * x_k &= x_i x_j x_k + \hbar C_1(x_i x_j, x_k) + \hbar^2 C_2(x_i x_j, x_k), \\
x_i * (x_j x_k) &= x_i x_j x_k + \hbar C_1(x_i, x_j x_k) + \hbar^2 C_2(x_i, x_j x_k).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Ces valeurs résolvent la condition pour l'associativité du star-produit des chaînes linéaires. D'après le Théorème 4.2.4 celle-ci peut être satisfaite en général. Cela démontre la proposition. ■

L'associativité est maintenant trivialement satisfaite. Par contre, l'existence d'une fonction ϕ_{ijk} qui résout (4.24) est loin d'être évidente. L'application de g_α^{ij} et de g_α^{jk} aux équations précédentes donne

$$g_\alpha^{ij} \phi_{ijk} = (g_\alpha^{ij} \psi_{ij}) * x_k + \hbar g_\alpha^{ij} \epsilon_{ki}^m \psi_{mj} + \frac{\hbar^2}{6} g_\alpha^{ij} \epsilon_{ki}^m \epsilon_{mj}^p x_p, \tag{4.26}$$

$$g_\alpha^{jk} \phi_{ijk} = x_i * (g_\alpha^{jk} \psi_{jk}) + \hbar g_\alpha^{kj} \epsilon_{ki}^m \psi_{mj} + \frac{\hbar^2}{6} g_\alpha^{jk} \epsilon_{ki}^m \epsilon_{jm}^p x_p. \tag{4.27}$$

Puisque ϕ est symétrique, les membres de droite doivent correspondre, i. e.

$$(g_\alpha^{ij} \psi_{ij}) * x_k - x_k * (g_\alpha^{ij} \psi_{ij}) = 2\hbar g_\alpha^{ij} \epsilon_{ik}^m \psi_{mj}.$$

Les seuls tenseurs équivariants disponibles pour la 2-chaîne sont la forme de Killing et, dans le cas de \mathfrak{sl}_n , un terme linéaire en les générateurs, comme ci-dessus. Les deux satisfont cette dernière condition, ainsi des deux équations (4.26) et (4.27) il suffit d'examiner la première. Le problème de cohérence de (4.17) est réduit à l'existence de ϕ_{ijk} qui vérifie l'Equation (4.26).

Une détermination complète de la cohomologie restreinte n'est pas nécessaire ; il suffit de connaître les relations qui définissent l'orbite.

4.5.3 Calculs pour \mathfrak{sl}_n — Idéal de Joseph et modules de plus haut poids

Résolution des contraintes

Nous utilisons les notations et les relations de commutation de \mathfrak{sl}_n données dans le Paragraphe 4.4.4. Nous remplaçons les variables générales x_i par les variables U_a^b de \mathfrak{sl}_n , et les Equations (4.18) et (4.24) prennent la forme

$$\frac{1}{2}(U_a^b * U_c^d + U_c^d * U_a^b) = U_a^b U_c^d + \psi_{ac}^{bd}, \quad (4.28)$$

et

$$\begin{aligned} (U_a^b U_c^d) * U_e^f &= U_a^b U_c^d U_e^f + \phi_{ace}^{bdf} - \psi_{ac}^{bd} U_e^f - \psi(\psi_{ac}^{bd}, U_e^f) \\ &- \frac{\hbar}{2} \left(\{U_e^f, U_a^b\} U_c^d + \{U_e^f, U_c^d\} U_a^b \right) - \frac{\hbar^2}{12} \left(\{U_a^b, \{U_e^f, U_c^d\}\} + \{U_c^d, \{U_e^f, U_a^b\}\} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Introduisons une notation plus simple pour exprimer les éléments u de \mathfrak{g}' . On peut écrire

$$u = \sum_{a,b=1\dots n} A_b^a U_a^b.$$

Posons $U := (U_a^b)_{a,b} \in \mathbf{M}_n(\mathfrak{g}')$ et $A := (A_b^a)_{a,b} \in \mathbf{M}_n\mathbb{C}$. Alors $\boxed{u = (AU)}$ est la trace de la matrice produit AU . Les coefficients A_b^a sont des coordonnées pour \mathfrak{g} , A parcourant toutes les matrices de la représentation adjointe de \mathfrak{g} . L'Equation (4.28) est linéaire en U_a^b et U_c^d , ainsi nous pouvons remplacer U_a^b et U_c^d par la combinaison linéaire $u := (AU)$, et l'Equation (4.28) devient

$$u * u = u^2 + \psi(u, u).$$

L'équivariance donne une restriction sur ψ :

$$\psi(u, u) = k(AAU) + k'(AA), \quad (k, k') \in \mathbb{C}^2, \quad (4.30)$$

où (AAU) et (AA) représentent à nouveau les traces des produits de matrices. De la même façon,

$$u * u * u = u^3 + \phi(u, u, u),$$

avec

$$\phi(u, u, u) = \phi_1(AAU)u + \phi_2(AAAU) + \phi_3(AA)u + \phi_4(AAA). \quad (4.31)$$

Notons qu'il existe d'autres invariants, mais leur inclusion n'est pas permise ici par les relations.

Etant donné ψ de la forme (4.30), regardons l'Equation (4.29) comme une équation pour déterminer ϕ . Rappelons que l'orbite minimale est définie par les relations

$$U_a^b U_c^d = U_a^d U_c^b, \quad \forall a, b, c, d = 1 \dots n.$$

On a alors la proposition :

Proposition 4.5.6

L'Equation (4.29) est cohérente avec les relations $U_a^b U_c^d = U_a^d U_c^b$ si et seulement si les paramètres k et k' sont reliés comme suit

$$4k' \left(1 + \frac{1}{n}\right) = k^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 - \hbar^2. \quad (4.32)$$

Démonstration : voir l'Annexe 1.

Générateurs de l'idéal de Joseph

Proposition 4.5.7

L'idéal de Joseph pour \mathfrak{sl}_n est engendré par les relations

$$\begin{aligned} U_a^b * U_c^d - U_a^d * U_c^b &= \frac{\hbar}{2}(\delta_c^b U_a^d - \delta_a^d U_c^b - \delta_c^d U_a^b + \delta_a^b U_c^d) + k' \left(1 + \frac{1}{n}\right) (\delta_a^d \delta_c^b - \delta_a^b \delta_c^d) \\ &\quad + \frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right) (\delta_a^d U_c^b + \delta_c^b U_a^d - \delta_a^b U_c^d - \delta_c^d U_a^b). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Démonstration :

Nous trouvons les relations de l'algèbre déformée en éliminant le produit original de

$$\begin{aligned} U_a^b * U_c^d &= U_a^b U_c^d + \frac{\hbar}{2}(\delta_c^b U_a^d - \delta_a^d U_c^b) + k' \left(\delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{n} \delta_a^b \delta_c^d\right) \\ &\quad + \frac{k}{2} (\delta_a^d U_c^b + \delta_c^b U_a^d - \frac{2}{n} (\delta_a^b U_c^d + \delta_c^d U_a^b)). \end{aligned} \quad (4.34)$$

C'est le même calcul que celui déjà effectué en (4.15). ■

Module de plus haut poids

Pour une algèbre de Lie \mathfrak{g} , nous choisissons une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} formée de matrices diagonales. Alors un module *de plus haut poids* de l'algèbre déformée est un module engendré par un vecteur v tel que

$$U_a^b * v = 0, \quad a < b = 2 \dots n, \quad U_a^a * v = \lambda_a v, \quad a = 1 \dots n, \quad (4.35)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^n$ et $\sum_{a=1}^n \lambda_a = 0$. Le vecteur $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelé poids du vecteur v .

Proposition 4.5.8

Un module de plus haut poids de l'algèbre déformée existe si et seulement si la Relation (4.32) est vérifiée. Dans ce cas il existe $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que le plus haut poids λ soit donné par

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = -\frac{\hbar}{2} - \gamma, \quad \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = \frac{\hbar}{2} - \gamma, \quad (4.36)$$

où λ_m est déterminé par $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ et $\gamma = \frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

Démonstration :

Les seules relations qui sont modifiées par la déformation sont celles où $\{a, c\}$ intersecte $\{b, d\}$, ainsi nous pouvons nous limiter au cas $b = a$. Si a est égal à c ou à d les relations sont simplement les relations de commutation usuelles. Ainsi on prend $c \neq a$ et $d \neq a$. Alors

$$U_a^a * U_c^d - U_a^d * U_c^a = \frac{\hbar}{2}(-\delta_c^d U_a^a + U_c^d) - \frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right) (U_c^d + \delta_c^d U_a^a) - k' \left(1 + \frac{1}{n}\right) \delta_c^d.$$

En particulier, pour $c = d$,

$$U_a^a * U_c^c - U_a^c * U_c^a = \frac{\hbar}{2}(U_c^c - U_a^a) - \frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right) (U_c^c + U_a^a) - k' \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

En appliquant ce résultat à un vecteur de plus haut poids v on obtient, pour $a > c$,

$$\lambda_a \lambda_c = \frac{\hbar}{2}(\lambda_c - \lambda_a) - \gamma(\lambda_a + \lambda_c) - \gamma', \text{ avec } \gamma := \frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \text{ et } \gamma' := k' \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc, pour $a > c$,

$$\left(\lambda_c + \frac{\hbar}{2} + \gamma\right) \lambda_a = \left(\frac{\hbar}{2} - \gamma\right) \lambda_c - \gamma'.$$

Supposons $n > 2$.

- Si $\gamma' \neq \gamma^2 - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$, alors $\lambda_c \neq -\frac{\hbar}{2} - \gamma$, d'où

$$\lambda_a = \frac{\left(\frac{\hbar}{2} - \gamma\right) \lambda_c - \gamma'}{\lambda_c + \frac{\hbar}{2} + \gamma}, \quad a > c.$$

Alors en prenant $c = 1$, nous obtenons $\lambda_2 = \dots = \lambda_n$, et en prenant $a = n$, nous trouvons $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1}$. Puisque $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, nous avons $\lambda_i = 0$ pour tout i .

- Nous en concluons que

$$\gamma' = \gamma^2 - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2, \quad (4.37)$$

équation qui est la même que (4.32). Alors il existe un entier m , $1 \leq m \leq n$ tel que λ_m diffère de ses voisins, et

$$\forall a > m, \quad \lambda_a = \frac{\left(\frac{\hbar}{2} - \gamma\right) \lambda_m - \left(\gamma - \frac{\hbar}{2}\right) \left(\gamma + \frac{\hbar}{2}\right)}{\lambda_m + \frac{\hbar}{2} + \gamma} = \frac{\hbar}{2} - \gamma,$$

$$\forall a < m, \quad \lambda_a = \frac{\left(\frac{\hbar}{2} + \gamma\right) \lambda_m + \left(\gamma - \frac{\hbar}{2}\right) \left(\gamma + \frac{\hbar}{2}\right)}{\lambda_m - \frac{\hbar}{2} - \gamma} = -\frac{\hbar}{2} - \gamma.$$

La preuve de la proposition s'ensuit immédiatement. ■

Déformations abéliennes

Quand $\hbar = 0$, l'algèbre déformée est commutative, ainsi une représentation est simplement un caractère, ou encore un idéal maximal. Le groupe agit sur les idéaux maximaux, et parmi eux, il y en a de triangulaires supérieurs. Cela est possible seulement si soit $n = 2$, soit (4.32) est vérifiée, i. e.

$$4k' \left(1 + \frac{1}{n}\right) = k^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2.$$

Dans ce cas, la variété déformée est l'espace des matrices de trace nulle dont toutes les valeurs propres sauf une valent $-\frac{k}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

4.5.4 Calculs pour \mathfrak{so}_n — Idéal de Joseph et modules de plus haut poids

Résolution des contraintes

La méthode est la même que dans le Paragraphe 4.5.3. Nous utilisons les notations et les relations de commutation de \mathfrak{so}_n données dans le Paragraphe 4.4.6 (Représentations associées à \mathfrak{so}_n et

\mathfrak{sp}_{2n}). Ainsi, les variables x_i sont maintenant les variables L_{ab} de \mathfrak{so}_n , et l'Equation (4.18) s'écrit

$$\frac{1}{2}(L_{ab} * L_{cd} + L_{cd} * L_{ab}) = L_{ab}L_{cd} + \psi_{ab,cd}.$$

Alors l'Equation (4.24) devient maintenant

$$\begin{aligned} (L_{ab}L_{cd}) * L_{ef} &= L_{ab}L_{cd}L_{ef} + \phi_{ab,cd,ef} - \psi_{ab,cd}L_{ef} - \frac{\hbar}{2}(\{L_{ef}, L_{ab}\}L_{cd} + \{L_{ef}, L_{cd}\}L_{ab}) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{12}(\{L_{ab}, \{L_{ef}, L_{cd}\}\} + \{L_{cd}, \{L_{ef}, L_{ab}\}\}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Comme pour \mathfrak{sl}_n , une notation plus simple est d'écrire $u \in \mathfrak{g}'$ comme $u = (AL) = A^{ab}L_{ab}$. Les coefficients $A^{ab} = -A^{ba}$ sont des coordonnées pour \mathfrak{g} . Alors les deux équations précédentes deviennent

$$u * u = u^2 + \psi(u, u), \quad (4.39)$$

et

$$u^2 * v = u^2v + \phi(A, A, B) - \psi(A, A)v - \hbar[v, u] - \frac{\hbar^2}{6}\{u, \{v, u\}\}. \quad (4.40)$$

L'équivariance donne des restrictions sur ψ et ϕ , à savoir

$$\psi_{A,A} = k(AA),$$

et

$$\phi(AAA) = \phi_1(AAAL) + \phi_2(AA)u,$$

où (AAU) et (AA) représentent les traces des produits de matrices. Nous prenons la forme η définie par $\eta_{ab} = 0$ si $a \neq b$ et $\eta_{aa} = 1$ pour $a = 1 \dots n$, si bien que les deux-formes deviennent des matrices de forme simple.

Nous fixons le paramètre k et regardons l'Equation (4.38) comme une équation pour déterminer les coefficients ϕ_1, ϕ_2 . Alors nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.5.9

L'Equation (4.38) est cohérente avec les relations qui définissent l'orbite minimale si et seulement si le paramètre k prend la valeur $\hbar \frac{n-4}{n-1}$. Dans ce cas, les paramètres ϕ_1 et ϕ_2 sont fixés par (4.38).

Démonstration : Voir l'Annexe 1.

Générateurs de l'idéal de Joseph

Proposition 4.5.10

L'idéal de Joseph de \mathfrak{so}_n est engendré par (les relations de commutation et) les relations

$$S(\eta^{bc}L_{ab} * L_{cd}) + \frac{\hbar^2}{2}(n-4)\eta_{ad} = 0, \quad \sum_{cycl(abc)} (L_{ab} * L_{cd} - \hbar\eta_{ad}L_{bc}) = 0. \quad (4.41)$$

Ces relations ont été obtenues par Binegar et Zierau [BZ91], qui ont aussi déterminé le module de plus haut poids et les représentations unitaires associées de $\mathbf{SO}(p, q)$. Nous retrouvons ces résultats à l'aide du star-produit. L'Equation (4.41) est une conséquence directe de (4.39), qui s'écrit

$$L_{ab} * L_{cd} = L_{ab}L_{cd} + \frac{\hbar}{2}\{L_{ab}, L_{cd}\} + \frac{\ell}{2}(\eta_{ac}\delta_{bd} - \eta_{bc}\delta_{ad}). \quad (4.42)$$

Module de plus haut poids de \mathfrak{so}_n

Notons, comme précédemment, $\{E_{ab} / a, b = 1 \dots n\}$ l'ensemble des matrices unitaires de $\mathbf{M}_n\mathbb{C}$ et prenons

$$\eta := \sum_{a=1}^n \delta_{a,a'}, \text{ avec } a' := n + 1 - a.$$

Une base pour \mathfrak{so}_n dans la représentation naturelle est l'ensemble $\{L_{ab} / a < b \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ des matrices

$$L_{ab} := (E_{ab} - E_{ba})\eta = E_{ab'} - E_{ba'}.$$

La sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} que nous choisissons admet pour vecteurs de base

$$H_a = L_{aa'} - L_{a'a}, \quad a = 1 \dots l.$$

L'ensemble des vecteurs associés aux racines positives est l'ensemble $\{L_{ab} ; a + b \leq n, a < b\}$.

Nos calculs ne dépendent pas de la parité de n . Néanmoins notons que :

▷ si $n = 2l+1$, les vecteurs associés aux racines simples sont les éléments $L_{1,n-1}, L_{2,n-2}, \dots, L_{l,l+1}$, et les racines simples sont les $\alpha_i = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$, pour $i = 1 \dots l-1$, avec 1 à la i -ème place, et $\alpha_l = (0, \dots, 0, 1)$.

▷ si $n = 2l$, les vecteurs associés aux racines simples sont les $L_{1,n-1}, L_{2,n-2}, \dots, L_{l-1,l+1}, L_{l,l}$, et les racines simples sont les $\alpha_i = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$, $i = 1 \dots l-1$, avec 1 à la i -ème place, et $\alpha_l = (0, \dots, 0, 1, 1)$.

Nous retrouvons ces résultats dans [Bou81] (voir aussi [FH91]).

Ayant fixé le système de racines et la sous-algèbre de Cartan, on définit un module de plus haut poids comme un module engendré par un caractère $H_a \mapsto \lambda_a \in \mathbb{C}$ et un vecteur (de plus haut poids) v_0 vérifiant

$$\begin{aligned} \forall a + b \leq n, \quad L_{ab}v_0 &= 0, \\ \forall a = 1 \dots l, \quad H_a v_0 &= \hbar \lambda_a v_0. \end{aligned}$$

Proposition 4.5.11

Un module de plus haut poids de l'algèbre déformée existe si et seulement si le paramètre ℓ prend la valeur $\hbar^2 \frac{n-4}{n-1}$. Dans ce cas, il existe $k \in \{1, \dots, l\}$ tel que le plus haut poids λ est donné par

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = -1, \quad \lambda_k = k + 1 - \frac{n}{2}, \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_l = 0.$$

Démonstration : voir l'Annexe 1. Le choix de Joseph est $k = l - 1$. ■

Dans la formulation de la Proposition 4.5.11 et de l'Equation (4.42), pour éviter la confusion avec l'indice k , on note l le paramètre complexe noté k dans ce paragraphe et dans l'Annexe 1.

Dans tous les autres cas, le contexte indique clairement la notation.

Si $n = 2l + 1$, nous avons $\mathfrak{so}_n = \mathfrak{so}_{2l+1} = B_l$, et

$$\begin{aligned}\lambda + \rho &= \omega_1 + \cdots + \omega_{l-3} + \frac{1}{2}(\omega_{l-2} + \omega_{l-1}) + \omega_l \\ &= \left(l - \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}, \dots, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right), \\ \lambda &= \left(-1, \dots, -1, -\frac{1}{2}, 0\right).\end{aligned}$$

Exemple 4.5.12

Le cas $n = 5$ correspond au singleton de Bose (“Rac”).

Un autre choix est $\lambda = (-1, \dots, -1, \frac{1}{2})$; dans le cas $n = 5$ c’est le singleton de Fermi (“Di”). Les deux sont des représentations unitarisables (après passage au quotient) de $\mathfrak{so}(3, 2)$. Binegar et Zierau prennent $k = 1$.

Si $n = 2l$, on a $\mathfrak{so}_n = \mathfrak{so}_{2l} = D_l$, et Joseph prend à nouveau $k = l - 1$ et

$$\begin{aligned}\lambda + \rho &= \omega_1 + \cdots + \omega_{l-3} + \omega_{l-1} + \omega_l \\ &= (l - 3, l - 2, \dots, 1, 1, 0), \\ \lambda &= (-1, -1, \dots, -1, 0, 0).\end{aligned}$$

Exemple 4.5.13

Si $n = 6$, c’est le plus haut poids de la représentation du groupe conforme par un champ scalaire de masse nulle en dimension 4, représentation qui apparaît dans l’atome d’hydrogène de Schrödinger. Binegar et Zierau prennent $k = 1$.

4.5.5 Calculs uniformes pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles

Orbites minimales des algèbres de Lie simples exceptionnelles

Nous utilisons ici des résultats de [MP04]. Notons κ la forme de Killing,

$$\kappa(x_i, x_j) = \kappa_{ij} = -\text{tr}(x_i x_j) = -\epsilon_{mi}^n \epsilon_{nj}^m$$

et κ^{ij} les coefficients de l’inverse de la matrice $(\kappa_{ij})_{i,j}$. La réduction de la partie symétrique de la représentation adjointe est régie par l’opérateur $L : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ défini par

$$L : x_i \otimes x_j \mapsto \kappa^{mn} \epsilon_{im}^s \epsilon_{jn}^t x_s \otimes x_t = \kappa^{mn} [x_i, x_m] \otimes [x_j, x_n]. \quad (4.43)$$

La partie symétrique du produit $ad \otimes ad$ de la représentation adjointe par elle-même se décompose en une somme directe de trois représentations, $I \oplus R_2 \oplus R_3$. La dernière représentation, qui contient les poids extrémaux, est l’orbite nilpotente minimale de \mathfrak{g} . Les relations qui définissent cette orbite sont les projections sur les deux premières représentations. La représentation de dimension un exprime la condition

$$\kappa^{ij} x_i x_j = 0.$$

Le tableau suivant (voir [MP04]) donne les valeurs propres $l_i = l_1, l_2, l_3$ associées aux représentations I, R_2, R_3 . Dans tous les cas, on a $l_1 = 1$, et $l_2 + l_3 = -\frac{1}{6}$:

\mathfrak{g}	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
l_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{30}$
$D = \dim \mathfrak{g}$	14	52	78	133	248

Revenons à l'Equation (4.24). En fait, les algèbres de Lie simples exceptionnelles sont les plus simples à traiter, et elles peuvent l'être toutes les cinq simultanément. La raison immédiate en est la non existence d'un polynôme invariant irréductible de degré quatre. Les seuls tenseurs symétriques équivariants sont (voir Proposition 4.5.5)

$$\psi_{ij} = k\kappa_{ij}, \quad \phi_{ijk} = \frac{k'}{3} \sum_{cycl(ijk)} \kappa_{ij}x_k, \quad (4.44)$$

où k et k' sont déterminés par les relations. Ainsi l'Equation (4.24) se simplifie en :

$$(x_i x_j) * x_k - x_i x_j x_k + \frac{\hbar}{2} (\{x_k, x_i\}x_j + (i \leftrightarrow j)) = \phi_{ijk} - \psi_{ij}x_k - \frac{\hbar^2}{12} (\{x_i, \{x_k, x_j\}\} + (i \leftrightarrow j)). \quad (4.45)$$

Résultat principal

Théorème 4.5.14

Soient \mathfrak{g} l'une des cinq algèbres de Lie simples exceptionnelles, et κ sa forme de Killing. Il existe un unique star-produit invariant sur l'orbite minimale nilpotente tel que

$$S(x_i * x_j) = x_i x_j + k\kappa_{ij}, \quad k \in \mathbb{C},$$

pour un et un seul choix de $(k, k') \in \mathbb{C}^2$, à savoir $k = \frac{l_2-1}{D} \frac{\hbar^2}{6} + l_2 \frac{\hbar^2}{12}$ et $k' = \frac{\hbar^2}{4}$.

Démonstration :

Nous avons déjà attiré l'attention sur le fait que les seules formes possibles des produits déformés

$$S(x_i * x_j) = x_i x_j + o(\hbar), \quad S(x_i * x_j * x_k) = x_i x_j x_k + o(\hbar)$$

sont

$$S(x_i * x_j) = x_i x_j + \psi_{ij}, \quad S(x_i * x_j * x_k) = x_i x_j x_k + \phi_{ijk},$$

avec les applications équivariantes ψ, ϕ comme dans (4.44). Le membre de gauche de (4.45) satisfait les contraintes. Il reste à le vérifier pour le membre de droite. Fixons l'indice k et définissons les vecteurs X, Y de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ dont les composantes sont

$$X_{ij} = \kappa_{ik}x_j + \kappa_{jk}x_i, \quad Y_{ij} = \kappa_{ij}x_k.$$

Notons L_s la projection de l'opérateur L sur la partie symétrique de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Alors le membre de droite de (4.45) est le vecteur

$$\frac{k'}{3}(X + Y) - kY - \frac{\hbar^2}{12}L_s X. \quad (4.46)$$

L'opérateur L_s vérifie l'équation caractéristique $(L_s - 1)(L_s - l_2)(L_s - l_3) = 0$, et puisque $L_s Y = Y$, il existe une constante c telle que

$$(L_s - l_2)(L_s - l_3)X = cY.$$

Pour déterminer la constante c , nous contractons cette équation avec κ et trouvons

$$c = \frac{2}{D}(1 - l_2)(1 - l_3).$$

Le vecteur (4.46) se réduit alors à

$$Z := c^{-1} \left(\frac{k'}{3} - k \right) (L_s - l_2)(L_s - l_3)X + \frac{k'}{3}X - \frac{\hbar^2}{12}L_s X.$$

En projetant sur la représentation triviale, on obtient

$$0 = \frac{k'}{3}(D + 2) - kD - \frac{\hbar^2}{6} = 0. \quad (4.47)$$

Toutes les contraintes sont exprimées par $(L_s - l_3)Z = 0$, ce qui conduit aux trois conditions :

$$\begin{aligned} (1 - l_3)c^{-1} \left(\frac{k'}{3} - k \right) - \frac{\hbar^2}{12} &= 0, \\ (1 - l_3)c^{-1} \left(\frac{k'}{3} - k \right) (l_2 + l_3) + \frac{k'}{3} &= l_3 \frac{\hbar^2}{12}, \\ (1 - l_3)c^{-1} \left(\frac{k'}{3} - k \right) l_2 l_3 &= l_3 \frac{k'}{3}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Les quatre équations (4.47)–(4.48) concordent sur les uniques valeurs de k et k'

$$k' = l_2 \frac{\hbar^2}{4}, \quad k - \frac{k'}{3} = \frac{l_2 - 1}{D} \frac{\hbar^2}{6}.$$

La proposition est prouvée. ■

Générateurs de l'idéal de Joseph

L'idéal de Joseph est évidemment engendré par les relations

$$x_i * x_j - x_j * x_i = \hbar \{x_i, x_j\},$$

et

$$(L_s - l_3)(x_i * x_j - k\kappa_{ij}) = 0.$$

CHAPITRE 5

Correspondance de McKay et loi de branchement pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$

Soient Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$, $\{\gamma_0, \dots, \gamma_l\}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de Γ , et $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ sa représentation naturelle. Les décompositions uniques $\gamma_j \otimes \gamma = \bigoplus_{i=0}^l a_{ij}^{(1)} \gamma_i$, définissent une matrice $A^{(1)} := (a_{ij}^{(1)})_{(i,j) \in \llbracket 0, l \rrbracket^2} \in \mathbf{M}_{l+1}\mathbb{N}$. La restriction $\pi_{m,n}|_{\Gamma}$ de la représentation irréductible de plus haut poids $m\varpi_1 + n\varpi_2$ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ se décompose à son tour sous la forme $\pi_{m,n}|_{\Gamma} = \bigoplus_{i=0}^l m_i(m,n) \gamma_i$. Soient (e_0, \dots, e_l) la base canonique de \mathbb{C}^{l+1} ,

$$v_{m,n} := \sum_{i=0}^l m_i(m,n) e_i \in \mathbb{C}^{l+1} \quad \text{et} \quad P_{\Gamma}(t, u) := \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n} t^m u^n \in (\mathbb{C}[[t, u]])^{l+1}.$$

Nous calculons dans ce chapitre la série $P_{\Gamma}(t, u)$ pour tout sous-groupe fini Γ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Puis nous associons à Γ une matrice de Cartan généralisée C_{Γ} que nous écrivons comme somme de produits de réflexions simples associées à des ensembles formés de racines deux à deux orthogonales.

5.1 Introduction

5.1.1 Cadre d'étude et résultats

Soit Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, nous déterminons comment une représentation irréductible de dimension finie de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ se décompose sous l'action de Γ . Les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ sont indexées par \mathbb{N}^2 . Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, soit $V(m, n)$ le module simple de dimension finie associé. Soient $\{\gamma_0, \dots, \gamma_l\}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de Γ , et χ_i le caractère irréductible associé à γ_i . Nous déterminons les multiplicités $m_i(m, n)$ des représentations γ_i dans la représentation $V(m, n)$. Dans ce but, nous introduisons la série de Poincaré

$$P_\Gamma(t, u)_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m_i(m, n) t^m u^n.$$

Nous montrons que $P_\Gamma(t, u)_i$ est une fraction rationnelle que nous explicitons pour tous les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$.

La démonstration utilise une formule d'inversion de la relation de récurrence pour les nombres $m_i(m, n)$, cette relation étant obtenue grâce à la décomposition du produit tensoriel de $V(m, n)$ avec la représentation naturelle de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. L'observation-clé qui conduit à la formule d'inversion repose sur le fait que deux matrices ad hoc sont codiagonalisables. Les valeurs propres de ces matrices sont des valeurs du caractère naturel du groupe Γ et de son conjugué. Cela prouve que la série $P_\Gamma(t, u)_i$ est une fraction rationnelle. Le calcul effectif de cette fraction rationnelle se réduit alors à une multiplication de matrices.

Cette méthode s'applique aussi au cas de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ (les séries $P_\Gamma(t, u)_i$ sont alors remplacées par des séries $P_\Gamma(t)_i$ à une seule variable). Elle a l'avantage de donner une preuve complète et rapide des résultats obtenus par B. Kostant dans [Kos85], [Kos06], et par Gonzalez-Sprinberg et Verdier dans [GSV83]. Elle conduit à une détermination explicite des multiplicités définies ci-dessus pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$.

Bien que les résultats pour $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ ne soient pas nouveaux, la relation explicite entre les fractions rationnelles et les valeurs propres de la matrice de Cartan associée au sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ ne semble pas exister dans la littérature. Dans [Kos85], le résultat est établi par une analyse de la structure de l'orbite de l'élément de Coxeter (voir aussi [Ste08]).

La construction d'une résolution minimale des singularités de l'orbifold \mathbb{C}^3/Γ suscite un grand intérêt. Elle est liée à la correspondance de McKay géométrique (voir [BKR01], [Roa96], [IR96], [Rei02], [HH98], [GSV83] et [YY93]). Dans ce cadre, Gonzalez-Sprinberg et Verdier [GSV83] utilisent la série de Poincaré déjà citée pour leur construction explicite d'une résolution minimale des singularités pour $V = \mathbb{C}^2/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. En suivant cette approche, les résultats de nos calculs pourraient être éventuellement utilisés pour construire de façon explicite une résolution minimale synthétique des singularités pour des orbifolds de la forme \mathbb{C}^3/Γ où Γ est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Cela clarifierait la description des fibres exceptionnelles de la résolution minimale de \mathbb{C}^3/Γ ([GNS04]).

Un élément essentiel dans l'approche de B. Kostant dans [Kos85] est la décomposition d'un élément du groupe de Weyl de l'algèbre de Lie associée à $\Gamma \subset \mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ via la correspondance de McKay, comme une somme de produits de réflexions simples associées à des ensembles formés de racines deux à deux orthogonales.

Nous nous inspirons de cette décomposition et associons à tout sous-groupe fini Γ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ une matrice de Cartan généralisée C_Γ . Nous écrivons alors cette matrice comme une somme de produits de réflexions simples associées à des ensembles formés de racines deux à deux orthogonales.

5.1.2 Organisation du chapitre

Dans le Paragraphe 5.2 nous traitons le cas de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Nous prouvons que les séries de Poincaré $P_\Gamma(t)_i$ définies ci-dessus sont des fractions rationnelles, en montrant que ce sont les coefficients d'un vecteur obtenu comme un produit de trois matrices, dont deux sont des matrices à coefficients scalaires, les coefficients de la troisième étant des fractions rationnelles, et d'un vecteur à coefficients scalaires. Nous calculons ces matrices pour tous les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, et nous donnons les fractions rationnelles obtenues.

Dans le Paragraphe 5.3, nous appliquons la méthode aux sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Nous utilisons ici les notations de l'article [YY93] où la classification des sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ est présentée.

Nous prouvons alors la rationalité des séries de Poincaré $P_\Gamma(t, u)_i$ en procédant comme dans le cas de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$.

Pour tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ on donne les matrices impliquées dans le produit, et on associe à tout sous-groupe Γ une matrice de Cartan généralisée C_Γ (correspondance de McKay en dimension 3). On représente son graphe et on donne sa décomposition comme somme de produits de réflexions simples associées à des ensembles formés de racines deux à deux orthogonales.

Le cas des séries infinies A , B , C (notation [YY93]) est traité dans le Paragraphe 5.4. En ce qui concerne la série D , on se contente de donner un exemple, les matrices intervenant n'ayant pas une forme générale.

Les sous-groupes finis exceptionnels de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ sont étudiés dans le Paragraphe 5.5. Les numérateurs des fonctions rationnelles sont en général fastidieux à lire, c'est pourquoi nous renvoyons à l'Annexe 3 pour visualiser la totalité des résultats. Quant aux dénominateurs, ils sont tous explicités dans le texte.

5.2 Loi de branchement pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$

5.2.1 La série de Poincaré est une fraction rationnelle

- Soient Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, et $\{\gamma_0, \dots, \gamma_l\}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes irréductibles de Γ , où γ_0 est la représentation triviale. Pour tout $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$, notons χ_j le caractère associé à γ_j .

Considérons $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ la représentation naturelle de dimension 2 de Γ , et notons χ son caractère. D'après le théorème de réductibilité complète des représentations de dimension finie des groupes finis, nous avons une décomposition unique $\gamma_j \otimes \gamma = \bigoplus_{i=0}^l a_{ij} \gamma_i$ pour tout $j \in \llbracket 0, l \rrbracket$.

Cela définit une matrice carrée $A := (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 0, l \rrbracket^2}$ de $\mathbf{M}_{l+1}\mathbb{N}$.

• Soient \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, ϖ_1 le poids fondamental correspondant, et $V(n\varpi_1)$ le \mathfrak{sl}_2 -module simple de plus haut poids $n\varpi_1$. On note π_n la représentation irréductible

$$\pi_n : \mathbf{SL}_2\mathbb{C} \longrightarrow V(n\varpi_1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de π_n au sous-groupe Γ est une représentation de Γ , et en vertu de la réductibilité complète, nous avons une décomposition unique $\pi_n|_\Gamma = \bigoplus_{i=0}^l m_i(n)\gamma_i$, où les $m_i(n)$ sont des entiers positifs ou nuls. Soient $\mathcal{E} := (e_0, \dots, e_l)$ la base canonique de \mathbb{C}^{l+1} , et

$$v_n := \sum_{i=0}^l m_i(n)e_i \in \mathbb{C}^{l+1}.$$

Comme γ_0 est la représentation triviale, nous avons $v_0 = e_0$. Considérons le vecteur (dont les composantes sont des éléments de $\mathbb{C}[[t]]$)

$$P_\Gamma(t) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n \in (\mathbb{C}[[t]])^{l+1},$$

et désignons par $P_\Gamma(t)_j$ sa j -ème coordonnée dans la base \mathcal{E} . La série $P_\Gamma(t)_0$ est la série de Poincaré de l'anneau des invariants. Remarquons que $P_\Gamma(t)$ peut aussi être vu comme une série formelle à coefficients dans \mathbb{C}^{l+1} .

Nous allons calculer $P_\Gamma(t)$ par une méthode directe.

• Comme conséquence immédiate de la Formule de Clebsch-Gordan, i. e. $\pi_n \otimes \pi_1 = \pi_{n+1} \oplus \pi_{n-1}$, nous avons l'égalité $Av_n = v_{n+1} + v_{n-1}$. Nous en déduisons la relation

$$(1 - tA + t^2)P_\Gamma(t) = v_0.$$

Notons $\{C_0, \dots, C_l\}$ l'ensemble des classes de conjugaison de Γ , et pour tout $j \in \llbracket 0, l \rrbracket$, soit g_j un élément de C_j . Ainsi la table de caractères de Γ est la matrice $T_\Gamma \in \mathbf{M}_{l+1}\mathbb{C}$ définie par $(T_\Gamma)_{i,j} := \chi_i(g_j)$.

Dans tous les cas étudiés, la matrice T_Γ est inversible, et $\Lambda := T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma$ est une matrice diagonale, avec $\Lambda_{jj} = \overline{\chi(g_j)}$.

Posons $\Theta := (\Lambda_{00}, \dots, \Lambda_{ll})$. Nous déduisons de la formule précédente que

$$T_\Gamma(1 - t\Lambda + t^2)T_\Gamma^{-1}P_\Gamma(t) = v_0.$$

Définissons la fonction rationnelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}(t) \\ d &\mapsto \frac{1}{1 - td + t^2}. \end{aligned}$$

Alors

$$P_\Gamma(t) = T_\Gamma \Delta(t) T_\Gamma^{-1} v_{0,0} = (T_\Gamma \Delta(t) T_\Gamma) (T_\Gamma^{-2} v_{0,0}),$$

où $\Delta(t) \in \mathbf{M}_{l+1}\mathbb{C}(t)$ est la matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{C}(t)$, définie par $\Delta_{jj}(t) = f(\Lambda_{jj})$. Par conséquent, les coefficients du vecteur $P_\Gamma(t)$ sont des fractions rationnelles en t . On obtient ainsi :

Proposition 5.2.1

Pour tout $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$, la série de Poincaré $P_\Gamma(t)_i$ est une fraction rationnelle.

5.2.2 Résultats pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$

• La classification complète, à conjugaison près, des sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ est donnée dans [Spr77]. Elle consiste en deux séries infinies (types A , D) et trois cas exceptionnels (types E_6 , E_7 , E_8).

On pose $\omega_j := e^{\frac{2i\pi}{j}}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{\llbracket 0, j-1 \rrbracket}$, on définit alors la matrice $Q^\sigma := \left(\delta_k^{\sigma(l)} \right)_{(k,l) \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket}$.

Type A — Groupes cycliques

• Ici, nous prenons $\Gamma = \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$. La représentation naturelle et le caractère naturel de Γ sont

$$\left. \begin{array}{ccc} \gamma : \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbf{SL}_2\mathbb{C} \\ \bar{k} & \mapsto & \begin{pmatrix} \omega_j^k & 0 \\ 0 & \omega_j^{-k} \end{pmatrix} \end{array} \right| \left. \begin{array}{ccc} \chi : \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbf{SL}_2\mathbb{C} \\ \bar{k} & \mapsto & \omega_j^k + \omega_j^{-k}. \end{array} \right.$$

La table de caractères est la matrice de Vandermonde $T_\Gamma = \left(\omega_j^{kl} \right)_{(k,l) \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket}$. Soit σ la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\llbracket 0, j-1 \rrbracket}$ définie par $\sigma(0) = 0$ et $\forall i \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket$, $\sigma(i) = j-i$. Alors $T_\Gamma^2 = j Q^\sigma$, i. e. $T_\Gamma^{-1} = \frac{1}{j} T_\Gamma Q^\sigma$. Les valeurs propres de A sont les nombres $\overline{\chi(k)} = \omega_j^k + \omega_j^{-k}$, pour $k \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket$. La matrice $\Delta(t)$ est telle que

$$\Delta(t)_{kk} = f(\overline{\chi(k)}) = \frac{1}{1 - t(\omega_j^k + \omega_j^{-k}) + t^2} = \frac{1}{(1 - t\omega_j^p)(1 - t\omega_j^{-p})},$$

et

$$(T_\Gamma \Delta(t) T_\Gamma Q^\sigma)_{kl} = \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{j-1} \sum_{r=0}^{j-1} (T_\Gamma)_{kp} \Delta(t)_{pq} (T_\Gamma)_{qr} Q_{rl}^\sigma = \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{r=0}^{j-1} (T_\Gamma)_{kp} \Delta(t)_{pp} (T_\Gamma)_{pr} Q_{rl}^\sigma.$$

On a alors

$$P_\Gamma(t)_i = \frac{1}{j} (T_\Gamma \Delta(t) T_\Gamma Q^\sigma)_{i0} = \frac{1}{j} \sum_{p=0}^{j-1} \frac{\omega_j^{ip}}{(1 - t\omega_j^p)(1 - t\omega_j^{-p})}.$$

Remarquons que $(1 - t^j)(1 - t^2)$ est un dénominateur commun à tous les termes de la somme précédente. En effet, les ω_j^p et les ω_j^{-p} sont des racines de $1 - t^j$, et si $\omega_j^p = \omega_j^{-p}$, alors ω_j^p est une racine de $1 - t^2$.

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est $P_\Gamma(t)_0$.

Type D — Groupes binaires diédraux

Le n -ème groupe binaire diédral est le sous-groupe $\langle a_n, b \rangle$ de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, avec

$$a_n := \begin{pmatrix} \omega_{2n} & 0 \\ 0 & \omega_{2n}^{-1} \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ordre de Γ est $4n$ et les $n + 3$ classes de conjugaison de Γ sont

Classe	id	a_nb	b	a_n^n	a_n	a_n^2	a_n^3	\dots	a_n^{n-1}
Cardinal	1	n	n	1	2	2	2	\dots	2

Les caractères irréductibles de degré 2 sont induits par les caractères irréductibles de degré 1 du sous-groupe normal $\langle a_n \rangle$ de Γ . Ce sont les éléments ρ_i , pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, définis par

$$\rho_i(b) = 0, \text{ et } \rho_i(a_n^j) = \omega_{2n}^{ij} + \omega_{2n}^{-ij}.$$

La table de caractères de Γ est ainsi

$$T_\Gamma := \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & i^n & -i^n & (-1)^n & -1 & & 1 & (-1)^{n-1} \\ 1 & -i^n & i^n & (-1)^n & -1 & & 1 & (-1)^{n-1} \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Le caractère naturel χ de Γ est donné par $(\chi(g_0), \dots, \chi(g_l)) = \overline{\Theta}$, avec

$$\begin{aligned} \Theta &= \overline{\Theta} = [tr(id), tr(a_nb), tr(b), tr(a_n^n), tr(a_n), tr(a_n^2), tr(a_n^3), \dots, tr(a_n^{n-1})] \\ &= [2, 0, 0, -2, \omega_{2n} + \omega_{2n}^{-1}, \omega_{2n}^2 + \omega_{2n}^{-2}, \omega_{2n}^3 + \omega_{2n}^{-3}, \dots, \omega_{2n}^{n-1} + \omega_{2n}^{-(n-1)}]. \end{aligned}$$

Soit $Diag(d_1, d_2, d_3, d_4, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}) := \Delta(t)$. Nous en déduisons la formule pour la série $P_\Gamma(t)$ (voir l'Annexe 2 pour le détail des calculs) :

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t)_0 &= \frac{3n-1}{8n^2} \left(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \right) \\ &\quad + (-1)^n \frac{n-1}{8n^2} \left(d_1 + (-1)^n(d_2 + d_3) + d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \delta_k \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^l \frac{n-1}{4n^2} \left(d_1 + (-1)^l(d_2 + d_3) + d_4 + \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{lk} + \omega_{2n}^{-lk}) \delta_k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t)_1 &= \frac{3n-1}{8n^2} \left(d_1 + i^n d_2 - i^n d_3 + (-1)^n d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \delta_k \right) \\ &\quad + (-1)^n \frac{n-1}{8n^2} \left(d_1 + (-1)^n(i^n d_2 - i^n d_3 + d_4) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^l \frac{n-1}{4n^2} \left(d_1 + (-1)^l(i^n d_2 - i^n d_3) + (-1)^n d_4 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^{lk} + \omega_{2n}^{-lk}) \delta_k \right), \end{aligned}$$

et $P_\Gamma(t)_3$ (resp. $P_\Gamma(t)_2$) est obtenu en remplaçant dans $P_\Gamma(t)_0$ (resp. $P_\Gamma(t)_1$) d_2 par $-d_2$ et d_3 par $-d_3$.

Finalement, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, nous avons

$$\begin{aligned}
P_\Gamma(t)_{i+3} = & \frac{3n-1}{8n^2} \left(2d_1 + 2(-1)^i d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{ki} + \omega_{2n}^{-ki}) \delta_k \right) \\
& + (-1)^n \frac{n-1}{8n^2} \left(2d_1 + 2(-1)^i d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^{ik} + \omega_{2n}^{-ik}) \delta_k \right) \\
& + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^l \frac{n-1}{4n^2} \left(2d_1 + 2(-1)^i d_4 + \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{ki} + \omega_{2n}^{-ki}) \delta_k (\omega_{2n}^{kl} + \omega_{2n}^{-kl}) \right).
\end{aligned}$$

5.2.3 Cas exceptionnels

Type E_6 — Groupe binaire tétraédral

Le groupe binaire tétraédral est le sous-groupe $\langle a^2, b, c \rangle$ de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, avec

$$a := \begin{pmatrix} \omega_8 & 0 \\ 0 & \omega_8^7 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad c := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \omega_8^7 & \omega_8^7 \\ \omega_8^5 & \omega_8 \end{pmatrix}.$$

L'ordre de Γ est 24 et les 7 classes de conjugaison de Γ sont

Classe	id	$a^4 = -id$	b	c	c^2	$-c$	$-c^2$
Cardinal	1	1	6	4	4	4	4

La table de caractères T_Γ de Γ et la matrice A sont

$$T_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & j & j^2 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 & j^2 & j & j^2 & j \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & j & -j^2 & -j & j^2 \\ 2 & -2 & 0 & j^2 & -j & -j^2 & j \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et la liste des valeurs propres est $\Theta = (2, -2, 0, 1, -1, -1, 1)$.

Les séries $P_\Gamma(t)_i = \frac{N_\Gamma(t)_i}{D_\Gamma(t)}$ sont données par $D_\Gamma(t) = (1 - t^6)(1 - t^8)$, et

$$\begin{aligned}
N_\Gamma(t)_0 &= t^{12} + 1, & N_\Gamma(t)_4 &= t^9 + t^7 + t^5 + t^3, \\
N_\Gamma(t)_1 &= t^8 + t^4, & N_\Gamma(t)_5 &= t^9 + t^7 + t^5 + t^3, \\
N_\Gamma(t)_2 &= t^8 + t^4, & N_\Gamma(t)_6 &= t^{10} + t^8 + 2t^6 + t^4 + t^2. \\
N_\Gamma(t)_3 &= t^{11} + t^7 + t^5 + t,
\end{aligned}$$

Type E_7 — Groupe binaire octaédral

Le groupe binaire octaédral est le sous-groupe $\langle a, b, c \rangle$ de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, avec a, b, c définis comme dans le paragraphe précédent. L'ordre de Γ est 48 et les 8 classes de conjugaison de Γ sont

Classe	id	$a^4 = -id$	ab	b	c^2	c	a	a^3
Cardinal	1	1	12	6	8	8	6	6

La table de caractères T_Γ de Γ et la matrice A sont

$$T_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et la liste des valeurs propres est $\Theta = (2, -2, 0, 0, -1, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Les séries $P_\Gamma(t)_i = \frac{N_\Gamma(t)_i}{D_\Gamma(t)}$ sont données par $D_\Gamma(t) = (1 - t^8)(1 - t^{12})$, et

$$\begin{array}{lcl} N_\Gamma(t)_0 & = & t^{18} + 1, \\ N_\Gamma(t)_1 & = & t^{12} + t^6, \\ N_\Gamma(t)_2 & = & t^{14} + t^{10} + t^8 + t^4, \\ N_\Gamma(t)_3 & = & t^{17} + t^{11} + t^7 + t, \end{array} \quad \begin{array}{lcl} N_\Gamma(t)_4 & = & t^{13} + t^{11} + t^7 + t^5, \\ N_\Gamma(t)_5 & = & t^{16} + t^{12} + t^{10} + t^8 + t^6 + t^2, \\ N_\Gamma(t)_6 & = & t^{14} + t^{12} + t^{10} + t^8 + t^6 + t^4, \\ N_\Gamma(t)_7 & = & t^{15} + t^{13} + t^{11} + 2t^9 + t^7 + t^5 + t^3. \end{array}$$

Type E_8 — Groupe binaire icosaédral

Le groupe binaire icosaédral est le sous-groupe $\langle a, b, c \rangle$ de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, avec

$$a := \begin{pmatrix} -\omega_5^3 & 0 \\ 0 & -\omega_5^2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c := \frac{1}{\omega_5^2 + \omega_5^{-2}} \begin{pmatrix} \omega_5 + \omega_5^{-1} & 1 \\ 1 & -\omega_5 - \omega_5^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'ordre de Γ est 120 et les 9 classes de conjugaison de Γ sont

Classe	id	$b^2 = -id$	a	a^2	a^3	a^4	abc	$(abc)^2$	b
Cardinal	1	1	12	12	12	12	20	20	30

La table de caractères T_Γ de Γ et la matrice A sont

$$T_\Gamma := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et la liste des valeurs propres est $\Theta = \left(2, -2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1, -1, 0\right)$.

Les séries $P_\Gamma(t)_i = \frac{N_\Gamma(t)_i}{D_\Gamma(t)}$ sont données par $D_\Gamma(t) = (1 - t^{12})(1 - t^{20})$, et

$$\begin{aligned} N_\Gamma(t)_0 &= t^{30} + 1, \\ N_\Gamma(t)_1 &= t^{23} + t^{17} + t^{13} + t^7, \quad \left| \begin{aligned} N_\Gamma(t)_2 &= t^{29} + t^{19} + t^{11} + t, \\ N_\Gamma(t)_3 &= t^{28} + t^{20} + t^{18} + t^{12} + t^{10} + t^2, \end{aligned} \right. \\ N_\Gamma(t)_4 &= t^{24} + t^{20} + t^{16} + t^{14} + t^{10} + t^6, \\ N_\Gamma(t)_5 &= t^{24} + t^{22} + t^{18} + t^{16} + t^{14} + t^{12} + t^8 + t^6, \\ N_\Gamma(t)_6 &= t^{27} + t^{21} + t^{19} + t^{17} + t^{13} + t^{11} + t^9 + t^3, \\ N_\Gamma(t)_7 &= t^{26} + t^{22} + t^{20} + t^{18} + t^{16} + t^{14} + t^{12} + t^{10} + t^8 + t^4, \\ N_\Gamma(t)_8 &= t^{25} + t^{23} + t^{21} + t^{19} + t^{17} + 2t^{15} + t^{13} + t^{11} + t^9 + t^7 + t^5. \end{aligned}$$

5.3 Loi de branchement pour les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$

5.3.1 Notations et objectif

• Soient Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ et $\{\gamma_0, \dots, \gamma_l\}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes irréductibles de dimension finie de Γ , où γ_0 est la représentation triviale. On note χ_j le caractère associé à γ_j .

Considérons la représentation naturelle $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbf{SL}_3\mathbb{C}$, et γ^* sa représentation duale. On note χ le caractère de γ . Par réductibilité complète des représentations de dimension finie des groupes finis, on a des représentations uniques

$$\forall j \in \llbracket 0, l \rrbracket, \quad \gamma_j \otimes \gamma = \bigoplus_{i=0}^l a_{ij}^{(1)} \gamma_i \quad \text{et} \quad \gamma_j \otimes \gamma^* = \bigoplus_{i=0}^l a_{ij}^{(2)} \gamma_i.$$

Cela définit deux matrices carrées de $\mathbf{M}_{l+1}\mathbb{N} : A^{(1)} := \left(a_{ij}^{(1)} \right)_{(i,j) \in \llbracket 0, l \rrbracket^2}$ et $A^{(2)} := \left(a_{ij}^{(2)} \right)_{(i,j) \in \llbracket 0, l \rrbracket^2}$.

• Soient \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, ϖ_1, ϖ_2 les poids fondamentaux correspondants, et soit $V(m\varpi_1 + n\varpi_2)$ le $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ -module simple de plus haut poids $m\varpi_1 + n\varpi_2$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. On note $\pi_{m,n}$ la représentation irréductible associée $\pi_{m,n} : \mathbf{SL}_3\mathbb{C} \rightarrow \mathbf{GL}(V(m\varpi_1 + n\varpi_2))$. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, la restriction de $\pi_{m,n}$ au sous-groupe Γ est une représentation de Γ , et par réductibilité complète, nous avons une décomposition unique

$$\pi_{m,n}|_\Gamma = \bigoplus_{i=0}^l m_i(m, n) \gamma_i,$$

où les $m_i(m, n)$ sont des entiers positifs ou nuls. Soient $\mathcal{E} := (e_0, \dots, e_l)$ la base canonique de \mathbb{C}^{l+1} , et

$$v_{m,n} := \sum_{i=0}^l m_i(m, n) e_i \in \mathbb{C}^{l+1}.$$

Comme γ_0 est la représentation triviale, nous avons $v_{0,0} = e_0$. Considérons le vecteur (à coefficients dans $\mathbb{C}[[t, u]]$)

$$P_\Gamma(t, u) := \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n} t^m u^n \in (\mathbb{C}[[t, u]])^{l+1},$$

et désignons par $P_\Gamma(t, u)_j$ sa j -ème coordonnée dans la base \mathcal{E} . Remarquons que $P_\Gamma(t, u)$ peut aussi être vu comme une série formelle à coefficients dans \mathbb{C}^{l+1} .

Le but de ce chapitre est de calculer $P_\Gamma(t, u)$.

5.3.2 Analogie avec les séries de Fourier

Le problème d'analyse harmonique étudié ici est classique : c'est une généralisation du développement en série de Fourier d'une fonction 2π -périodique. En effet, soit γ une représentation irréductible du cercle S^1 . Comme le groupe est abélien, γ est nécessairement de dimension 1. Par composition, l'application $J : t \mapsto \gamma(e^{it})$ est un morphisme de groupes de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^* , donc de la forme $J : t \mapsto e^{ixt}$. Or $e^{2i\pi x} = J(2\pi) = \gamma(e^{2i\pi}) = 1$, donc $x \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, les représentations $\gamma_n : z \mapsto z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) ainsi construites sont irréductibles et deux à deux non équivalentes.

D'après le Théorème de Peter-Weyl pour les groupes compacts, l'espace $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ est dense dans $\mathcal{C}(S^1)$ et dans $L^2(S^1)$ (voir [CL04] et [KS05]).

En particulier, pour $f \in L^2(S^1)$, on a $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ au sens de la norme de $L^2(S^1)$, avec $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

5.3.3 La série de Poincaré est une fraction rationnelle

Dans ce paragraphe, nous donnons des propriétés de la série $P_\Gamma(t, u)$, qui permettent d'obtenir une formule explicite pour $P_\Gamma(t, u)$.

La première proposition résulte de l'unicité de la décomposition d'une représentation comme somme de représentations irréductibles.

Proposition 5.3.1

- $A^{(2)} = {}^t A^{(1)}$.
- $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ commutent, i. e. $A^{(1)}$ est une matrice normale.

Démonstration :

Le premier point résulte du fait que γ^* est la représentation duale de la représentation de Γ .

Pour le second point, on a par définition de $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$:

$$\gamma_j \otimes \gamma = \sum_{i=0}^l a_{ij}^{(1)} \gamma_i \text{ et } \gamma_j \otimes \gamma^* = \sum_{i=0}^l a_{ij}^{(2)} \gamma_i,$$

donc

$$\gamma^* \otimes (\gamma_j \otimes \gamma) = \sum_{i=0}^l a_{ij}^{(1)} \gamma^* \otimes \gamma_i \simeq \sum_{i=0}^l a_{ij}^{(1)} \gamma_i \otimes \gamma^* = \sum_{k=0}^l \left(\sum_{i=0}^l a_{ki}^{(2)} a_{ij}^{(1)} \right) \gamma_k.$$

De même,

$$\gamma \otimes (\gamma_j \otimes \gamma^*) = \sum_{k=0}^l \left(\sum_{i=0}^l a_{ki}^{(1)} a_{ij}^{(2)} \right) \gamma_k.$$

Par unicité de la décomposition, on obtient l'égalité

$$\sum_{i=0}^l a_{ki}^{(2)} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=0}^l a_{ki}^{(1)} a_{ij}^{(2)}, \text{ i. e. } (A^{(1)} A^{(2)})_{kj} = (A^{(2)} A^{(1)})_{kj}. \blacksquare$$

Comme $A^{(1)}$ est normale, on sait qu'elle est diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres. Nous allons maintenant diagonaliser la matrice $A^{(1)}$ en utilisant la table de caractères du groupe Γ . Notons $\{C_0, \dots, C_l\}$ l'ensemble des classes de conjugaison de Γ , et pour tout $j \in \llbracket 0, l \rrbracket$, soit g_j un élément quelconque fixé de C_j . Ainsi la table de caractères de Γ est la matrice $T_\Gamma \in \mathbf{M}_{l+1}\mathbb{C}$ définie par $(T_\Gamma)_{i,j} := \chi_i(g_j)$.

Proposition 5.3.2

Pour $k \in \llbracket 0, l \rrbracket$, posons $w_k := (\chi_0(g_k), \dots, \chi_l(g_k)) \in \mathbb{C}^{l+1}$. Alors w_k est un vecteur propre de $A^{(2)}$ associé à la valeur propre $\chi(g_k)$. De même, w_k est un vecteur propre de $A^{(1)}$ associé à la valeur propre $\overline{\chi(g_k)}$.

Démonstration :

Par définition de $A^{(1)}$, on a $\gamma_i \otimes \gamma = \sum_{j=0}^l a_{ji}^{(1)} \gamma_j$, donc

$$\chi_i \chi = \chi_{\gamma_i \otimes \gamma} = \sum_{j=0}^l a_{ji}^{(1)} \chi_j.$$

En évaluant cette égalité sur g_k , on obtient, pour tout $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$,

$$\chi_i(g_k) \chi(g_k) = \sum_{j=0}^l a_{ji}^{(1)} \chi_j(g_k) = \sum_{j=0}^l a_{ij}^{(2)} \chi_j(g_k),$$

i. e. $\chi(g_k) w_k = A^{(2)} w_k$. \blacksquare

Nous verrons dans la suite que $\mathcal{W} := (w_0, \dots, w_l)$ est toujours une base de vecteurs propres de $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$, de sorte que $T_\Gamma^{-1} A^{(1)} T_\Gamma$ et $T_\Gamma^{-1} A^{(2)} T_\Gamma$ sont des matrices diagonales.

Utilisons maintenant la Formule de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} \pi_{1,0} \otimes \pi_{m,n} &= \pi_{m+1,n} \oplus \pi_{m,n-1} \oplus \pi_{m-1,n+1}, \\ \pi_{0,1} \otimes \pi_{m,n} &= \pi_{m,n+1} \oplus \pi_{m-1,n} \oplus \pi_{m+1,n-1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Proposition 5.3.3

Les vecteurs $v_{m,n}$ satisfont les relations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned} A^{(1)} v_{m,n} &= v_{m+1,n} + v_{m,n-1} + v_{m-1,n+1}, \\ A^{(2)} v_{m,n} &= v_{m,n+1} + v_{m-1,n} + v_{m+1,n-1}. \end{aligned}$$

Démonstration :

Par définition, $v_{m,n} = \sum_{i=0}^l m_i(m, n) e_i$, donc $A^{(1)} v_{m,n} = \sum_{i=0}^l \left(\sum_{j=0}^l m_j(m, n) a_{ij}^{(1)} \right) e_i$.

Or

$$(\pi_{m,n} \otimes \pi_{1,0})|_\Gamma = \pi_{m,n}|_\Gamma \otimes \gamma = \sum_{j=0}^l m_j(m, n) \gamma_j \otimes \gamma = \sum_{i=0}^l \left(\sum_{j=0}^l m_j(m, n) a_{ij}^{(1)} \right) \gamma_i,$$

et

$$\pi_{m+1,n}|_\Gamma + \pi_{m,n-1}|_\Gamma + \pi_{m-1,n+1}|_\Gamma = \sum_{i=0}^l (m_i(m+1, n) + m_i(m, n-1) + m_i(m-1, n+1)) \gamma_i.$$

Donc par unicité de la décomposition, on obtient

$$\sum_{j=0}^l m_j(m, n) a_{ij}^{(1)} = m_i(m+1, n) + m_i(m, n-1) + m_i(m-1, n+1). \blacksquare$$

Proposition 5.3.4

La série $P_\Gamma(t, u)$ vérifie la relation suivante

$$(1 - tA^{(1)} + t^2A^{(2)} - t^3) (1 - uA^{(2)} + u^2A^{(1)} - u^3) P_\Gamma(t, u) = (1 - tu)v_{0,0}.$$

Démonstration :

• Posons $x := P_\Gamma(t, u)$. Posons aussi $v_{m,-1} := 0$ et $v_{-1,n} := 0$ pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, de sorte que, d'après la Formule de Clebsch-Gordan, les formules du corollaire précédent sont encore valables pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$tuA^{(1)}x = tu \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A^{(1)}v_{m,n} t^m u^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (v_{m+1,n} + v_{m,n-1} + v_{m-1,n+1}) t^{m+1} u^{n+1}.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m+1,n} t^{m+1} u^{n+1} &= u \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n} t^m u^n = ux - u \sum_{n=0}^{\infty} v_{0,n} u^n, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n-1} t^{m+1} u^{n+1} &= tu^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n-1} t^m u^{n-1} = tu^2 x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m-1,n+1} t^{m+1} u^{n+1} &= t^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m-1,n+1} t^{m-1} u^{n+1} = t^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n+1} t^m u^{n+1} \\ &= t^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m,n} t^m u^n - t^2 \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0} t^m = t^2 x - t^2 \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0} t^m. \end{aligned}$$

Donc

$$tuA^{(1)}x = (u + tu^2 + t^2)x - u \sum_{n=0}^{\infty} v_{0,n} u^n - t^2 \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0} t^m. \quad (5.2)$$

On procède de même pour obtenir la relation

$$tuA^{(2)}x = (t + tu^2 + u^2)x - t \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0} t^m - u^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_{0,n} u^n. \quad (5.3)$$

- En utilisant les Equations (5.2) et (5.3), on a

$$tuA^{(2)}x - tu^2A^{(1)}x = t(1 - u^3)x + (t^2u - t) \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0}t^m,$$

i. e.

$$\left(1 - uA^{(2)} + u^2A^{(1)} - u^3\right)x = (1 - tu) \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0}t^m. \quad (5.4)$$

De plus, $A^{(1)}v_{m,0} = v_{m+1,0} + v_{m-1,1}$, et $A^{(2)}v_{m-1,0} = v_{m-1,1} + v_{m-2,0}$, d'où

$$A^{(1)}v_{m,0} = v_{m+1,0} + A^{(2)}v_{m-1,0} - v_{m-2,0}.$$

Posons $y := \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0}t^m$. Alors

$$\begin{aligned} tA^{(1)}y &= \sum_{m=0}^{\infty} v_{m+1,0}t^{m+1} + A^{(2)} \sum_{m=1}^{\infty} v_{m-1,0}t^{m+1} - \sum_{m=2}^{\infty} v_{m-2,0}t^{m+1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,0}t^m + t^2A^{(2)} \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0}t^m - t^3 \sum_{m=0}^{\infty} v_{m,0}t^m = y - v_{0,0} + t^2A^{(2)}y - t^3y. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left(1 - tA^{(1)} + t^2A^{(2)} - t^3\right)y = v_{0,0}. \quad (5.5)$$

En regroupant les Equations (5.4) et (5.5), on a

$$\left(1 - tA^{(1)} + t^2A^{(2)} - t^3\right)\left(1 - uA^{(2)} + u^2A^{(1)} - u^3\right)x = (1 - tu)v_{0,0}. \blacksquare$$

On peut inverser la relation de la Proposition 5.3.4 et obtenir une formule explicite pour $P_{\Gamma}(t, u)$ et pour les vecteurs $v_{m,n}$.

Proposition 5.3.5 (*Formule d'inversion*)

- On a la relation suivante :

$$P_{\Gamma}(t, u) = (1 - tu) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \left(u^3 + uA^{(2)} - u^2A^{(1)} \right)^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \left(t^3 + tA^{(1)} - t^2A^{(2)} \right)^q \right) v_{0,0}.$$

- Pour $z \in \mathbb{R}$, soit $\lceil z \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à z .

Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, posons

$$\begin{aligned} \alpha_m &:= \sum_{q=\lceil \frac{m}{3} \rceil}^m \left(\sum_{j=\lceil \frac{3q-m}{2} \rceil}^{\min(3q-m, q)} C_q^j C_j^{3q-m-j} (-1)^{3q-m} A^{(1)3q-m-j} A^{(2)2j-3q+m} \right), \\ \beta_n &:= \sum_{p=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^n \left(\sum_{i=\lceil \frac{3p-n}{2} \rceil}^{\min(3p-n, p)} C_p^i C_i^{3p-n-i} (-1)^{3p-n} A^{(2)3p-n-i} A^{(1)2i-3p+n} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$v_{m,n} = \begin{cases} v_{0,0} & \text{si } m = n = 0 \\ \beta_n v_{0,0} & \text{si } m = 0 \text{ et } n \neq 0 \\ \alpha_m v_{0,0} & \text{si } n = 0 \text{ et } m \neq 0 \\ (\beta_n \alpha_m - \beta_{n-1} \alpha_{m-1}) v_{0,0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration :

Le premier point est une conséquence directe de la Proposition 5.3.4.

Démontrons le second point. Posons

$$B_1 := \left(\sum_{p=0}^{\infty} \left(u^3 + uA^{(2)} - u^2 A^{(1)} \right)^p \right), \quad B_2 := \left(\sum_{q=0}^{\infty} \left(t^3 + tA^{(1)} - t^2 A^{(2)} \right)^q \right),$$

de sorte que $P_{\Gamma}(t, u) = (1 - tu)B_1 B_2 v_{0,0}$.

Puisque $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ commutent, la Formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} (u^3 + uA^{(2)} - u^2 A^{(1)})^p &= \sum_{i=0}^p C_p^i \left(uA^{(2)} - u^2 A^{(1)} \right)^i u^{3(p-i)} \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^i C_p^i C_i^j (-1)^{i-j} A^{(2)j} A^{(1)i-j} u^{3p-i-j}, \end{aligned}$$

donc

$$B_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^i C_p^i C_i^j (-1)^{i-j} A^{(2)j} A^{(1)i-j} u^{3p-i-j}.$$

Avec deux changements d'indices, on obtient

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p \sum_{s=i}^{2i} C_p^i C_i^{s-i} (-1)^{2i-s} A^{(2)s-i} A^{(1)2i-s} u^{3p-s} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2p} \left(\sum_{i=\lceil \frac{s}{2} \rceil}^{\min(s,p)} C_p^i C_i^{s-i} (-1)^{2i-s} A^{(2)s-i} A^{(1)2i-s} \right) u^{3p-s}. \end{aligned}$$

Un troisième changement d'indices donne

$$B_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=\lceil \frac{r}{3} \rceil}^r \left(\sum_{i=\lceil \frac{3p-r}{2} \rceil}^{\min(3p-r,p)} C_p^i C_i^{3p-r-i} (-1)^{3p-r} A^{(2)3p-r-i} A^{(1)2i-3p+r} \right) u^r = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r u^r.$$

De la même façon, on montre que $B_2 = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s t^s$.

Finalement,

$$\begin{aligned} P_{\Gamma}(t, u) &= (1 - tu) \left(\sum_{r=0}^{\infty} \beta_r u^r \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s t^s \right) v_{0,0} \\ &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_r \alpha_s u^r t^s - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{r-1} \alpha_{s-1} u^r t^s \right) v_{0,0} \\ &= \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r u^r + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s t^s + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\beta_r \alpha_s - \beta_{r-1} \alpha_{s-1}) u^r t^s \right) v_{0,0}, \end{aligned}$$

puisque $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. ■

Pour les calculs explicites de $P_\Gamma(t, u)$, nous utilisons une autre formule fondamentale, qui consiste à inverser des nombres complexes au lieu d'inverser des matrices. Pour cela, nous définissons la fonction rationnelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}(t, u) \\ (d_1, d_2) &\mapsto \frac{1 - tu}{(1 - td_1 + t^2d_2 - t^3)(1 - ud_2 + u^2d_1 - u^3)}. \end{aligned}$$

La classification complète, à conjugaison près, des sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ est donnée dans [YY93], d'après la première classification de [Bli17]. Elle consiste en quatre séries infinies (types A, B, C, D) et huit cas exceptionnels (types E, F, G, H, I, J, K, L).

Dans tous les cas, la table de caractères T_Γ est inversible, et les matrices $\Lambda^{(1)} := T_\Gamma^{-1} A^{(1)} T_\Gamma$ et $\Lambda^{(2)} := T_\Gamma^{-1} A^{(2)} T_\Gamma$ sont des matrices diagonales, avec $\Lambda_{jj}^{(1)} = \overline{\chi(g_j)}$ et $\Lambda_{jj}^{(2)} = \chi(g_j)$.

D'après la Proposition 5.3.4, on peut écrire

$$T_\Gamma \left(1 - t\Lambda^{(1)} + t^2\Lambda^{(2)} - t^3 \right) \left(1 - u\Lambda^{(2)} + u^2\Lambda^{(1)} - u^3 \right) T_\Gamma^{-1} P_\Gamma(t, u) = (1 - tu)v_{0,0},$$

d'où

$$\text{Diag} \left((1 - t\Lambda_{jj}^{(1)} + t^2\Lambda_{jj}^{(2)} - t^3)(1 - u\Lambda_{jj}^{(2)} + u^2\Lambda_{jj}^{(1)} - u^3) \right) T_\Gamma^{-1} P_\Gamma(t, u) = (1 - tu)T_\Gamma^{-1}v_{0,0}.$$

On en déduit que

$$\boxed{P_\Gamma(t, u) = T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma^{-1} v_{0,0} = (T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma) (T_\Gamma^{-2} v_{0,0})}, \quad (5.6)$$

où $\Delta(t, u) \in \mathbf{M}_{l+1}\mathbb{C}(t, u)$ est la matrice diagonale définie par

$$\boxed{\Delta(t, u)_{jj} = f(\Lambda_{jj}^{(1)}, \overline{\Lambda_{jj}^{(1)}}) = f(\overline{\chi(g_j)}, \chi(g_j))}.$$

Soit $\Theta := (\Lambda_{00}^{(1)}, \dots, \Lambda_{ll}^{(1)})$ la liste des valeurs propres de $A^{(1)}$.

Comme corollaire de la formule précédente, on obtient la proposition :

Proposition 5.3.6

Les coefficients du vecteur $P_\Gamma(t, u)$ sont des fractions rationnelles en t et u , donc les séries $P_\Gamma(t, u)_i$ sont des fractions rationnelles.

Nous écrivons les séries sous la forme suivante

$$\boxed{P_\Gamma(t, u)_i := \frac{N_\Gamma(t, u)_i}{D_\Gamma(t, u)_i}}, \quad i \in \llbracket 0, l \rrbracket$$

où $N_\Gamma(t, u)_i$ et $D_\Gamma(t, u)_i$ sont des éléments de $\mathbb{C}[t, u]$ que nous calculerons explicitement dans la suite.

Nous introduisons enfin une matrice de Cartan généralisée¹ que nous étudierons pour tous les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$.

Définition 5.3.7

Pour tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$, nous définissons une matrice de Cartan généralisée par la formule :

$$C_\Gamma := 2I - A^{(1)} - {}^tA^{(1)} + 2\text{Diag}(A^{(1)}),$$

où $\text{Diag}(A^{(1)})$ représente la diagonale de la matrice $A^{(1)}$.

Pour $k \in \llbracket 0, l \rrbracket$, la matrice de la réflexion s_k associée à la k -ème racine de C_Γ est définie par

$$(s_k)_{ij} = \delta_i^j - (C_\Gamma)_{k,j} \delta_i^k.$$

Pour tout sous-groupe fini, on donne une décomposition de l'ensemble des réflexions simples $\mathcal{S} = \{s_0, \dots, s_l\}$ en p ensembles (avec p minimal), i. e.

$$\mathcal{S} = S_0 \sqcup \dots \sqcup S_{p-1},$$

telle que pour tout $l \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, les racines associées aux réflexions de S_l sont deux à deux orthogonales. Notons τ_l le produit (commutatif) des éléments de S_l . Alors on en déduit la décomposition suivante de C_Γ :

$$C_\Gamma = pI - \sum_{k=0}^{p-1} \tau_k.$$

Remarque 5.3.8

Dans la suite du chapitre, nous allons utiliser des matrices dont tous les coefficients sont dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Pour plus de clarté, nous représenterons les coefficients non nuls par des points colorés. La correspondance est la suivante : gris foncé = -2 , gris clair = -1 , blanc = 1 , noir = 2 , vide = 0 .

5.4 Résultats explicites pour les séries infinies — Types A , B , C , D

5.4.1 Série A

Dans ce paragraphe, on considère Γ , un sous-groupe fini abélien diagonal de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Alors Γ est isomorphe à un produit de groupes cycliques :

$$\Gamma \simeq \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/j_k\mathbb{Z}.$$

1. Une matrice de Cartan généralisée (voir [Kac83]) est une matrice $M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ vérifiant les trois conditions

- (1) $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{jj} = 2,$
- (2) $\forall i \neq j, m_{ij} \leq 0,$
- (3) $\forall i \neq j, (m_{ij} = 0 \Rightarrow m_{ji} = 0).$

Si Γ est un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_r\mathbb{C}$, alors Γ est un *petit* sous-groupe de $\mathbf{GL}_r\mathbb{C}$, i. e. aucun élément de Γ n'a la valeur propre 1 avec la multiplicité $r - 1$. En effet, si $g \in \Gamma$ a une valeur propre 1 de multiplicité $r - 1$, alors la dernière valeur propre de g est différente de 1 et le déterminant de g est lui aussi différent de 1, ce qui est impossible.

Alors, d'après un lemme de [DHZ06] (p.13), Γ a au plus $r - 1$ générateurs. Ainsi, pour un sous-groupe Γ de type A , on peut supposer que $k \leq 2$, d'où les deux cas :

(A_1) $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$,

(A_2) $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z}$, avec $j_1 \geq j_2 \geq 2$.

Type A_1

• Ici, nous prenons $\Gamma = \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$. La représentation naturelle et le caractère naturel de Γ sont

$$\left. \begin{array}{ccc} \gamma : \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbf{SL}_3\mathbb{C} \\ \bar{k} & \mapsto & \begin{pmatrix} \omega_j^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j^{-k} \end{pmatrix} \end{array} \right| \begin{array}{ccc} \chi : \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbf{SL}_3\mathbb{C} \\ \bar{k} & \mapsto & 1 + \omega_j^k + \omega_j^{-k}. \end{array}$$

La table de caractères de Γ est $T_\Gamma = \left(\omega_j^{kl} \right)_{(k,l) \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\llbracket 0, j-1 \rrbracket}$ la permutation définie par $\sigma(0) = 0$ et $\forall i \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket$, $\sigma(i) = j - i$. Alors $T_\Gamma^{-1} = \frac{1}{j} T_\Gamma Q^\sigma$. Les valeurs propres de $A^{(1)}$ sont les nombres $\overline{\chi(k)} = 1 + \omega_j^k + \omega_j^{-k}$, pour $k \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket$. D'après la Formule (5.6), et en procédant comme dans le cas de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, on a

$$P_\Gamma(t, u)_i = \frac{1}{j} (T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma Q^\sigma)_{i0} = \frac{1}{j} \sum_{p=0}^{j-1} \frac{\omega_j^{ip} (1 - tu)}{(1-t)(1-t\omega_j^p)(1-t\omega_j^{-p})(1-u)(1-u\omega_j^p)(1-u\omega_j^{-p})}.$$

Remarquons que $(1-t^j)(1-t^2)(1-u^j)(1-u^2)$ est un dénominateur commun à tous les termes de la somme précédente, qui est indépendant de i .

• La matrice $A^{(1)} \in \mathbf{M}_j\mathbb{C}$ est donnée par

$$\begin{aligned} A_{kl}^{(1)} &= \frac{1}{j} (T_\Gamma \Lambda^{(1)} T_\Gamma Q^\sigma)_{kl} = \frac{1}{j} \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{r=0}^{j-1} \omega_j^{kp} (1 + \omega_j^p + \omega_j^{-p}) \omega_j^{pr} Q_{rl}^\sigma \\ &= \frac{1}{j} \sum_{p=0}^{j-1} \omega_j^{(k-l)p} (1 + \omega_j^p + \omega_j^{-p}) = \delta_k^l + \delta_l^{k+1} + \delta_k^{j-1} \delta_l^0 + \delta_k^{l+1} + \delta_k^0 \delta_l^{j-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } j = 2, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } j \geq 3.$$

Alors l'ensemble des réflexions \mathcal{S} peut être décomposé en deux (resp. trois) ensembles si j est pair (resp. impair).

- ▷ Si j est pair, on a $\tau_0 = s_0 s_4 \dots s_{j-2}$, $\tau_1 = s_1 s_3 \dots s_{j-1}$, et $C_{A_1}(j) = 2I_{j-1} - (\tau_0 + \tau_1)$.
 ▷ Si j est impair, on a $\tau_0 = s_2 s_4 \dots s_{j-1}$, $\tau_1 = s_1 s_3 \dots s_{j-2}$, $\tau_2 = s_0$, et $C_{A_1}(j) = 3I_j - (\tau_0 + \tau_1 + \tau_2)$.
 Le graphe associé à $C_{A_1}(j)$ est un graphe cyclique avec j sommets et j arêtes.

Remarque 5.4.1

Orientons le graphe de telle sorte que toutes les arêtes qui relient 0 à un autre sommet soient dirigées vers 0, les autres arêtes étant bidirectionnelles. Pour $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$, notons $\text{Succ}(j)$ l'ensemble des sommets i reliés au sommet j par une arête $j \rightarrow i$. On a alors la formule

$$\forall j \in \llbracket 1, l \rrbracket, \sum_{i \in \text{Succ}(j)} P_\Gamma(t, 0)_i = (t + t^{-1})P_\Gamma(t, 0)_j.$$

Voir l'article [McK99] pour le cas de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$.

Type A_2

- Considérons maintenant le cas $\Gamma = \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z}$, avec $j_1 \geq j_2 \geq 2$. La représentation naturelle et le caractère naturel de Γ sont

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbf{SL}_3\mathbb{C} \\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}) &\mapsto \begin{pmatrix} \omega_{j_1}^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{j_2}^{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{j_1}^{-k_1} \omega_{j_2}^{-k_2} \end{pmatrix}, \\ \chi : \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbf{SL}_3\mathbb{C} \\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}) &\mapsto \omega_{j_1}^{k_1} + \omega_{j_2}^{k_2} + \omega_{j_1}^{-k_1} \omega_{j_2}^{-k_2}. \end{aligned}$$

Les caractères irréductibles de Γ sont les éléments de la forme $\chi_1 \otimes \chi_2$, où χ_1 et χ_2 sont des caractères irréductibles de $\mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire les caractères irréductibles de Γ sont, pour $(l_1, l_2) \in \llbracket 0, j_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, j_2 - 1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \chi_{l_1, l_2} : \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbf{SL}_3\mathbb{C} \\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}) &\mapsto \omega_{j_1}^{k_1 l_1} \omega_{j_2}^{k_2 l_2}. \end{aligned}$$

Pour $k \in \{1, 2\}$, notons T_k la table de caractères du groupe $\mathbb{Z}/j_k\mathbb{Z}$. Alors la table de caractères de $\Gamma = \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z}$ est le produit de Kronecker² $T_\Gamma = T_1 \otimes T_2$. Soit $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{\llbracket 0, j_k - 1 \rrbracket}$ la permutation définie par $\sigma_k(0) = 0$ et $\forall i \in \llbracket 0, j_k - 1 \rrbracket$, $\sigma_k(i) = j_k - i$. On a

$$T_\Gamma^{-1} = (T_1 \otimes T_2)^{-1} = \frac{1}{j_1 j_2} (T_1 \otimes T_2) (Q^{\sigma_1} \otimes Q^{\sigma_2}) = \frac{1}{j_1 j_2} (T_1 Q^{\sigma_1}) \otimes (T_2 Q^{\sigma_2}).$$

2. Rappelons que le produit de Kronecker de deux matrices $A \in \mathbf{M}_m\mathbb{C}$ et $B \in \mathbf{M}_n\mathbb{C}$ est la matrice par blocs $A \otimes B \in \mathbf{M}_{mn}\mathbb{C}$ définie par la formule :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket, (A \otimes B)_{ij} = a_{ij} B.$$

Une propriété importante du produit de Kronecker est la relation

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B).$$

L'égalité $T_\Gamma = T_1 \otimes T_2$ n'est que la traduction de la relation précédente en termes de caractères, qui sont des traces !

Les valeurs propres de $A^{(1)}$ sont les nombres $\overline{\chi(k_1, k_2)} = \omega_{j_1}^{-k_1} + \omega_{j_2}^{-k_2} + \omega_{j_1}^{k_1} \omega_{j_2}^{k_2}$, pour tout $(k_1, k_2) \in \llbracket 0, j_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, j_2 - 1 \rrbracket$.

Notons $\Lambda^{(1)} := \text{Diag}(\Lambda_0^{(1)}, \dots, \Lambda_{j_1}^{(1)})$ la matrice diagonale par blocs définie par

$$(\Lambda_{k_1}^{(1)})_{k_2 k_2} = \overline{\chi(k_1, k_2)} = \omega_{j_1}^{-k_1} + \omega_{j_2}^{-k_2} + \omega_{j_1}^{k_1} \omega_{j_2}^{k_2}.$$

D'après la Formule (5.6), pour $(m, n) \in \llbracket 0, j_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, j_2 - 1 \rrbracket$, on a (voir l'Annexe 2 pour le détail des calculs) :

$$\begin{aligned} & P_\Gamma(t, u)_{mj_2+n} \\ &= \frac{1}{j_1 j_2} \sum_{k=0}^{j_1-1} \sum_{l=0}^{j_2-1} \omega_{j_1}^{mk} \omega_{j_2}^{nl} (1 - tu) \left(1 - t(\omega_{j_1}^{-k} + \omega_{j_2}^{-l} + \omega_{j_1}^k \omega_{j_2}^l) + t^2(\omega_{j_1}^k + \omega_{j_2}^l + \omega_{j_1}^{-k} \omega_{j_2}^{-l}) - t^3 \right)^{-1} \\ & \quad \left(1 - u(\omega_{j_1}^k + \omega_{j_2}^l + \omega_{j_1}^{-k} \omega_{j_2}^{-l}) + u^2(\omega_{j_1}^{-k} + \omega_{j_2}^{-l} + \omega_{j_1}^k \omega_{j_2}^l) - u^3 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

• La matrice $A^{(1)}$ est une matrice par blocs avec $j_1 \times j_1$ blocs de taille $j_2 \times j_2$, et on a

$$A^{(1)} = \mathbf{1}_{4,4} - I_4, \text{ si } j_1 = j_2 = 2,$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} Q^{\rho_2} & {}^t Q^{\rho_2} & & I_{j_2} \\ I_{j_2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & {}^t Q^{\rho_2} \\ {}^t Q^{\rho_2} & & I_{j_2} & Q^{\rho_2} \end{pmatrix} \text{ si } j_1 \geq 2, \text{ avec } Q^{\rho_k} := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous pouvons écrire $A^{(1)} = I_{j_1} \otimes Q^{\rho_2} + Q^{\rho_1} \otimes I_{j_2} + {}^t Q^{\rho_1} \otimes {}^t Q^{\rho_2}$.

Notons que $\text{Diag}(A^{(1)}) = 0$. Donc $C_{A_2}(j_1, j_2) = I_{j_1} \otimes W + Q^{\tau_1} \otimes S + {}^t Q^{\tau_1} \otimes {}^t S$.

• Décomposons la matrice $A^{(1)}$:

Si $j_1 = j_2 = 2$, alors la décomposition de $C_{A_2}(2, 2)$ est $C_{A_2}(2, 2) = 4I_4 - (s_0 + s_1 + s_2 + s_3)$.

Nous supposons maintenant que $j_1 \geq 3$. Pour $(i_1, i_2) \in \llbracket 0, j_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, j_2 - 1 \rrbracket$, soit s_{i_1, i_2} la réflexion associée à la $(i_1 j_2 + i_2)$ -ème racine. Alors l'ensemble \mathcal{S} peut se décomposer en p ensembles où $p \in \{4, 6, 9\}$.

Pour $i_1 \in \llbracket 0, j_1 - 1 \rrbracket$, soit \widetilde{S}_{i_1} l'ensemble $\widetilde{S}_{i_1} := \{s_{i_1, 0}, \dots, s_{i_1, j_2-1}\}$.

▷ Si j_1 est impair, nous posons

$$\widehat{I}_0 := \{0, 2, \dots, j_1 - 3\}, \widehat{I}_1 := \{1, 3, \dots, j_1 - 2\}, \widehat{I}_2 := \{j_1 - 1\}.$$

▷ Si j_1 est pair, nous posons

$$\widehat{I}_0 := \{0, 2, \dots, j_1 - 2\}, \widehat{I}_1 := \{1, 3, \dots, j_1 - 1\}.$$

Alors, les racines associées aux réflexions de différents \widetilde{S}_{i_1} pour i_1 appartenant au même \widehat{I}_k sont orthogonales.

Nous décomposons maintenant chaque \widetilde{S}_{i_1} , i. e. $\widetilde{S}_{i_1} = \widehat{S}_{i_1, 0} \sqcup \dots \sqcup \widehat{S}_{i_1, q-1}$, de sorte que $q \in \{2, 3\}$ et

pour tout $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, les racines associées aux réflexions appartenant à $\widehat{S_{i_1, k}}$ sont orthogonales :

▷ Si j_2 est impair, alors $\widehat{S_{i_1}} = \widehat{S_{i_1, 0}} \sqcup \widehat{S_{i_1, 1}} \sqcup \widehat{S_{i_1, 2}}$, avec

$$\widehat{S_{i_1, 0}} = \{s_{i_1, 0}, s_{i_1, 2}, \dots, s_{i_1, j_2-3}\}, \widehat{S_{i_1, 1}} = \{s_{i_1, 1}, s_{i_1, 3}, \dots, s_{i_1, j_2-2}\}, \widehat{S_{i_1, 2}} = \{s_{i_1, j_2-1}\}.$$

▷ Si j_2 est pair, alors $\widehat{S_{i_1}} = \widehat{S_{i_1, 0}} \sqcup \widehat{S_{i_1, 1}}$, avec

$$\widehat{S_{i_1, 0}} = \{s_{i_1, 0}, s_{i_1, 2}, \dots, s_{i_1, j_2-2}\}, \widehat{S_{i_1, 1}} = \{s_{i_1, 1}, s_{i_1, 3}, \dots, s_{i_1, j_2-1}\}.$$

Finalement, pour $(k, l) \in \{0, 1, 2\}^2$, on pose

$$S_{k, l} := \prod_{i_1 \in \widehat{I}_k} \widehat{S_{i_1, l}},$$

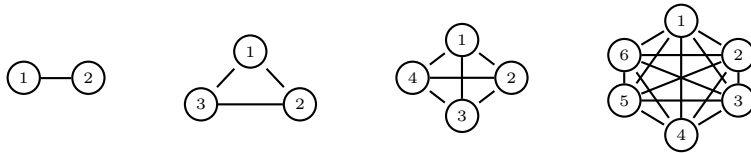
et on note $p \in \{4, 6, 9\}$ le nombre d'ensembles $S_{k, l}$ non vides, et $\tau_{k, l}$ le produit commutatif des réflexions de $S_{k, l}$. Alors, nous avons

$$C_{A_2}(j_1, j_2) := 2I_{j_1 j_2} - A^{(1)} - {}^t A^{(1)} + 2 \operatorname{Diag}(A^{(1)}) = pI_{j_1 j_2} - \sum_{(k, l) \in \{0, 1, 2\}^2} \tau_{k, l}.$$

- Si $j_1 \geq 3$, le graphe associé à Γ est un j_1 -gone, tel que tout sommet de ce j_1 -gone est un j_2 -gone, et tout sommet de chaque j_2 -gone est relié à exactement 2 sommets des deux j_2 -gones adjacents (pour $j_1 = j_2 = 2$, voir la Remarque 5.4.2).

Remarque 5.4.2

Dans les cas $j_1 = 2, j_2 = 2$ et $j_1 = 3, j_2 = 2$, on obtient des matrices $C_{A_2}(j_1, j_2)$ pleines et des graphes complets. De plus, les graphes complets à 4 et 6 sommets (resp. 2 et 3 sommets) sont les seuls graphes complets que l'on peut obtenir pour le type A_2 (resp. le type A_1).

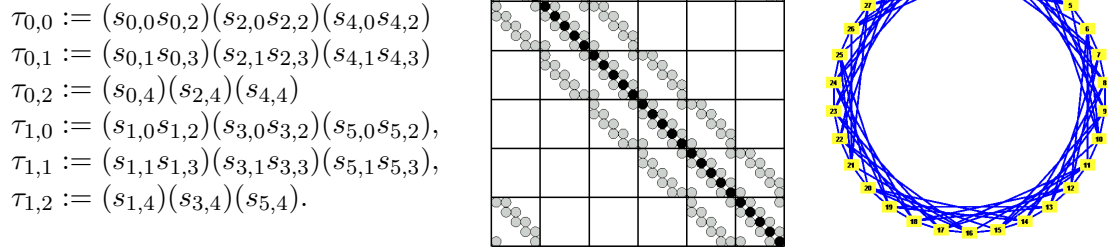


Exemple 5.4.3

On considère le cas où $j_1 = 6$ et $j_2 = 5$. Alors la décomposition de la matrice de Cartan est

$$C_{A_2}(6, 5) = 6I_{30} - (\tau_{0,0} + \tau_{0,1} + \tau_{0,2} + \tau_{1,0} + \tau_{1,1} + \tau_{1,2}),$$

où la matrice $C_{A_2}(6, 5)$, les $\tau_{i, j}$ et le graphe associé à $C_{A_2}(6, 5)$ sont donnés par la Figure 5.1.

FIGURE 5.1 – Matrice $C_{A_2}(6, 5)$ et graphe correspondant (conventions de la Remarque 5.3.8).

5.4.2 Série B

Dans ce paragraphe, nous étudions les groupes binaires de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$.

Nous donnons une formule générale pour les types $B\mathcal{D}a$, $B\mathcal{T}a$, $B\mathcal{O}$ et $B\mathcal{I}$. Dans tous ces cas, le groupe Γ contient deux sous-groupes normaux Γ_1 et Γ_2 tels que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{id\}$, et $|\Gamma_1| \cdot |\Gamma_2| = |\Gamma|$, si bien que $\Gamma = \Gamma_2 \Gamma_1$ et $\Gamma \simeq \Gamma_2 \times \Gamma_1$. Le groupe Γ_1 est isomorphe à un groupe binaire de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ et Γ_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Ainsi, nous pouvons déduire les résultats pour Γ de ceux obtenus pour le groupe Γ_1 .

Si nous notons T_k la table de caractères du groupe Γ_k , la table de caractères du produit direct $\Gamma = \Gamma_2 \times \Gamma_1$ est le produit de Kronecker $T_\Gamma = T_2 \otimes T_1$. La matrice T_2 est donnée dans le Paragraphe 5.4.1, et la matrice T_1 dans celui qui traite du groupe binaire correspondant de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Nous avons aussi $T_\Gamma^{-1} = T_2^{-1} \otimes T_1^{-1} = \frac{1}{m}(T_2 Q^{\sigma_2}) \otimes T_1^{-1}$, où σ_2 est la matrice de permutation définie par $\sigma_2(0) = 0$, et $\forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $\sigma_2(i) = m-i$.

Notons h le nombre de classes de conjugaison de Γ_1 . Les colonnes de T_Γ donnent une base de vecteurs propres et les valeurs propres de $A^{(1)}$ sont les nombres $\overline{\chi_{i,j}}$, pour (i, j) appartenant à $\llbracket 0, m-1 \rrbracket \times \llbracket 0, h-1 \rrbracket$, où $\chi_{i,j}$ est la valeur du caractère naturel de Γ sur la (i, j) -ème classe de conjugaison.

Notons aussi $\Lambda^{(1)}$ la matrice diagonale par blocs avec $m \times m$ blocs de taille $h \times h$ définie par

$$\Lambda^{(1)} := \text{Diag} \left(\Lambda_0^{(1)}, \dots, \Lambda_{m-1}^{(1)} \right), \quad (\Lambda_i^{(1)})_{jj} = \overline{\chi_{i,j}}.$$

D'après la Formule (5.6),

$$P_\Gamma(t, u) = T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma^{-1} v_{0,0} = \frac{1}{m} (T_2 \otimes T_1) \Delta(t, u) ((T_2 Q^{\sigma_2}) \otimes (T_1 T_1^{-2})) v_{0,0},$$

où $\Delta(t, u)$ est la matrice diagonale par blocs définie par

$$\Delta(t, u) = \text{Diag} \left(\Delta(t, u)^{(0)}, \dots, \Delta(t, u)^{(m-1)} \right),$$

$$\text{avec } \Delta(t, u)_{jj}^{(i)} = f(\overline{\chi_{i,j}}, \chi_{i,j}) = \frac{1 - tu}{(1 - t\overline{\chi_{i,j}} + t^2\chi_{i,j} - t^3)(1 - u\chi_{i,j} + u^2\overline{\chi_{i,j}} - u^3)} =: f_{ij}.$$

La décomposition de la matrice $A^{(1)}$ et la description du graphe associé se traitent de la même façon pour les groupes binaires tétraédraux, octaédraux et icosaédraux : les résultats sont rassemblés dans le dernier paragraphe de 5.4.2.

Série BDA — Groupes binaires diédraux

- Pour $(q, m) \in \mathbb{N}^2$, soient ψ_{2q} , τ et ϕ_{2m} les éléments suivants de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$:

$$\psi_{2q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2q} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{2q}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2m} = \begin{pmatrix} \omega_{2m}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{2m} \end{pmatrix}.$$

Dans ce paragraphe³, nous supposons que $1 < q < n$, $n \wedge q = 1$, et $m := n - q \equiv 1 \pmod{2}$, et nous considérons le sous-groupe $\Gamma := \langle \psi_{2q}, \tau, \phi_{2m} \rangle$ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Notons que $\phi_{2m} = \psi_{2q}^q \phi_m^{-\frac{m-1}{2}}$, si bien que $\Gamma = \langle \psi_{2q}, \tau, \phi_m \rangle$. Soient $\Gamma_1 := \langle \psi_{2q}, \tau \rangle$ et $\Gamma_2 := \langle \phi_m \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Alors $\Gamma \simeq \Gamma_2 \times \Gamma_1$. Avec les notations utilisées pour $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, ψ_{2q} (resp. τ) représente a_q (resp. b), où $\langle a_q, b \rangle$ est un sous-groupe binaire diédral de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$.

Le caractère naturel de Γ est donné par $\chi = (\chi_i)_{i=0\dots m-1}$, avec

$$\begin{aligned} \chi_i &= [\chi_{i,0}, \chi_{i,1}, \chi_{i,2}, \chi_{i,3}, \chi_{i,4}, \chi_{i,5}, \chi_{i,6}, \dots, \chi_{i,q+2}] \\ &= \left[\text{tr}(\phi_m^i), \text{tr}(\phi_m^i \psi_{2q} \tau), \text{tr}(\phi_m^i \tau), \text{tr}(\phi_m^i \psi_{2q}^q), \text{tr}(\phi_m^i \psi_{2q}), \text{tr}(\phi_m^i \psi_{2q}^2), \right. \\ &\quad \left. \text{tr}(\phi_m^i \psi_{2q}^3), \dots, \text{tr}(\phi_m^i \psi_{2q}^{q-1}) \right] \\ &= \left[\omega_m^{-2i} + 2\omega_m^i, \omega_m^{-2i}, \omega_m^{-2i}, \omega_m^{-2i} - 2\omega_m^i, \omega_m^{-2i} + \omega_m^i(\omega_{2q} + \omega_{2q}^{-1}), \omega_m^{-2i} + \omega_m^i(\omega_{2q}^2 + \omega_{2q}^{-2}), \right. \\ &\quad \left. \omega_m^{-2i} + \omega_m^i(\omega_{2q}^3 + \omega_{2q}^{-3}), \dots, \omega_m^{-2i} + \omega_m^i(\omega_{2q}^{q-1} + \omega_{2q}^{-(q-1)}) \right]. \end{aligned}$$

En procédant comme pour la série A_2 , nous en déduisons la formule suivante pour la série $P_\Gamma(t, u)$:

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_{i_1(q+3)} &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \omega_m^{i_1 r} \left[\frac{3q-1}{8q^2} \left(d_1^{(r)} + d_2^{(r)} + d_3^{(r)} + d_4^{(r)} + 2 \sum_{k=1}^{q-1} \delta_k^{(r)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^q \frac{q-1}{8q^2} \left(d_1^{(r)} + (-1)^q (d_2^{(r)} + d_3^{(r)}) + d_4^{(r)} + 2 \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k \delta_k^{(r)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{q-1} (-1)^l \frac{q-1}{4q^2} \left(d_1^{(r)} + (-1)^l (d_2^{(r)} + d_3^{(r)}) + d_4^{(r)} + \sum_{k=1}^{q-1} (\omega_{2q}^{lk} + \omega_{2q}^{-lk}) \delta_k^{(r)} \right) \right], \\ P_\Gamma(t, u)_{i_1(q+3)+1} &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \omega_m^{i_1 r} \left[\frac{3q-1}{8q^2} \left(d_1^{(r)} + i^n d_2^{(r)} - i^n d_3^{(r)} + (-1)^n d_4^{(r)} + 2 \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k \delta_k^{(r)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^q \frac{q-1}{8q^2} \left(d_1^{(r)} + (-1)^q (i^n d_2^{(r)} - i^n d_3^{(r)} + d_4^{(r)}) + 2 \sum_{k=1}^{q-1} \delta_k^{(r)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{q-1} (-1)^l \frac{q-1}{4q^2} \left(d_1^{(r)} + (-1)^l (i^n d_2^{(r)} - i^n d_3^{(r)}) + (-1)^n d_4^{(r)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k (\omega_{2q}^{lk} + \omega_{2q}^{-lk}) \delta_k^{(r)} \right) \right], \end{aligned}$$

3. L'autre cas — le type BDb — est $1 < q < n$, $n \wedge q = 1$, et $m := n - q \equiv 0 \pmod{2}$. Ce groupe n'est pas un produit direct.

et $P_\Gamma(t)_{i_1(q+3)+3}$ (resp. $P_\Gamma(t)_{i_1(q+3)+2}$) est obtenu en remplaçant dans $P_\Gamma(t)_{i_1(q+3)}$ (resp. $P_\Gamma(t)_{i_1(q+3)+1}$) d_2 par $-d_2$ et d_3 par $-d_3$. Finalement, pour $i_2 \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$, nous avons

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_{i_1(q+3)+i_2+3} &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \omega_m^{i_1 r} \left[\frac{3q-1}{8q^2} \left(2d_1^{(r)} + 2(-1)^{i_2} d_4^{(r)} + 2 \sum_{k=1}^{q-1} (\omega_{2q}^{ki_2} + \omega_{2q}^{-ki_2}) \delta_k^{(r)} \right) \right. \\ &\quad + (-1)^q \frac{q-1}{8q^2} \left(2d_1^{(r)} + 2(-1)^{i_2} d_4^{(r)} + 2 \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k (\omega_{2q}^{i_2 k} + \omega_{2q}^{-i_2 k}) \delta_k^{(r)} \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{q-1} (-1)^l \frac{q-1}{4q^2} \left(2d_1^{(r)} + 2(-1)^{i_2} d_4^{(r)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{q-1} (\omega_{2q}^{ki_2} + \omega_{2q}^{-ki_2}) \delta_k^{(r)} (\omega_{2q}^{kl} + \omega_{2q}^{-kl}) \right) \right]. \end{aligned}$$

• Nous explicitons maintenant la matrice $A^{(1)}$: $A^{(1)}$ est une matrice par blocs avec $m \times m$ blocs de taille $(q+3) \times (q+3)$.

▷ Si $m \geq 5$, alors les matrices $A^{(1)}$ et $C_\Gamma := 2I - A^{(1)} - {}^t A^{(1)}$ sont définies par

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & I & B \\ B & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & I \\ I & & \ddots & \ddots \\ & I & B & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\Gamma = \begin{pmatrix} 2I & -B & -I & & -I & -B \\ -B & 2I & -B & -I & & -I \\ -I & -B & 2I & -B & -I & \\ & -I & -B & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -I & \ddots & \ddots & -B & -I \\ -I & & & \ddots & -B & 2I & -B \\ -B & -I & & & -I & -B & 2I \end{pmatrix},$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } q = 2, \text{ et } B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ si } q \geq 3.$$

▷ Si $m = 3$, alors les matrices $A^{(1)}$ et $C_\Gamma := 2I - A^{(1)} - {}^t A^{(1)}$ sont définies par

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & B & B \\ B & 0 & B \\ B & B & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } q = 2, \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } q \geq 3.$$

▷ Si $m = 1$, alors les matrices $A^{(1)}$ et C_Γ sont $A^{(1)} = B$ et $C_\Gamma := 2I - A^{(1)} - {}^tA^{(1)} + 2 \text{Diag}(A^{(1)})$, avec B définie comme dans le cas $m = 3$.

• Pour $i_1 \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et $i_2 \in \llbracket 0, q+2 \rrbracket$, soit s_{i_1, i_2} la réflexion associée à la $(i_1(q+3) + i_2)$ -ème racine. Alors l'ensemble \mathcal{S} peut se décomposer en p ensembles où $p \in \{2, 3, 4, 5\}$:

— Si $m \geq 3$, alors :

▷ Si $m \equiv 0 \pmod 3$, posons $S_l := \{s_{3k+l, i_2} / (k, i_2) \in \llbracket 0, \frac{m}{3} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, q+2 \rrbracket\}$ pour $l \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Alors $\mathcal{S} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2$, $p = 3$, et $C_\Gamma = 3I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2$.

▷ Si $m \equiv 1 \pmod 3$, posons $S_l := \{s_{3k+l, i_2} / (k, i_2) \in \llbracket 0, \frac{m-1}{3} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, q+2 \rrbracket\}$ pour $l \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, et $S_3 := \{s_{m-1, i_2} / i_2 \in \llbracket 0, q+2 \rrbracket\}$. Alors $\mathcal{S} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$, $p = 4$, et $C_\Gamma = 4I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$.

▷ Si $m \equiv 2 \pmod 3$, posons $S_l := \{s_{3k+l, i_2} / (k, i_2) \in \llbracket 0, \frac{m-2}{3} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, q+2 \rrbracket\}$ pour $l \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, et $S_3 := \{s_{m-2, i_2} / i_2 \in \llbracket 0, q+2 \rrbracket\}$, $S_4 := \{s_{m-1, i_2} / i_2 \in \llbracket 0, q+2 \rrbracket\}$. Alors $\mathcal{S} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 \sqcup S_4$, $p = 5$, et $C_\Gamma = 5I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4$.

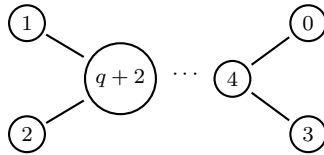
— Si $m = 1$, alors :

▷ Si $q = 2$, posons $S_0 := \{s_{0,0}, s_{0,1}, s_{0,2}, s_{0,3}\}$ et $S_1 := \{s_{0,4}\}$. Alors $\mathcal{S} = S_0 \sqcup S_1$, $p = 2$, et $C_\Gamma = 2I - \tau_0 - \tau_1$.

▷ Si $q \geq 3$ et q est pair, posons $S_0 := \{s_{0,0}, s_{0,1}, s_{0,2}\}$ et $S_1 := \{s_{0,3}, \dots, s_{0, q+1}\}$, $S_2 := \{s_{0,4}, \dots, s_{0, q+2}\}$. Alors $\mathcal{S} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2$, $p = 3$, et $C_\Gamma = 2I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2$.

▷ Si $q \geq 3$ et q est impair, posons $S_0 := \{s_{0,0}, s_{0,1}, s_{0,2}\}$ et $S_1 := \{s_{0,3}, \dots, s_{0, q+2}\}$, $S_2 := \{s_{0,4}, \dots, s_{0, q+1}\}$. Alors $\mathcal{S} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2$, $p = 3$, et $C_\Gamma = 2I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2$.

• Si $m = 1$, le graphe associé à Γ est le suivant :



Si $m \geq 2$, le graphe associé à Γ est formé de $q+3$ m -gones qui sont reliés.

Série BTa — Groupes binaires tétraédraux

Soient $\psi_4, \tau, \eta, \phi_{2m}$ les éléments

$$\psi_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_4 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_4^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_8^7 & \omega_8^7 \\ 0 & \omega_8^5 & \omega_8 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2m} := \begin{pmatrix} \omega_{2m}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{2m} \end{pmatrix}.$$

Dans ce paragraphe⁴, nous supposons que $m \equiv 1$, ou $5 \pmod{6}$, et nous considérons le sous-groupe $\Gamma := \langle \psi_4, \tau, \eta, \phi_{2m} \rangle$ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Notons que $\phi_{2m} = \psi_4^2 \phi_m^{-\frac{m-1}{2}}$, si bien que $\Gamma := \langle \psi_4, \tau, \eta, \phi_m \rangle$. Posons $\Gamma_1 := \langle \psi_4, \tau, \eta \rangle$ et $\Gamma_2 := \langle \phi_m \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Alors nous avons $\Gamma \simeq \Gamma_2 \times \Gamma_1$. Avec les notations du sous-groupe binaire tétraédral de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, ψ_4 (resp. τ, η) représente a^2 (resp. b, c). $\Gamma_1 \simeq \langle a^2, b, c \rangle$ est le sous-groupe binaire tétraédral de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Ses 7 classes de conjugaison sont

$$\{id, a^4 = -id, b, c, c^2, -c, -c^2\},$$

et sa table de caractères est la matrice donnée dans le Paragraphe 5.2.3.

Le caractère naturel de Γ est donné par

$$\begin{array}{llll} \chi_{i,0} & = & \chi(\phi_m^i) & = \omega_m^{-2i} + 2\omega_m^i \\ \chi_{i,1} & = & \chi(\phi_m^i \psi_4^2) & = \omega_m^{-2i} - 2\omega_m^i \\ \chi_{i,2} & = & \chi(\phi_m^i \tau) & = \omega_m^{-2i} \\ \chi_{i,3} & = & \chi(\phi_m^i \eta) & = \omega_m^{-2i} + \omega_m^i \end{array} \quad \begin{array}{llll} \chi_{i,4} & = & \chi(\phi_m^i \eta^2) & = \omega_m^{-2i} - \omega_m^i \\ \chi_{i,5} & = & \chi(\phi_m^i \psi_4^2 \eta) & = \omega_m^{-2i} - \omega_m^i \\ \chi_{i,6} & = & \chi(\phi_m^i \psi_4^2 \eta^2) & = \omega_m^{-2i} + \omega_m^i. \end{array}$$

Finalement, nous obtenons la série $P_\Gamma(t, u)$ (voir l'Annexe 2 pour le détail des calculs) : pour $p \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, nous avons

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_{7p} &= \frac{1}{24m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (f_{k,0} + f_{k,1} + 6f_{k,2} + 4f_{k,3} + 4f_{k,4} + 4f_{k,5} + 4f_{k,6}), \\ P_\Gamma(t, u)_{7p+1} &= \frac{1}{24m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (f_{k,0} + f_{k,1} + 6f_{k,2} + (4f_{k,3} + 4f_{k,5})j + (4f_{k,4} + 4f_{k,6})j^2), \\ P_\Gamma(t, u)_{7p+3} &= \frac{1}{24m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (2f_{k,0} - 2f_{k,1} + 4f_{k,3} - 4f_{k,4} - 4f_{k,5} + 4f_{k,6}), \\ P_\Gamma(t, u)_{7p+4} &= \frac{1}{24m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (2f_{k,0} - 2f_{k,1} + (4f_{k,3} - 4f_{k,5})j + (-4f_{k,4} + 4f_{k,6})j^2), \\ P_\Gamma(t, u)_{7p+6} &= \frac{1}{24m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (3f_{k,0} + 3f_{k,1} - 6f_{k,2}), \end{aligned}$$

et $P_\Gamma(t, u)_{7p+2}$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_{7p+5}$) est obtenu en échangeant j et j^2 dans $P_\Gamma(t, u)_{7p+1}$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_{7p+4}$).

4. L'autre cas — le type BTb — est $m \equiv 3 \pmod{6}$. Ce groupe n'est pas un produit direct.

Série BO — Groupes binaires octaédraux

Pour $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \wedge 6 = 1$, soient ψ_8 , τ , η , ϕ_{2m} les éléments

$$\psi_8 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_8 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_8^7 \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_8^7 & \omega_8^7 \\ 0 & \omega_8^5 & \omega_8 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2m} := \begin{pmatrix} \omega_{2m}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{2m} \end{pmatrix},$$

et considérons le sous-groupe $\Gamma = \langle \psi_8, \tau, \eta, \phi_{2m} \rangle$ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$. Notons que $\phi_{2m} = \psi_8^4 \phi_m^{-\frac{m-1}{2}}$, si bien que $\Gamma := \langle \psi_8, \tau, \eta, \phi_m \rangle$. Posons $\Gamma_1 := \langle \psi_8, \tau, \eta \rangle$ et $\Gamma_2 := \langle \phi_m \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Alors $\Gamma \simeq \Gamma_2 \times \Gamma_1$.

Avec les notations du sous-groupe binaire octaédral de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, ψ_8 (resp. τ , η) représente a (resp. b , c). $\Gamma_1 \simeq \langle a, b, c \rangle$ est le sous-groupe binaire octaédral de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Ses 8 classes de conjugaison sont

$$\{id, a^4 = -id, ab, b, c^2, c, a, a^3\},$$

et sa table de caractères est la matrice donnée dans le Paragraphe 5.2.3.

Le caractère naturel de Γ est donné par

$$\begin{array}{llll} \chi_{i,0} & = & \chi(\phi_m^i) & = \omega_m^{-2i} + 2\omega_m^i \\ \chi_{i,1} & = & \chi(\phi_m^i \psi_8^4) & = \omega_m^{-2i} - 2\omega_m^i \\ \chi_{i,2} & = & \chi(\phi_m^i \psi_8 \tau) & = \omega_m^{-2i} \\ \chi_{i,3} & = & \chi(\phi_m^i \tau) & = \omega_m^{-2i} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{llll} \chi_{i,4} & = & \chi(\phi_m^i \eta^2) & = \omega_m^{-2i} - \omega_m^i \\ \chi_{i,5} & = & \chi(\phi_m^i \eta) & = \omega_m^{-2i} + \omega_m^i \\ \chi_{i,6} & = & \chi(\phi_m^i \psi_8) & = \omega_m^{-2i} + \omega_m^i \sqrt{2} \\ \chi_{i,7} & = & \chi(\phi_m^i \psi_8^3) & = \omega_m^{-2i} - \omega_m^i \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Finalement, de la même façon que pour le type BTa , nous obtenons la série $P_\Gamma(t, u)$: pour $p \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, nous avons

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_{8p} &= \frac{1}{48m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (f_{k,0} + f_{k,1} + 12f_{k,2} + 6f_{k,3} + 8f_{k,4} + 8f_{k,5} + 6f_{k,6} + 6f_{k,7}), \\ P_\Gamma(t, u)_{8p+2} &= \frac{1}{48m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (2f_{k,0} + 2f_{k,1} + 12f_{k,3} - 8f_{k,4} - 8f_{k,5}), \\ P_\Gamma(t, u)_{8p+3} &= \frac{1}{48m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (2f_{k,0} - 2f_{k,1} - 8f_{k,4} + 8f_{k,5} + 6\sqrt{2}f_{k,6} - 6\sqrt{2}f_{k,7}), \\ P_\Gamma(t, u)_{8p+5} &= \frac{1}{48m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (3f_{k,0} + 3f_{k,1} - 12f_{k,2} - 6f_{k,3} + 6f_{k,6} + 6f_{k,7}), \\ P_\Gamma(t, u)_{8p+7} &= \frac{1}{48m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (4f_{k,0} - 4f_{k,1} + 8f_{k,4} - 8f_{k,5}), \end{aligned}$$

et $P_\Gamma(t, u)_{8p+1}$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_{8p+4}$, $P_\Gamma(t, u)_{8p+6}$) est obtenu en remplaçant $f_{k,2}$, $f_{k,6}$, $f_{k,7}$ par leur opposé dans $P_\Gamma(t, u)_{8p}$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_{8p+3}$, $P_\Gamma(t, u)_{8p+5}$).

Série BI — Groupes binaires icosaédraux

Pour $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \wedge 30 = 1$, soient ζ, τ, η les éléments

$$\zeta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_5^2 \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta := \frac{1}{\omega_5^2 - \omega_5^{-2}} \begin{pmatrix} \omega_5^2 - \omega_5^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_5 - \omega_5^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -\omega_5 - \omega_5^{-1} \end{pmatrix},$$

et considérons le sous-groupe $\Gamma = \langle \zeta, \tau, \eta, \phi_{2m} \rangle$ de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$.

Notons que $\phi_{2m} = \eta^2 \phi_m^{-\frac{m-1}{2}}$, si bien que $\Gamma := \langle \zeta, \tau, \eta, \phi_m \rangle$.

Posons $\Gamma_1 := \langle \zeta, \tau, \eta \rangle$ et $\Gamma_2 := \langle \phi_m \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Alors $\Gamma \simeq \Gamma_2 \times \Gamma_1$.

Avec les notations du sous-groupe binaire icosaédral de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, ζ (resp. τ, η) représente a (resp. b, c). $\Gamma_1 \simeq \langle a, b, c \rangle$ est le sous-groupe binaire icosaédral de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$. Ses 9 classes de conjugaison sont

$$\{id, b^2 = -id, a, a^2, a^3, a^4, abc, (abc)^2, b\},$$

et sa table de caractères est donnée dans le Paragraphe 5.2.3.

Le caractère naturel de Γ est donné par

$$\begin{array}{llll} \chi_{i,0} & = & \chi(\phi_m^i) & = \omega_m^{-2i} + 2\omega_m^i \\ \chi_{i,1} & = & \chi(\phi_m^i \tau^2) & = \omega_m^{-2i} - 2\omega_m^i \\ \chi_{i,2} & = & \chi(\phi_m^i \zeta) & = \omega_m^{-2i} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \omega_m^i \\ \chi_{i,3} & = & \chi(\phi_m^i \zeta^2) & = \omega_m^{-2i} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \omega_m^i \\ \chi_{i,4} & = & \chi(\phi_m^i \zeta^3) & = \omega_m^{-2i} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \omega_m^i \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{llll} \chi_{i,5} & = & \chi(\phi_m^i \zeta^4) & = \omega_m^{-2i} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \omega_m^i \\ \chi_{i,6} & = & \chi(\phi_m^i \zeta \tau \eta) & = \omega_m^{-2i} + \omega_m^i \\ \chi_{i,7} & = & \chi(\phi_m^i (\zeta \tau \eta)^2) & = \omega_m^{-2i} - \omega_m^i \\ \chi_{i,8} & = & \chi(\phi_m^i \tau) & = \omega_m^{-2i}. \end{array} \right.$$

Finalement, de la même façon que pour le type $B\tau a$, nous obtenons la série $P_\Gamma(t, u)$: pour $p \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, nous avons

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_{9p} &= \frac{1}{120m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (f_{k,0} + f_{k,1} + 12f_{k,2} + 12f_{k,3} + 12f_{k,4} + 12f_{k,5} \\ &\quad + 20f_{k,6} + 20f_{k,7} + 30f_{k,8}), \\ P_\Gamma(t, u)_{9p+1} &= \frac{1}{120m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (2f_{k,0} - 2f_{k,1} + (6 - 6\sqrt{5})f_{k,2} + (-6 - 6\sqrt{5})f_{k,3} \\ &\quad + (6 + 6\sqrt{5})f_{k,4} + (-6 + 6\sqrt{5})f_{k,5} + 20f_{k,6} - 20f_{k,7}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_\Gamma(t, u)_{9p+3} &= \frac{1}{120m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (3f_{k,0} + 3f_{k,1} + (6+6\sqrt{5})f_{k,2} + (6-6\sqrt{5})f_{k,3} \\
&\quad + (6-6\sqrt{5})f_{k,4} + (6+6\sqrt{5})f_{k,5} - 30f_{k,8}), \\
P_\Gamma(t, u)_{9p+5} &= \frac{1}{120m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (4f_{k,0} + 4f_{k,1} - 12f_{k,2} - 12f_{k,3} - 12f_{k,4} - 12f_{k,5} \\
&\quad + 20f_{k,6} + 20f_{k,7}), \\
P_\Gamma(t, u)_{9p+7} &= \frac{1}{120m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (5f_{k,0} + 5f_{k,1} - 20f_{k,6} - 20f_{k,7} + 30f_{k,8}), \\
P_\Gamma(t, u)_{9p+8} &= \frac{1}{120m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{pk} (6f_{k,0} - 6f_{k,1} - 12f_{k,2} + 12f_{k,3} - 12f_{k,4} + 12f_{k,5}),
\end{aligned}$$

$P_\Gamma(t, u)_{9p+4}$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_{9p+2}$) est obtenu en remplaçant $6\sqrt{5}$ par son opposé dans $P_\Gamma(t, u)_{9p+3}$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_{9p+1}$), et $P_\Gamma(t, u)_{9p+6}$ est obtenu en remplaçant $f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,4}, f_{k,6}$ par leur opposé dans $P_\Gamma(t, u)_{9p+5}$.

Décomposition de C_Γ et graphe pour les séries BTa, BO, BI

• Pour la série BTa (resp. BO, BI), nous posons $n = 7$ (resp. $n = 8, n = 9$). Nous explicitons maintenant la matrice $A^{(1)}$: $A^{(1)}$ est une matrice par blocs avec $m \times m$ blocs de taille $n \times n$.

▷ Si $m \geq 5$, alors les matrices $A^{(1)}$ et $C_\Gamma := 2I - A^{(1)} - {}^t A^{(1)}$ sont définies par

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & & I & & B_n \\ B_n & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & & I \\ I & & \ddots & \ddots & \\ & I & & B_n & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\Gamma = \begin{pmatrix} 2I & -B_n & -I & & -I & -B_n \\ -B_n & 2I & -B_n & -I & & -I \\ -I & -B_n & 2I & -B_n & -I & \\ & -I & -B_n & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -I & \ddots & \ddots & -B_n & -I \\ -I & & & \ddots & -B_n & 2I & -B_n \\ -B_n & -I & & & -I & -B_n & 2I \end{pmatrix},$$

avec

$$B_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Si $m = 1$, alors la matrice $A^{(1)}$ est $A^{(1)} := B_n + I$, et C_Γ est définie par

$$C_\Gamma := 2I - A^{(1)} - {}^t A^{(1)} + 2 \text{Diag}(A^{(1)}), \text{ i. e. } C_\Gamma = 2I - 2B_n.$$

• La décomposition de C_Γ est la suivante : pour $i_1 \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et $i_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, soit s_{i_1, i_2} la réflexion associée à la $(ni_1 + i_2)$ -ème racine. Alors l'ensemble \mathcal{S} peut se décomposer en p ensembles où $p \in \{2, 4, 5\}$.

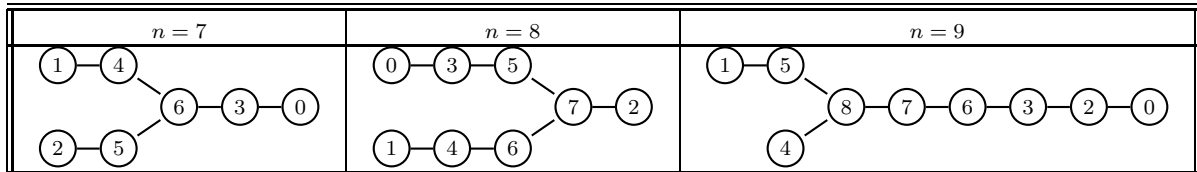
— Si $m \geq 5$, alors :

▷ Si $m \equiv 1 \pmod 3$, posons $S_l := \{s_{3k+l, i_2} / (k, i_2) \in \llbracket 0, \frac{m-1}{3} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ pour $l \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, et $S_3 := \{s_{m-1, i_2} / i_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. Alors $S = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$, $p = 4$, et $C_\Gamma = 4I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$.
 ▷ Si $m \equiv 2 \pmod 3$, posons $S_l := \{s_{3k+l, i_2} / (k, i_2) \in \llbracket 0, \frac{m-2}{3} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ pour $l \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, et $S_3 := \{s_{m-2, i_2} / i_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$, $S_4 := \{s_{m-1, i_2} / i_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. Alors $S = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 \sqcup S_4$, $p = 5$, et $C_\Gamma = 5I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4$.

— Si $m = 1$, alors $S = S_0 \sqcup S_1$, $p = 2$, et $C_\Gamma = 2I - \tau_0 - \tau_1$, avec

▷ Si $n = 7$, $S_0 := \{s_{0,0}, s_{0,1}, s_{0,2}, s_{0,6}\}$ et $S_1 := \{s_{0,3}, s_{0,4}, s_{0,5}\}$.
 ▷ Si $n = 8$, $S_0 := \{s_{0,0}, s_{0,1}, s_{0,2}, s_{0,5}, s_{0,6}\}$ et $S_1 := \{s_{0,3}, s_{0,4}, s_{0,7}\}$.
 ▷ Si $n = 9$, $S_0 := \{s_{0,0}, s_{0,3}, s_{0,4}, s_{0,5}, s_{0,7}\}$ et $S_1 := \{s_{0,1}, s_{0,2}, s_{0,6}, s_{0,8}\}$.

• Si $m = 1$, le graphe associé à Γ est le suivant :



Si $m \geq 5$, le graphe associé à Γ est un graphe de type $B\Gamma a$ (resp. BO, BI), semblable à celui du cas $m = 1$ ci-dessus, mais où tout sommet est remplacé par un m -gone.

5.4.3 Série C — Groupes triédraux

Soit $H \simeq \mathbb{Z}/j_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/j_2\mathbb{Z}$ un groupe de la série A , avec éventuellement $j_1 = 1$ ou $j_2 = 1$, et considérons la matrice $T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est la matrice de la permutation $(1, 2, 3)$ de

\mathfrak{S}_3 . Dans ce paragraphe, nous étudions $\Gamma := \langle H, T \rangle$, le sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ engendré par H et T (voir l'article [Ito94] pour des résultats sur la résolution des singularités triédrales). Le sous-groupe N de Γ , formé des matrices diagonales de Γ , est un sous-groupe normal de Γ . En utilisant le Théorème de Bezout, on obtient la description suivante de N :

$$N = \left\{ g_{k_1, k_2} := \begin{pmatrix} \omega_m^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_m^{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_m^{-k_1-k_2} \end{pmatrix} / (k_1, k_2) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2 \right\}. \quad (5.7)$$

De plus, nous avons $N \cap \langle T \rangle = \{id\}$ et $|N\langle T \rangle| = \frac{|N||\langle T \rangle|}{|N \cap \langle T \rangle|} = 3m^2 = |\Gamma|$. Ainsi, Γ est le produit semi-direct

$$\Gamma \simeq N \rtimes \langle T \rangle \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2 \rtimes \langle T \rangle.$$

Nous allons obtenir tous les caractères irréductibles de Γ par induction (voir [Rau00], et [Fer04]) : on a en effet la proposition

Proposition 5.4.4 ([Fer04])

Soit Γ un groupe fini tel que $\Gamma \simeq K \rtimes N$, où N est un sous-groupe abélien normal de Γ . Alors tous les caractères irréductibles de Γ sont les caractères de représentations induites par le sous-groupe abélien normal N .

Les classes de conjugaison de Γ diffèrent selon que m est divisible par 3 ou non. Nous distinguons donc deux cas correspondant aux deux paragraphes suivants.

Série C — m non divisible par 3

• Posons $n' := \frac{m^2-1}{3}$, de sorte que $|N| = 3n' + 1$ et $|G| = 3m^2 = 3(3n' + 1)$. Les classes de conjugaison de Γ sont :

Classe	id	T	T^{-1}	$g \in N \setminus \{id\} (n' \text{ classes})$
Cardinal	1	m^2	m^2	3

Pour tout élément $g_{k_1, k_2} \in N \setminus \{id\}$, la classe de conjugaison de g est l'ensemble

$$\{g_{k_1, k_2}, g_{k_2, -k_1-k_2}, g_{-k_1-k_2, k_1}\}.$$

En vue d'obtenir un transversal de $N \setminus \{id\}$, i. e. un ensemble contenant exactement un représentant de chaque classe de conjugaison de $N \setminus \{id\}$, nous représentons les éléments de $N \setminus \{id\}$ par des points (k_1, k_2) de $\llbracket 0, m-1 \rrbracket^2$.

Ainsi, nous cherchons un transversal pour l'ensemble des éléments de la forme

$$(k_1, k_2), (k_2, -k_1 - k_2 \pmod m) \text{ et } (-k_1 - k_2 \pmod m, k_1), \text{ avec } (k_1, k_2) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2.$$

Une solution est la suivante : pour une classe de conjugaison donnée, ses trois éléments sont sur les arêtes d'un triangle (voir la Figure 5.2), avec exactement un élément sur chaque arête du triangle. Nous pouvons donc prendre pour transversal l'ensemble des points qui appartiennent aux arêtes verticales privées du point le plus proche de la diagonale. De façon plus précise, un transversal pour $N \setminus \{id\}$ est l'ensemble E_{cc} défini par

$$\begin{aligned} & \{(0, k_2) / k_2 \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket 1, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor \rrbracket, k_2 \in \llbracket k_1, m-1-2k_1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket m - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, m-1 \rrbracket, k_2 \in \llbracket 2(m-k_1)+1, k_1 \rrbracket\}. \end{aligned}$$

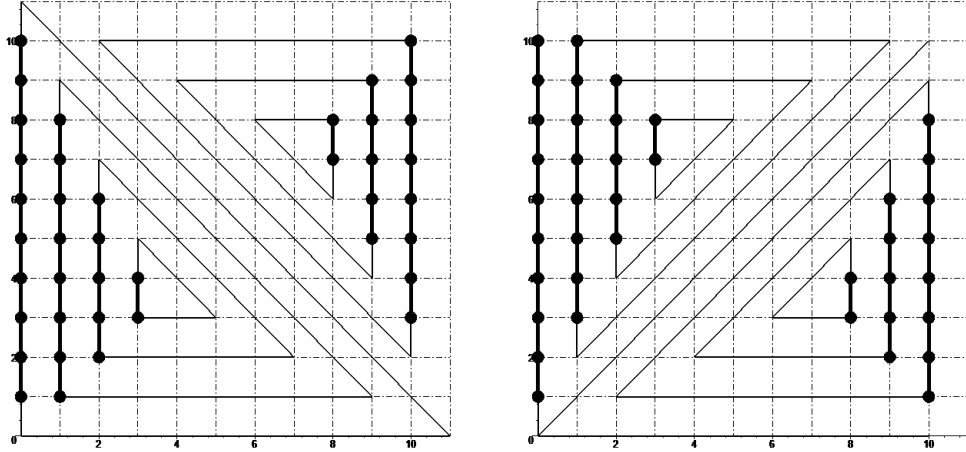


FIGURE 5.2 – Classes de conjugaison et caractères irréductibles pour $m = 11$.

Nous choisissons l'ordre lexicographique usuel sur E_{cc} , pour numérotier ses éléments :

$E_{cc} = \{c_1, c_2, \dots, c_{\frac{m^2-1}{3}}\}$, avec $c_i = (c_i^{(1)}, c_i^{(2)}) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2$.

• Le groupe Γ est engendré par $R := g_{1,0}$ et T , qui vérifient les relations $R^m = (RT)^3 = T^3 = id$. Comme m n'est pas divisible par 3, les caractères irréductibles de degré 1 sont les $\chi^{0,l}$ tels que $\chi^{0,l} : R \mapsto 1$ et $\chi^{0,l} : T \mapsto j^l$ pour $l \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Nous avons $[G : N] = 3$ avec N abélien, ainsi les degrés possibles des caractères irréductibles sont 1, 2, 3.

Comme $N \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$, les caractères irréductibles de N sont les éléments

$$\widetilde{\chi_{l_1, l_2}} : g_{k_1, k_2} \mapsto \omega_m^{k_1 l_1 + k_2 l_2},$$

avec $(l_1, l_2) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. On considère la représentation de Γ induite par la représentation associée au caractère $\widetilde{\chi_{l_1, l_2}}$, et on note χ_{l_1, l_2} son caractère.

Rappelons que $\Gamma = N \sqcup TN \sqcup T^2N$, la dimension de la représentation induite est donc 3.

Soit $V := \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$, l'espace de cette représentation, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{C}^3 . Alors on a

$$T \cdot e_1 = e_2, \quad T^2 \cdot e_1 = e_3, \quad T \cdot e_2 = e_3, \quad T \cdot e_3 = e_1,$$

et si $g \in N$,

$$g \cdot e_1 = \omega_m^{k_1 l_1 + k_2 l_2} e_1, \quad g \cdot e_2 = gT \cdot e_1 = T \cdot \omega_m^{(-k_1 - k_2)l_1 + k_1 l_2} e_1 = \omega_m^{(-k_1 - k_2)l_1 + k_1 l_2} e_2,$$

$$g \cdot e_3 = gT \cdot e_1 = gT^{-1} \cdot e_1 = T^2 \omega_m^{k_2 l_1 + (-k_1 - k_2) l_2} e_3.$$

D'où les matrices dans la base (e_1, e_2, e_3)

$$Mat(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Mat(g) = \begin{pmatrix} \omega_m^{k_1 l_1 + k_2 l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_m^{(-k_1 - k_2) l_1 + k_1 l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_m^{k_2 l_1 + (-k_1 - k_2) l_2} \end{pmatrix}.$$

Les caractères irréductibles χ_{l_1, l_2} induits par les caractères irréductibles de N sont alors donnés par

Classe	$[id]$	$[T]$	$[T^{-1}]$	$[g], g \in N \setminus \{id\}$
Valeur	3	0	0	$\omega_m^{k_1 l_1 + k_2 l_2} + \omega_m^{(-k_1 - k_2) l_1 + k_1 l_2} + \omega_m^{k_2 l_1 + (-k_1 - k_2) l_2}$

Les caractères χ_{l_1, l_2} avec $(l_1, l_2) \neq (0, 0)$ sont représentés par des points (l_1, l_2) de $\llbracket 0, m-1 \rrbracket^2$. Les points associés au même caractère sont sur un triangle ou sur un trident “ $\mathbf{\text{L}}$ ”, avec exactement un point sur chaque arête (voir la Figure 5.2). Ainsi, l'ensemble des caractères irréductibles χ_{l_1, l_2} avec $(l_1, l_2) \neq (0, 0)$ est obtenu en prenant l'ensemble suivant E_{ic} d'indices :

$$\begin{aligned} & \{(0, k_2) / k_2 \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket 1, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor \rrbracket, k_2 \in \llbracket 2k_1 + 1, m - k_1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket m - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, m-1 \rrbracket, k_2 \in \llbracket m - k_1, 2k_1 - m - 1 \rrbracket\}. \end{aligned}$$

Comme pour E_{cc} , nous choisissons l'ordre lexicographique usuel pour numérotter les éléments de $E_{ic} = \{d_1, d_2, \dots, d_{\frac{m^2-1}{3}}\}$, avec $d_i = (d_i^{(1)}, d_i^{(2)}) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2$. La table de caractères T_Γ est

$$T_\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & j & j^2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & j^2 & j & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 3 & 0 & 0 & & & \end{array} \right),$$

où le terme général de $C \in \mathbf{M}_{\frac{m^2-1}{3}}\mathbb{C}$ est

$$c_{i,j} := \omega_m^{c_j^{(1)} d_i^{(1)} + c_j^{(2)} d_i^{(2)}} + \omega_m^{(-c_j^{(1)} - c_j^{(2)}) d_i^{(1)} + c_j^{(1)} d_i^{(2)}} + \omega_m^{c_j^{(2)} d_i^{(1)} + (-c_j^{(1)} - c_j^{(2)}) d_i^{(2)}}, \quad (i, j) \in \llbracket 1, \frac{m^2-1}{3} \rrbracket^2.$$

- Les valeurs du caractère naturel χ de Γ sont

Classe	$[id]$	$[T]$	$[T^{-1}]$	$[g], g \in N \setminus \{id\}$
Valeur	3	0	0	$\omega_m^{k_1} + \omega_m^{k_2} + \omega_m^{-k_1 - k_2}$

Donc la matrice diagonale $\Delta(t, u)$ est $Diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \widetilde{\Delta(t, u)})$, avec

$$\varepsilon_1 := f(3, 3), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 := f(0, 0),$$

et le terme général de $\widetilde{\Delta(t, u)} \in \mathbf{M}_{\frac{m^2-1}{3}} \mathbb{C}$ est

$$\gamma_j := f \left(\omega_m^{-c_j^{(1)}} + \omega_m^{-c_j^{(2)}} + \omega_m^{c_j^{(1)}+c_j^{(2)}}, \omega_m^{c_j^{(1)}} + \omega_m^{c_j^{(2)}} + \omega_m^{-c_j^{(1)}-c_j^{(2)}} \right), \quad j \in \llbracket 1, \frac{m^2-1}{3} \rrbracket.$$

Alors, en posant

$$\Sigma := \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p, \quad \Sigma_i := \sum_{j=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_j \left(\omega_m^{c_j^{(1)}d_i^{(1)}+c_j^{(2)}d_i^{(2)}} + \omega_m^{(-c_j^{(1)}-c_j^{(2)})d_i^{(1)}+c_j^{(1)}d_i^{(2)}} + \omega_m^{c_j^{(2)}d_i^{(1)}+(-c_j^{(1)}-c_j^{(2)})d_i^{(2)}} \right),$$

nous obtenons la formule pour $P_\Gamma(t, u)$ (le détail des calculs est dans l'Annexe 2) :

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_0 &= \frac{5(m+1)(m-1)+1}{9m^4} (3\Sigma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \frac{2(m+1)(m-1)}{9m^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ &\quad + \frac{2(m+1)(m-1)}{3m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p c_{p,q} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_1 &= \frac{5(m+1)(m-1)+1}{9m^4} (3\Sigma + \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + j^2\varepsilon_3) - \frac{2(m+1)(m-1)}{9m^2} (\varepsilon_1 - j\varepsilon_2 - j^2\varepsilon_3) \\ &\quad + \frac{2(m+1)(m-1)}{3m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \left(\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + j^2\varepsilon_3 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p c_{p,q} \right), \end{aligned}$$

et $P_\Gamma(t, u)_2$ est obtenu en échangeant j et j^2 dans $P_\Gamma(t, u)_1$, et pour $i \in \llbracket 1, \frac{m^2-1}{3} \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_{i+2} &= \frac{5(m+1)(m-1)+1}{9m^4} (3\Sigma_i + 3\varepsilon_1) - \frac{6(m+1)(m-1)}{9m^2} \varepsilon_1 \\ &\quad + \frac{2(m+1)(m-1)}{3m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \left(3\varepsilon_1 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p c_{i,p} c_{p,q} \right). \end{aligned}$$

Série C — m divisible par 3

• Posons $n' := \frac{m^2}{3}$, de sorte que $|N| = 3n'$ et $|G| = 3m^2 = 3(3n')$.

Posons $a := R^{\frac{m}{3}} = \text{Diag}(j, j, j)$. Les classes de conjugaison de Γ sont :

Classe	id	a	a^2	T	T^{-1}	RT	RT^{-1}	R^2T	R^2T^{-1}	$g \in N \setminus \{id, a, a^2\} (n' - 1 \text{ cl.})$
Cardinal	1	1	1	$\frac{m^2}{3}$	$\frac{m^2}{3}$	$\frac{m^2}{3}$	$\frac{m^2}{3}$	$\frac{m^2}{3}$	$\frac{m^2}{3}$	3

Pour tout élément $g_{k_1, k_2} \in N \setminus \{id, a, a^2\}$, la classe de conjugaison de g est l'ensemble

$$\{g_{k_1, k_2}, g_{k_2, -k_1 - k_2}, g_{-k_1 - k_2, k_1}\}.$$

Ses trois éléments sont sur les arêtes d'un triangle, avec exactement un élément sur chaque arête du triangle. Ainsi, un transversal de $N \setminus \{id, a, a^2\}$ a la même forme que dans le cas où 3 ne divise pas m , i. e. un transversal de $N \setminus \{id, a, a^2\}$ est l'ensemble E_{cc} défini par

$$\begin{aligned} & \{(0, k_2) / k_2 \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket 1, \frac{m}{3}-1 \rrbracket, k_2 \in \llbracket k_1, m-1-2k_1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket m-\frac{m}{3}+1, m-1 \rrbracket, k_2 \in \llbracket 2(m-k_1)+1, k_1 \rrbracket\}. \end{aligned}$$

• Comme m est divisible par 3, les caractères irréductibles de degré 1 de Γ sont, pour (k, l) appartenant à $\llbracket 0, 2 \rrbracket^2$, les neuf éléments

$$\begin{aligned} \chi^{k,l} : R &\mapsto j^k \\ T &\mapsto j^l. \end{aligned}$$

Comme pour le cas où m n'est pas divisible par 3, l'ensemble des caractères irréductibles χ_{l_1, l_2} , avec $(l_1, l_2) \neq (0, 0)$, est obtenu en prenant l'ensemble suivant E_{ic} d'indices :

$$\begin{aligned} & \{(0, k_2) / k_2 \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket 1, \frac{m}{3}-1 \rrbracket, k_2 \in \llbracket 2k_1+1, m-k_1 \rrbracket\} \\ \sqcup & \{(k_1, k_2) / k_1 \in \llbracket m-\frac{m}{3}+1, m-1 \rrbracket, k_2 \in \llbracket m-k_1, 2k_1-m-1 \rrbracket\}. \end{aligned}$$

Nous choisissons l'ordre lexicographique usuel sur E_{cc} et E_{ic} pour numéroter leurs éléments :

$$E_{cc} = \{c_1, c_2, \dots, c_{\frac{m^2}{3}-1}\}, \quad E_{ic} = \{d_1, d_2, \dots, d_{\frac{m^2}{3}-1}\},$$

avec $c_j = (c_j^{(1)}, c_j^{(2)}) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2$, et $d_i = (d_i^{(1)}, d_i^{(2)}) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2$, et nous en déduisons la table de caractères T_Γ de Γ :

$$T_\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & j & j^2 & j & j^2 & j & j^2 & \\ 1 & 1 & 1 & j^2 & j & j^2 & j & j^2 & j & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & j & j & j^2 & j^2 & j^{c_i^{(1)}-c_i^{(2)}} \\ 1 & 1 & 1 & j & j^2 & j^2 & 1 & 1 & j & \\ 1 & 1 & 1 & j^2 & j & 1 & j^2 & j & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & j^2 & j^2 & j & j & j^{2(c_i^{(1)}-c_i^{(2)})} \\ 1 & 1 & 1 & j & j^2 & 1 & j & j^2 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & j^2 & j & j & 1 & 1 & j^2 & \\ \hline 3 & J_1^{(1)} & J_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 3 & J_{\frac{m^2}{3}-1}^{(1)} & J_{\frac{m^2}{3}-1}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right),$$

où $C \in \mathbf{M}_{\frac{m^2}{3}-1}\mathbb{C}$ est une matrice par blocs de terme général

$$c_{i,j} := \omega_m^{c_j^{(1)}d_i^{(1)}+c_j^{(2)}d_i^{(2)}} + \omega_m^{(-c_j^{(1)}-c_j^{(2)})d_i^{(1)}+c_j^{(1)}d_i^{(2)}} + \omega_m^{c_j^{(2)}d_i^{(1)}+(-c_j^{(1)}-c_j^{(2)})d_i^{(2)}}, \quad (i, j) \in \llbracket 1, \frac{m^2}{3}-1 \rrbracket^2,$$

$$J_i^{(1)} := j^{d_i^{(1)}+d_i^{(2)}} + j^{-2d_i^{(1)}+d_i^{(2)}} + j^{d_i^{(1)}-2d_i^{(2)}},$$

$$J_i^{(2)} := j^{2d_i^{(1)}+2d_i^{(2)}} + j^{-d_i^{(1)}+2d_i^{(2)}} + j^{2d_i^{(1)}-d_i^{(2)}}, \quad i \in \llbracket 1, \frac{m^2}{3} - 1 \rrbracket^2.$$

- Les valeurs du caractère naturel χ de Γ sont

Classe	id	a	a^2	T	T^{-1}	RT	RT^{-1}	R^2T	R^2T^{-1}	$g \in N \setminus \{id, a, a^2\}$
Valeur	3	$3j$	$3j^2$	0	0	0	0	0	0	$\omega_m^{k_1} + \omega_m^{k_2} + \omega_m^{-k_1-k_2}$

Donc la matrice diagonale $\Delta(t, u)$ est $Diag(\widetilde{\Delta(t, u)}, \widetilde{\Delta(t, u)})$, avec

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta(t, u)} &= Diag(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \underbrace{\beta_4, \dots, \beta_4}_{6 \text{ termes}}) \\ &= Diag\left(f(3, 3), f(3j^2, 3j), f(3j, 3j^2), \underbrace{f(0, 0), \dots, f(0, 0)}_{6 \text{ termes}}\right), \end{aligned}$$

et le terme général de $\widetilde{\Delta(t, u)} \in \mathbf{M}_{\frac{m^2}{3}-1} \mathbb{C}$ est

$$\gamma_j := f\left(\omega_m^{-c_j^{(1)}} + \omega_m^{-c_j^{(2)}} + \omega_m^{c_j^{(1)}+c_j^{(2)}}, \omega_m^{c_j^{(1)}} + \omega_m^{c_j^{(2)}} + \omega_m^{-c_j^{(1)}-c_j^{(2)}}\right), \quad j \in \llbracket 1, \frac{m^2}{3} - 1 \rrbracket.$$

Pour $(i, r) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$, et $(s, q) \in \{1, 2\} \times \llbracket 1, \frac{m^2}{3} - 1 \rrbracket$, définissons

$$\begin{aligned} \Sigma^{(r)} &:= \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p j^{(r-1)(c_p^{(1)}-c_p^{(1)})}, \quad \Phi^{(i,r)} := \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} J_p^{(i)} \gamma_p j^{(r-1)(c_p^{(1)}-c_p^{(1)})}, \\ \Sigma_q^{(s)} &:= \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} J_p^{(s)} \gamma_p \left(\omega_m^{c_p^{(1)}d_q^{(1)}+c_p^{(2)}d_q^{(2)}} + \omega_m^{(-c_p^{(1)}-c_p^{(2)})d_q^{(1)}+c_p^{(1)}d_q^{(2)}} + \omega_m^{c_p^{(2)}d_q^{(1)}+(-c_p^{(1)}-c_p^{(2)})d_q^{(2)}} \right), \\ \xi &:= \left(\underbrace{-1, -1, 2}_1, \underbrace{-1, -1, 2}_2, \underbrace{-1, -1, 2}_3, \dots, \underbrace{-1, -1, 2}_{\frac{m}{3}(\frac{m}{3}+1)-1}, -1, -1, \underbrace{-1, -1, 2}_{\frac{m}{3}(\frac{m}{3}+1)-1}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{-1, -1, 2}_{\frac{m}{3}(\frac{m}{3}+1)-1}, \dots, \underbrace{-1, -1, 2}_{\frac{m}{3}(\frac{m}{3}+1)-1} \right). \end{aligned}$$

Alors, nous pouvons donner l'expression de la série $P_\Gamma(t, u)$ (les calculs détaillés se trouvent dans l'Annexe 2) :

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_0 &= \frac{3(5(\frac{m}{3})^2 - 1) + 1}{3m^4} (3\Sigma^{(1)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 6\beta_4) \\ &\quad + \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4} (\Phi^{(11)} + \Phi^{(21)} + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 12\beta_4) \\ &\quad + \frac{3(\frac{m}{3})^2 - 1}{m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \xi_q \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 3j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + 3j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p c_{p,q} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_\Gamma(t, u)_1 &= \frac{3(5(\frac{m}{3})^2 - 1) + 1}{3m^4} (3\Sigma^{(1)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3\beta_4) \\
&\quad + \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4} (\Phi^{(11)} + \Phi^{(21)} + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 - 6\beta_4) \\
&\quad + \frac{3(\frac{m}{3})^2 - 1}{m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \xi_q \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2j + j^2) j^{c_q^{(1)} - c_q^{(2)}} \beta_4 \right. \\
&\quad \left. + (2j^2 + j) j^{2(c_q^{(1)} - c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p c_{p,q} \right), \\
P_\Gamma(t, u)_3 &= \frac{3(5(\frac{m}{3})^2 - 1) + 1}{3m^4} (3\Sigma^{(2)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4} (\Phi^{(12)} + \Phi^{(22)} + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3) \\
&\quad + \frac{3(\frac{m}{3})^2 - 1}{m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \xi_q \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2 + j) j^{c_q^{(1)} - c_q^{(2)}} \beta_4 \right. \\
&\quad \left. + (2j^2 + j) j^{2(c_q^{(1)} - c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p j^{c_p^{(1)} - c_p^{(2)}} c_{p,q} \right), \\
P_\Gamma(t, u)_5 &= \frac{3(5(\frac{m}{3})^2 - 1) + 1}{3m^4} (3\Sigma^{(2)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\
&\quad + \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4} (\Phi^{(12)} + \Phi^{(22)} + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3) \\
&\quad + \frac{3(\frac{m}{3})^2 - 1}{m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \xi_q \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p j^{c_p^{(1)} - c_p^{(2)}} c_{p,q} \right), \\
P_\Gamma(t, u)_6 &= \frac{3(5(\frac{m}{3})^2 - 1) + 1}{3m^4} (3\Sigma^{(3)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4} (\Phi^{(13)} + \Phi^{(23)} + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3) \\
&\quad + \frac{3(\frac{m}{3})^2 - 1}{m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \xi_q \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2 + j^2) j^{c_q^{(1)} - c_q^{(2)}} \beta_4 + (2j + j^2) j^{2(c_q^{(1)} - c_q^{(2)})} \beta_4 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p j^{2(c_p^{(1)} - c_p^{(2)})} c_{p,q} \right),
\end{aligned}$$

et $P_\Gamma(t, u)_2$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_4, P_\Gamma(t, u)_8$) est obtenu en échangeant les coefficients $2j + j^2$ et $2j^2 + j$ (resp. $2 + j$ et $2j^2 + j$, $2 + j^2$ et $2j + j^2$) dans $P_\Gamma(t, u)_1$ (resp. $P_\Gamma(t, u)_3, P_\Gamma(t, u)_6$); $P_\Gamma(t, u)_7$ est obtenu en remplaçant $\Phi^{(1i)}$ par $\Phi^{(2i)}$ et $j^{c_p^{(1)} - c_p^{(2)}}$ par $j^{2(c_p^{(1)} - c_p^{(2)})}$ dans $P_\Gamma(t, u)_5$.

Finalement, pour $i \in \llbracket 1, \frac{m^2}{3} - 1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}
P_\Gamma(t, u)_{i+8} &= \frac{3(5(\frac{m}{3})^2 - 1) + 1}{3m^4} (3\beta_1 + J_i^{(1)}\beta_2 + J_i^{(2)}\beta_3 + 3\Sigma_i) \\
&\quad + \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4} (6\beta_1 + 2J_i^{(1)}\beta_2 + 2J_i^{(2)}\beta_3 + \widetilde{\Sigma_i^{(1)}} + \widetilde{\Sigma_i^{(2)}}) \\
&\quad + \frac{3(\frac{m}{3})^2 - 1}{m^4} \sum_{q=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \xi_q \left(3\beta_1 + J_i^{(1)}\beta_2 + J_i^{(2)}\beta_3 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p c_{i,p} c_{p,q} \right).
\end{aligned}$$

Décomposition de C_Γ

Nous explicitons maintenant la matrice $A^{(1)}$: elle garde presque la même forme, que m soit divisible par 3 ou non. La seule différence vient de ce que, dans le cas où m est divisible par 3, il y a 9 caractères irréductibles de degré 1 au lieu de 3.

Posons $\kappa_m := \frac{m}{3} - 1$ si 3 divise m , et $\kappa_m := \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$ sinon. De même, posons $\nu_m = 9$ si 3 divise m , et $\nu_m = 3$ sinon. La matrice $A^{(1)}$ est une matrice par blocs avec $(2 + 2\kappa_m) \times (2 + 2\kappa_m)$ blocs (si $m = 16$, voir, page suivante, les matrices $A^{(1)}$ et C_Γ de taille 88 de la Figure 5.3).

$$\left(\begin{array}{c|cc} & C_{-1,0} & C_{-1,\kappa_m} & C_{-1,\kappa_m+1} \\ \hline C_{0,-1} & \begin{array}{ccc} D_0 & A_0^1 & \\ B_1^0 & D_1 & A_1^2 \\ & B_2^1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & A_{\kappa_m-1}^{\kappa_m} \\ & & & B_{\kappa_m}^{\kappa_m-1} & D_{\kappa_m} \end{array} & & C_{0,m-1} \\ \hline C_{\kappa_m,-1} & & & \\ C_{\kappa_m+1,-1} & & & \begin{array}{ccc} D_{m-\kappa_m} & A_{m-\kappa_m}^{m-\kappa_m+1} & \\ B_{m-\kappa_m+1}^{m-\kappa_m} & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & A_{m-2}^{m-1} \\ & & B_{m-1}^{m-2} & D_{m-1} \end{array} \\ \hline & C_{m-1,0} & & \end{array} \right).$$

La taille des blocs D_i , A_i^j , B_i^j , $C_{i,j}$ est donnée dans le tableau suivant :

Bloc	D_0	D_i , $i \in \llbracket 1, \kappa_m \rrbracket$	D_i , $i \in \llbracket m - \kappa_m, m - 1 \rrbracket$	$A_i^j, B_i^j, C_{i,j}$, $(i, j) \in \llbracket 1, \kappa_m \rrbracket^2$	$A_i^j, B_i^j, C_{i,j}$, $(i, j) \in \llbracket m - \kappa_m, m - 1 \rrbracket^2$
Taille	$(m-1)^2$	$(m-3i)^2$	$(3i-2m)^2$	$(m-3i) \times (m-3j)$	$(3i-2m) \times (3j-2m)$

Bloc	$C_{-1,0}$	$C_{0,-1}$	$C_{-1,\kappa_m}, C_{-1,\kappa_m+1}$	$C_{\kappa_m,-1}, C_{\kappa_m+1,-1}$
Taille	$\nu_m \times (m-1)$	$(m-1) \times \nu_m$	$\nu_m \times (m-3\kappa_m)$	$(m-3\kappa_m) \times \nu_m$

- Si $m = 2$, alors $A^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3,3} & \mathbf{1}_{3,1} \\ \mathbf{1}_{1,3} & 2 \end{pmatrix}$, et $C_\Gamma = 3I - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2$, avec $\tau_0 := s_0 s_2$, $\tau_1 := s_1$, $\tau_2 := s_3$.
- Si $m = 3$, alors $A^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{9,9} & \mathbf{1}_{9,2} \\ \mathbf{1}_{2,9} & \tilde{A} \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, et $C_\Gamma = 2I - (s_0 s_1 \dots s_9) - (s_{10} s_{11})$.
- Nous supposons maintenant que $m \geq 4$. Pour $i_1 \in \{0\} \cup \llbracket 1, \kappa_m \rrbracket \cup \llbracket m - \kappa_m, m - 1 \rrbracket$, nous définissons l'ensemble \widetilde{S}_{i_1} par :

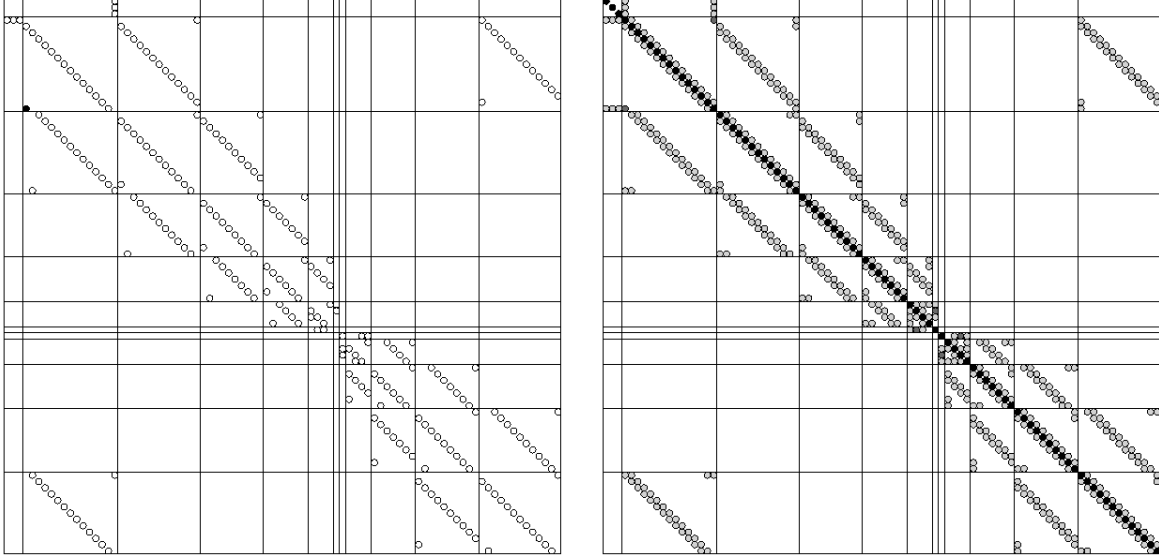
$$\widetilde{S}_{i_1} := \begin{cases} \{s_{0,i_2} / i_2 \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket\} & \text{si } i_1 = 0, \\ \{s_{i_1,i_2} / i_2 \in \llbracket i_1, m-1-2i_1 \rrbracket\} & \text{si } i_1 \in \llbracket 1, \kappa_m \rrbracket, \\ \{s_{i_1,i_2} / i_2 \in \llbracket 2(m-i_1)+1, i_1 \rrbracket\} & \text{si } i_1 \in \llbracket m - \kappa_m, m - 1 \rrbracket. \end{cases}$$

Alors, nous distinguons deux cas :

▷ Si κ_m est impair, nous posons $\widehat{I}_0 := \{0, 2, 4, \dots, \kappa_m - 1, m - \kappa_m, m - \kappa_m + 2, \dots, m - 3\}$,

$$\widehat{I}_1 := \{1, 3, 5, \dots, \kappa_m, m - \kappa_m + 1, m - \kappa_m + 3, \dots, m - 2\}, \widehat{I}_2 := \{m - 1\}.$$

▷ Si κ_m est pair, nous posons $\widehat{I}_0 := \{0, 2, 4, \dots, \kappa_m, m - \kappa_m + 1, m - \kappa_m + 3, \dots, m - 3\}$,

FIGURE 5.3 – Matrices $A^{(1)}$ et C_Γ pour $m = 16$.

$$\widehat{I}_1 := \{1, 3, 5, \dots, \kappa_m - 1, m - \kappa_m, m - \kappa_m + 2, \dots, m - 2\}, \widehat{I}_2 := \{m - 1\}.$$

Alors, les racines associées aux réflexions des différents \widetilde{S}_{i_1} pour i_1 appartenant à un même \widehat{I}_k sont orthogonales.

Maintenant, nous décomposons chaque \widetilde{S}_{i_1} , i. e. $\widetilde{S}_{i_1} = \widehat{S}_{i_1,0} \sqcup \dots \sqcup \widehat{S}_{i_1,q-1}$, de sorte que q appartienne à $\{1, 2, 3\}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, q - 1 \rrbracket$, les racines associées aux réflexions appartenant à $\widehat{S}_{i_1,k}$ sont orthogonales :

▷ Si $i_1 = 0$, alors

◊ Si $m - 1$ est impair, alors $\widetilde{S}_0 = \widehat{S}_{0,0} \sqcup \widehat{S}_{0,1} \sqcup \widehat{S}_{0,2}$, avec

$$\widehat{S}_{0,0} = \{s_{0,1}, s_{0,3}, \dots, s_{0,m-3}\}, \widehat{S}_{0,1} = \{s_{0,2}, s_{0,4}, \dots, s_{0,m-2}\}, \widehat{S}_{0,2} = \{s_{0,m-1}\}.$$

◊ Si $m - 1$ est pair, alors $\widetilde{S}_0 = \widehat{S}_{0,0} \sqcup \widehat{S}_{0,1}$, avec

$$\widehat{S}_{0,0} = \{s_{0,1}, s_{0,3}, \dots, s_{0,m-2}\}, \widehat{S}_{0,1} = \{s_{0,2}, s_{0,4}, \dots, s_{0,m-1}\}.$$

▷ Si $i_1 \in \llbracket 1, \kappa_m \rrbracket$, alors nous avons $\widetilde{S}_{i_1} = \widehat{S}_{i_1,0} \sqcup \widehat{S}_{i_1,1} \sqcup \widehat{S}_{i_1,2}$, avec :

◊ Si $m - 3i_1$ est impair, alors $\widehat{S}_{i_1,0} = \{s_{i_1,i_1}, s_{i_1,i_1+2}, \dots, s_{i_1,m-2i_1-3}\},$

$$\widehat{S}_{i_1,1} = \{s_{i_1,i_1+1}, s_{i_1,i_1+3}, \dots, s_{i_1,m-2i_1-2}\}, \widehat{S}_{i_1,2} = \{s_{i_1,m-2i_1-1}\}.$$

◊ Si $m - 3i_1$ est pair, alors $\widehat{S}_{i_1,0} = \{s_{i_1,i_1}, s_{i_1,i_1+2}, \dots, s_{i_1,m-2i_1-4}\},$

$$\widehat{S}_{i_1,1} = \{s_{i_1,i_1+1}, s_{i_1,i_1+3}, \dots, s_{i_1,m-2i_1-1}\}, \widehat{S}_{i_1,2} = \{s_{i_1,m-2i_1-2}\}.$$

▷ Si $i_1 \in \llbracket m - \kappa_m, m - 1 \rrbracket$, alors nous avons $\widetilde{S}_{i_1} = \widehat{S}_{i_1,0} \sqcup \widehat{S}_{i_1,1} \sqcup \widehat{S}_{i_1,2}$, avec :

◇ Si $3i_1 - 2m$ est impair, alors $\widehat{S_{i_1,0}} = \{s_{i_1,2(m-i_1)+1}, s_{i_1,2(m-i_1)+3}, \dots, s_{i_1,i_1-2}\},$

$$\widehat{S_{i_1,1}} = \{s_{i_1,2(m-i_1)+2}, s_{i_1,2(m-i_1)+4}, \dots, s_{i_1,i_1-1}\}, \quad \widehat{S_{i_1,2}} = \{s_{i_1,i_1}\}.$$

◇ Si $3i_1 - 2m$ est pair, alors $\widehat{S_{i_1,0}} = \{s_{i_1,2(m-i_1)+1}, s_{i_1,2(m-i_1)+3}, \dots, s_{i_1,i_1-1}\},$

$$\widehat{S_{i_1,1}} = \{s_{i_1,2(m-i_1)+2}, s_{i_1,2(m-i_1)+4}, \dots, s_{i_1,i_1-2}\}, \quad \widehat{S_{i_1,2}} = \{s_{i_1,i_1}\}.$$

Notons que certains ensembles $\widehat{S_{i_1,k}}$ peuvent être vides pour $k \in \{1, 2\}$.

Finalement, nous posons $S_{k,l} := \prod_{i_1 \in \widehat{I}_k} \widehat{S_{i_1,l}}$, pour $(k, l) \in \{0, 1, 2\}^2 \setminus \{(2, 2)\}$,

et $S_{2,2} := \left(\prod_{i_1 \in \widehat{I}_2} \widehat{S_{i_1,2}} \right) \sqcup \{s_{-1,0}, \dots, s_{-1,r}\}$, avec $r = 8$ si 3 divise m , et $r = 2$ sinon.

Notons $p \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ le nombre d'ensembles $S_{k,l}$ non vides, et $\tau_{k,l}$ le produit commutatif des réflexions de $S_{k,l}$. Alors, $C_\Gamma = pI - \sum_{(k,l) \in \{0,1,2\}^2} \tau_{k,l}$.

Exemple 5.4.5

Pour $m = 16$, nous avons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{0,0} &= (s_{0,1}s_{0,3} \dots s_{0,13})(s_{2,2}s_{2,4} \dots s_{2,8})(s_{4,4})(s_{11,11})(s_{13,7}s_{13,9}s_{13,11}) \\ \tau_{0,1} &= (s_{0,2}s_{0,4} \dots s_{0,14})(s_{2,3}s_{2,5} \dots s_{2,11})(s_{4,5}s_{4,7})(s_{13,8}s_{13,10}s_{13,12}) \\ \tau_{0,2} &= (s_{0,15})(s_{2,10})(s_{4,6})(s_{13,13}) \\ \tau_{1,0} &= (s_{1,1}s_{1,3} \dots s_{1,11})(s_{3,3}s_{3,5}s_{3,7})(s_{5,5})(s_{12,9}s_{12,11})(s_{14,5}s_{14,7} \dots s_{14,13}) \\ \tau_{1,1} &= (s_{1,2}s_{1,4} \dots s_{1,12})(s_{3,4}s_{3,6}s_{3,8})(s_{12,10})(s_{14,6}s_{14,8} \dots s_{14,12}) \\ \tau_{1,2} &= (s_{1,13})(s_{3,9})(s_{12,12})(s_{14,14}) \\ \tau_{2,0} &= (s_{15,3}s_{15,5} \dots s_{15,13}) \\ \tau_{2,1} &= (s_{15,4}s_{15,6} \dots s_{15,14}) \\ \tau_{2,2} &= (s_{15,15})(s_{-1,0}s_{-1,1}s_{-1,2}). \end{aligned}$$

5.4.4 Série D

Un groupe de type D est engendré par un groupe de type C et une matrice

$$Q := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

avec $abc = -1$. Ce groupe n'est pas un produit direct. Nous nous contentons de donner un exemple.

Exemple 5.4.6

Considérons le groupe

$$\Gamma := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ce groupe est isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_4 , ainsi Γ a 5 classes de conjugaison.
La série $P_\Gamma(t, u)$ vérifie

$$\forall i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, P_\Gamma(t, u)_i = (1 - tu) \frac{N(t, u)_i}{D(t)D(u)},$$

avec $D(t) = (t - 1)^3(t^2 + t + 1)(t^2 + 1)(t + 1)^2$, et

$$\begin{aligned} N(t, u)_0 &= t^6u^6 + t^5u^5 - t^6u^3 - t^3u^6 + t^5u^3 + 2t^4u^4 + t^3u^5 + t^4u^3 + t^3u^4 + t^6 + t^5u + 2t^4u^2 \\ &\quad + 4t^3u^3 + 2t^2u^4 + tu^5 + u^6 + t^3u^2 + t^2u^3 + t^3u + 2t^2u^2 + tu^3 - t^3 - u^3 + tu + 1, \\ N(t, u)_1 &= t^6u^3 + t^5u^4 + t^4u^5 + t^3u^6 + t^5u^3 + t^4u^4 + t^3u^5 + t^5u^2 + t^4u^3 + t^3u^4 + t^2u^5 + t^4u^2 \\ &\quad + t^2u^4 + t^4u + t^3u^2 + t^2u^3 + tu^4 + t^3u + t^2u^2 + tu^3 + t^3 + t^2u + tu^2 + u^3, \\ N(t, u)_2 &= (t^4u^2 + t^3u^3 + t^2u^4 + t^3u^2 + t^2u^3 + t^3u + tu^3 + t^2u + tu^2 + t^2 + tu + u^2) \\ &\quad (t^2 + 1)(u^2 + 1), \\ N(t, u)_3 &= (t^4u^2 + t^3u^3 + t^2u^4 + t^3u + tu^3 + t^2 + tu + u^2)(t^2 + t + 1)(u^2 + u + 1), \\ N(t, u)_4 &= (t^4u^3 + t^3u^4 - t^4u^2 - t^3u^3 - t^2u^4 + t^4u + 2t^3u^2 + 2t^2u^3 + tu^4 - t^3u - tu^3 + t^3 \\ &\quad + 2t^2u + 2tu^2 + u^3 - t^2 - tu - u^2 + t + u)(t^2 + t + 1)(u^2 + u + 1). \end{aligned}$$

5.5 Sous-groupes exceptionnels de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$

Pour tout sous-groupe exceptionnel de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$, nous commençons par expliciter la matrice $A^{(1)}$. Nous écrivons ensuite une décomposition de $C_\Gamma := 2I - A^{(1)} - A^{(2)} + 2\text{Diag}(A^{(1)})$ comme somme de p éléments, avec $p \in \{3, 4\}$, de sorte que $C_\Gamma = pI - (\tau_0 + \dots + \tau_{p-1})$. Puis nous donnons le graphe associé à C_Γ et la liste Θ des valeurs propres de $A^{(1)}$.

Enfin, nous calculons la somme de la série $P_\Gamma(t, u) = \frac{N_\Gamma(t, u)}{D_\Gamma(t, u)}$: dans tous les cas, le dénominateur

est de la forme $D_\Gamma(t, u)_i = \widetilde{D}_\Gamma(t)_i \widetilde{D}_\Gamma(u)_i$. De plus, nous prendrons le plus petit commun multiple $D_\Gamma(t)$ des $\widetilde{D}_\Gamma(t)_i$ pour que tous les dénominateurs soient les mêmes, de la forme $D_\Gamma(t)D_\Gamma(u)$, i. e.

$$\forall i \in \llbracket 0, l \rrbracket, P_\Gamma(t, u)_i = (1 - tu) \frac{M_\Gamma(t, u)_i}{D_\Gamma(t)D_\Gamma(u)}.$$

Seuls le dénominateur et les relations entre les numérateurs sont écrits dans le texte : en raison de leur trop grande taille, tous les numérateurs sont relégués dans l'Annexe 3.

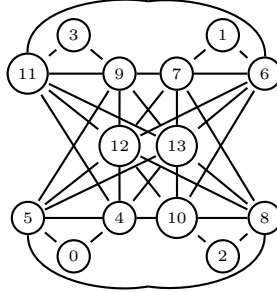
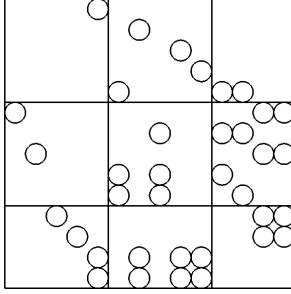
Nous donnons aussi la série de Poincaré de l'anneau des invariants $\widehat{P}_\Gamma(t) := P_\Gamma(t, 0)_0 = P_\Gamma(0, t)_0$. Les calculs sont effectués à l'aide de **GAP** et **Maple**. Ils sont explicités ci-dessous pour le type E .

5.5.1 Type E

Le groupe de type E est le groupe $\langle S, T, V \rangle$, avec

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}, T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V := \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Ici $l+1=14$, $\text{rang}(A^{(1)})=12$, $\Theta = (3, -\omega_3, -\omega_3^2, 0, 0, -1, \omega_3, 1, \omega_3^2, 1, \omega_3, 3\omega_3, \omega_3^2, 3\omega_3^2)$, $p=3$, et $\tau_0 := s_0 s_1 s_2 s_3 s_{12} s_{13}$, $\tau_1 := s_5 s_7 s_{10} s_{11}$, $\tau_2 := s_4 s_6 s_8 s_9$.



$$\begin{aligned} M_E(t, u)_2 &= M_E(t, u)_3 \\ M_E(t, u)_5 &= M_E(u, t)_4 \\ M_E(t, u)_7 &= M_E(u, t)_6 \\ M_E(t, u)_8 &= M_E(t, u)_9 \\ M_E(t, u)_{10} &= M_E(t, u)_{11} = M_E(u, t)_8 \\ M_E(t, u)_{12} &= M_E(t, u)_{13} \end{aligned}$$

$$D_E(t) = (t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2$$

$$\hat{P}_E(t) = \frac{-t^{18} + t^{15} - t^{12} - t^6 + t^3 - 1}{(t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2}$$

Remarque 5.5.1

Les calculs permettant d'obtenir les séries $P_\Gamma(t, u)_i$ pour le type E sont les suivants :

```
#Définition du groupe et des caractères
S:=[[1,0,0],[0,E(3),0],[0,0,E(3)^2]]; T:=[[0,1,0],[0,0,1],[1,0,0]];
V:=1/ER(-3)*[[1,1,1],[1,E(3),E(3)^2],[1,E(3)^2,E(3)]];
G:=Group(S,T,V); J:=Irr(G); n:=Size(J);
T:=CharacterTable(G); C:=ConjugacyClasses(G);
MP:=List([1..n],i->List([1..n],j->J[i][j]));

#Représentation naturelle et matrices A1 et A2
L:=List([1..n],i->Trace(Elements(C[i])[1])); Lb:=Character(T,L);
A1:=List([1..n],i->List([1..n],j->ScalarProduct(T,J[i],J[j]*Lb)));
A2:=TransposedMat(A1);

#Valeurs propres
VP1:=MP^(-1)*A1*MP; VP2:=MP^(-1)*A2*MP;

#Fraction rationnelle
t:=Indeterminate(Rationals, "t"); u:=Indeterminate(Rationals, "u");
fr:=function(d1,d2)
return (1-t*u)/((1-t*d1+t^2*d2-t^3)*(1-u^3-u*d2+u^2*d1));
end;

#Résultats
Del:=DiagonalMat(List([1..n],j->fr(VP1[j][j],VP2[j][j])));
```

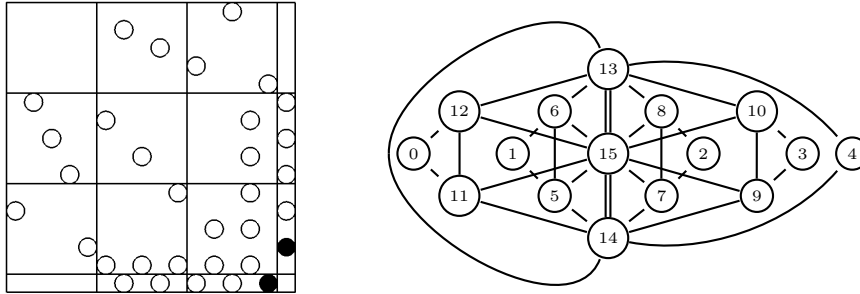
```
sol:=MP*Del*MP^(-1);
solb:=List([1..n],j->sol[j][1]);
```

5.5.2 Type F

Le groupe de type F est le groupe $\langle S, T, V, P \rangle$, avec les matrices S, T, V du type E , et

$$P := \frac{1}{\sqrt{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3 \\ \omega_3 & 1 & \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Ici $l+1 = 16$, $\text{rang}(A^{(1)}) = 15$, $\Theta = (3, -\omega_3, -\omega_3^2, 0, -1, \omega_3, 1, \omega_3, 1, \omega_3, 1, \omega_3^2, \omega_3^2, \omega_3^2, 3\omega_3, 3\omega_3^2)$, $p = 3$, et $\tau_0 := s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_{15}$, $\tau_1 := s_5 s_7 s_9 s_{11} s_{13}$, $\tau_2 := s_6 s_8 s_{10} s_{12} s_{14}$.



$$\begin{aligned} M_F(t, u)_1 &= M_F(t, u)_2 = M_F(t, u)_3 \\ M_F(t, u)_5 &= M_F(t, u)_7 = M_F(t, u)_9 \\ M_F(t, u)_{12} &= M_F(u, t)_{11} \\ M_F(t, u)_{14} &= M_F(u, t)_{13} \\ M_F(t, u)_6 &= M_F(t, u)_8 = M_F(t, u)_{10} = M_F(u, t)_5 \end{aligned}$$

$$D_F(t) = (t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2$$

$$\hat{P}_F(t) = \frac{-t^{18} + t^{15} - t^9 + t^3 - 1}{(t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2}$$

5.5.3 Type G

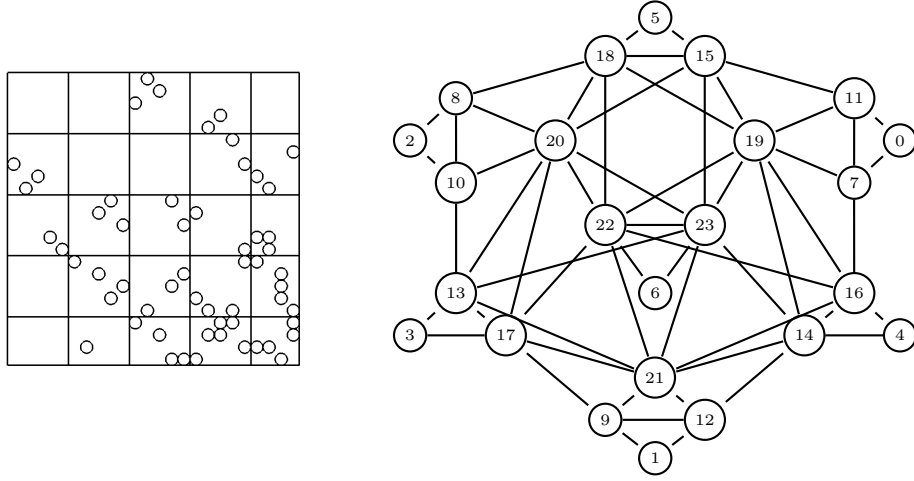
Le groupe de type G est le groupe $\langle S, T, V, U \rangle$, avec les matrices S, T, V du type E , et

$$U := \begin{pmatrix} \omega_9^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_9^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_9^2 \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Ici $l+1 = 24$, $\text{rang}(A^{(1)}) = 21$,

$$\begin{aligned} \Theta = (3, -\omega_3, -\omega_3^2, 0, 0, -\omega_9^7, -\omega_9^4, \omega_9^4 + \omega_9^7, 0, -\omega_9^5, -\omega_9^2, \omega_9^2 + \omega_9^5, -1, \omega_3, 1, \omega_3^2, 3\omega_3, 3\omega_3^2, \\ -2\omega_9^4 - \omega_9^7, \omega_9^4 - \omega_9^7, -\omega_9^2 - 2\omega_9^5, -\omega_9^2 + \omega_9^5, 2\omega_9^2 + \omega_9^5, \omega_9^4 + 2\omega_9^7), \end{aligned}$$

$p = 3$, et $\tau_0 := s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_{19} s_{20} s_{21}$, $\tau_1 := s_7 s_8 s_9 s_{13} s_{14} s_{15} s_{22}$, $\tau_2 := s_{10} s_{11} s_{12} s_{16} s_{17} s_{18} s_{23}$.



$$\begin{array}{l|l} M_G(t, u)_2 = M_G(u, t)_1 & M_G(t, u)_5 = M_G(u, t)_4 \\ M_G(t, u)_{10} = M_G(u, t)_9 & M_G(t, u)_{11} = M_G(u, t)_7 \\ M_G(t, u)_{12} = M_G(u, t)_8 & M_G(t, u)_{16} = M_G(u, t)_{15} \\ M_G(t, u)_{18} = M_G(u, t)_{14} & M_G(t, u)_{21} = M_G(u, t)_{20} \\ M_G(t, u)_{23} = M_G(u, t)_{22} & \end{array}$$

$$D_G(t) = (t-1)^3 (t^6 - t^3 + 1) (t^2 + t + 1)^3 (t+1)^2 (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1) (t^2 - t + 1)^2 (t^6 + t^3 + 1)^2$$

$$\hat{P}_G(t) = \frac{-t^{18} - t^{36} - 1}{(t-1)^3 (t^6 - t^3 + 1) (t^2 + t + 1)^3 (t+1)^2 (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1) (t^2 - t + 1)^2 (t^6 + t^3 + 1)^2}$$

5.5.4 Type H

Le groupe de type H , isomorphe au groupe alterné \mathfrak{A}_5 , est le groupe $\langle S, U, T \rangle$, avec

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_5^4 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_5 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \omega_5^2 + \omega_5^3 & \omega_5 + \omega_5^4 \\ 2 & \omega_5 + \omega_5^4 & \omega_5^2 + \omega_5^3 \end{pmatrix}.$$

Ici $l+1 = 5$, $\text{rang}(A^{(1)}) = 4$, $A^{(1)}$ est symétrique, $\Theta = (3, -1, -\omega_5^2 - \omega_5^3, -\omega_5 - \omega_5^4, 0)$, $p = 3$, et $\tau_0 := s_0 s_3$, $\tau_1 := s_1 s_2$, $\tau_2 := s_4$.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_H(t) = \frac{-t^8 - t^7 + t^5 + t^4 + t^3 - t - 1}{(t-1)^3 (t^2 + t + 1) (t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) (t+1)^2}$$

$$D_H(t) = (t-1)^3 (t^2 + t + 1) (t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) (t+1)^2$$

Remarque 5.5.2

Comme dans la Remarque 5.4.1, orientons le graphe de telle sorte que toutes les arêtes qui relient 0 à un autre sommet soient dirigées vers 0, les autres arêtes étant bidirectionnelles. Pour j appartenant à $\llbracket 1, l \rrbracket$, notons alors $\text{Succ}(j)$ l'ensemble des sommets i reliés au sommet j par une arête $j \rightarrow i$. On a alors les formules

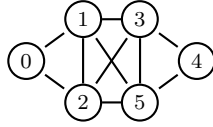
$$\sum_{i \in \text{Succ}(1)} P_\Gamma(t, 0)_i = (1 + t + t^{-1})P_\Gamma(t, 0)_1 \text{ et } \forall j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket, \sum_{i \in \text{Succ}(j)} P_\Gamma(t, 0)_i = (t + t^{-1})P_\Gamma(t, 0)_j.$$

5.5.5 Type I

Le groupe de type I est le groupe $\langle S, T, R \rangle$, avec

$$S := \begin{pmatrix} \omega_7 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_7^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_7^4 \end{pmatrix}, T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R := \frac{i}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \omega_7^4 - \omega_7^3 & \omega_7^2 - \omega_7^5 & \omega_7 - \omega_7^6 \\ \omega_7^2 - \omega_7^5 & \omega_7 - \omega_7^6 & \omega_7^4 - \omega_7^3 \\ \omega_7 - \omega_7^6 & \omega_7^4 - \omega_7^3 & \omega_7^2 - \omega_7^5 \end{pmatrix}.$$

Ici $l + 1 = 6$, $\text{rang}(A^{(1)}) = 5$, $\Theta = (3, 0, 1, \omega_7 + \omega_7^2 + \omega_7^4, \omega_7^3 + \omega_7^5 + \omega_7^6, -1)$, $p = 4$, et $\tau_0 := s_5 s_0$, $\tau_1 := s_1 s_4$, $\tau_2 := s_2$, $\tau_3 := s_3$.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


$$M_I(t, u)_2 = M_I(u, t)_1$$

$$D_I(t) = (t - 1)^3 (t^2 + t + 1) (t^2 + 1) (t + 1)^2 (t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$$

$$\hat{P}_I(t) = \frac{-t^{12} - t^{11} + t^9 + t^8 - t^6 + t^4 + t^3 - t - 1}{(t - 1)^3 (t^2 + t + 1) (t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) (t^2 + 1) (t + 1)^2}$$

5.5.6 Type J

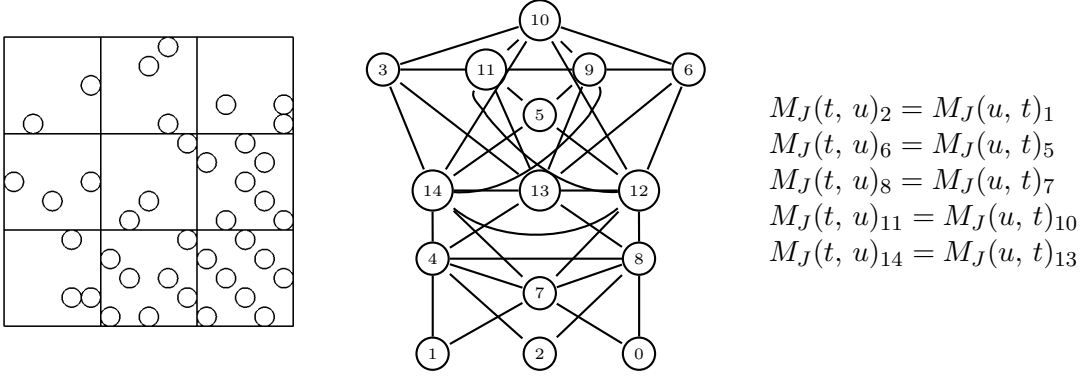
Le groupe de type J est le groupe $\langle S, U, T, W \rangle$, avec les matrices S, U, T du type H , et $W := \text{Diag}(j, j, j)$. C'est le produit direct du groupe de type H et du centre de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$.

Ici $l + 1 = 15$, $\text{rang}(A^{(1)}) = 12$,

$\Theta = (3, -1, -\omega_5^2 - \omega_5^3, -\omega_5 - \omega_5^4, -\omega_3^2, -\omega_3, 3\omega_3, -\omega_{15}^{11} - \omega_{15}^{14}, -\omega_{15}^2 - \omega_{15}^8, 3\omega_3^2, -\omega_{15}^7 - \omega_{15}^{13}, -\omega_{15} - \omega_{15}^4, 0, 0, 0)$, $p = 3$, et $\tau_0 := s_2 s_5 s_7 s_{10} s_{13}$, $\tau_1 := s_1 s_6 s_8 s_{11} s_{14}$, $\tau_2 := s_0 s_3 s_4 s_9 s_{12}$.

$$D_J(t) = (t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) (t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1) (t + 1)^2 (t^2 - t + 1)^2 (t - 1)^3 (t^2 + t + 1)^3$$

$$\hat{P}_J(t) = \frac{-t^{24} - t^{12} - 1}{(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) (t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1) (t + 1)^2 (t^2 - t + 1)^2 (t - 1)^3 (t^2 + t + 1)^3}$$



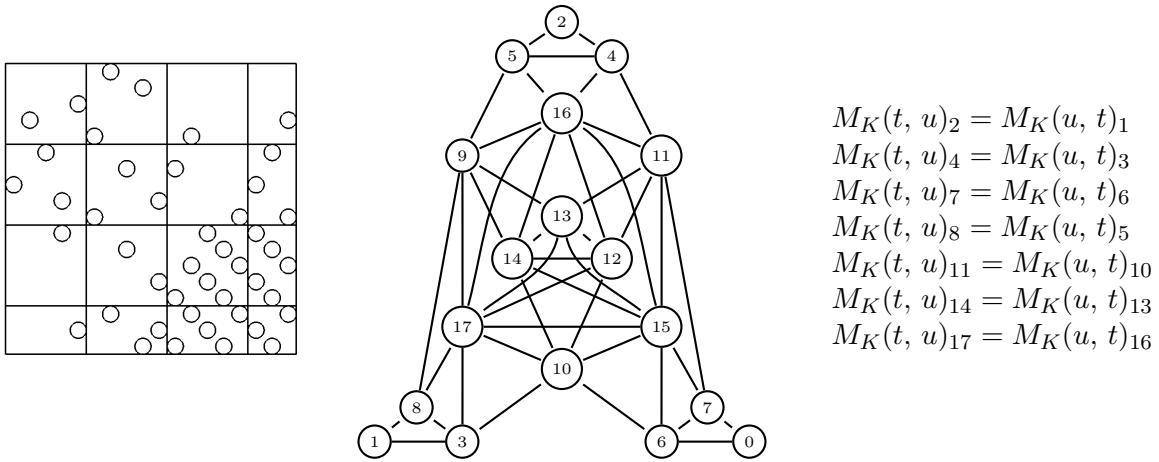
5.5.7 Type K

Le groupe de type K est le groupe $\langle S, T, R, W \rangle$, avec les matrices S, T, R du type I , et $W := \text{Diag}(j, j, j)$. C'est le produit direct du groupe de type I et du centre de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$.

Ici $l + 1 = 18$, $\text{rang}(A^{(1)}) = 15$,

$$\Theta = (3, 0, 0, 0, 3\omega_3, 3\omega_3^2, 1, \omega_7 + \omega_7^2 + \omega_7^4, \omega_7^3 + \omega_7^5 + \omega_7^6, -1, \omega_3^2, \omega_{21}^2 + \omega_{21}^8 + \omega_{21}^{11}, \omega_3, \omega_{21} + \omega_{21}^4 + \omega_{21}^{16}, \omega_{21}^5 + \omega_{21}^{17} + \omega_{21}^{20}, \omega_{21}^{10} + \omega_{21}^{13} + \omega_{21}^{19}, -\omega_3, -\omega_3^2),$$

$p = 3$, et $\tau_0 := s_1 s_5 s_6 s_{11} s_{14} s_{17}$, $\tau_1 := s_0 s_3 s_4 s_9 s_{12} s_{15}$, $\tau_2 := s_2 s_7 s_8 s_{10} s_{13} s_{16}$.



$$D_K(t) = (t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1) (t^{12}-t^{11}+t^9-t^8+t^6-t^4+t^3-t+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2$$

$$\hat{P}_K(t) = \frac{-t^{36}-t^{18}-1}{(t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1) (t^{12}-t^{11}+t^9-t^8+t^6-t^4+t^3-t+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2}$$

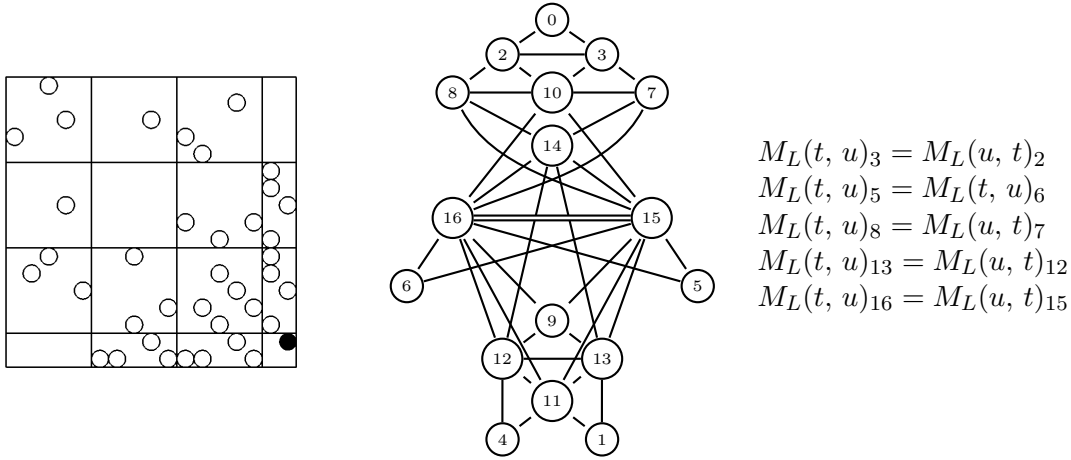
5.5.8 Type L

Le groupe de type L est le groupe $\langle S, U, T, V \rangle$, avec les matrices S, U, T du type H , et

$$V := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1 \\ 2\lambda_2 & s & t \\ 2\lambda_2 & t & s \end{pmatrix},$$

où $s := \omega_5^2 + \omega_5^3$, $t := \omega_5 + \omega_5^4$, $\lambda_1 := \frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$, et $\lambda_2 := \frac{-1-i\sqrt{15}}{4}$. Ici $l+1 = 17$, $\text{rang}(A^{(1)}) = 15$, $p = 3$, et $\tau_0 := s_0 s_5 s_6 s_9 s_{10} s_{11} s_{14}$, $\tau_1 := s_1 s_2 s_7 s_{12} s_{15}$, $\tau_2 := s_3 s_4 s_8 s_{13} s_{16}$.

$\Theta = (3, -\omega_3, -\omega_3^2, 3\omega_3^2, 3\omega_3, -1, \omega_3^2, \omega_3, 1, -\omega_{15}^2 - \omega_{15}^8, -\omega_{15} - \omega_{15}^4, -\omega_{15}^{11} - \omega_{15}^{14}, -\omega_{15}^7 - \omega_{15}^{13}, -\omega_5^2 - \omega_5^3, -\omega_5 - \omega_5^4, 0, 0)$.



$$D_L(t) = (t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t^4+t^3+t^2+t+1) (t^8-t^7+t^5-t^4+t^3-t+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2$$

$$\hat{P}_L(t) = \frac{-t^{30}+t^{15}-1}{(t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t^4+t^3+t^2+t+1) (t^8-t^7+t^5-t^4+t^3-t+1) (t+1)^2 (t^2-t+1)^2}$$

ANNEXE A

Démonstration de trois propositions du Chapitre 4

A.1 Démonstration de la Proposition 4.5.6

L'absence de symétrie de (4.29) nécessite l'introduction d'une seconde variable, notée $v = (BU)$. Alors l'équation peut s'écrire

$$u^2 * v = u^2 v + \phi(u, u, v) - \psi(u, u)v - \psi(\psi(u, u), v) - \hbar\{v, u\}u - \frac{\hbar^2}{6}\{u, \{v, u\}\},$$

avec ϕ donné par l'Equation (4.31),

$$\begin{aligned} \phi(u, u, v) = & \frac{\phi_1}{3} ((AAU)v + 2(ABU)u) + \frac{\phi_2}{3} ((AABU) + (ABAU) + (BAAU)) \\ & + \frac{\phi_3}{3} ((AA)v + 2(AB)u) + \phi_4(AAB). \end{aligned}$$

L'échange des indices supérieurs dans les deux A est un type de transformation de Fierz. Il donne :

$$\begin{aligned}
(ABAU) &\mapsto (AB)u - \frac{1}{n}(AABU) - \frac{1}{n}(AAUB) + \frac{1}{n^2}(AA)v, \\
(AABU) &\mapsto -\frac{2}{n}(AABU) + \frac{1}{n^2}(AA)v, \\
(ABU)u &\mapsto (ABU)u - \frac{1}{n}(AAU)v, \\
(BAU)u &\mapsto (BAU)u - \frac{1}{n}(AAU)v, \\
(AAU) &\mapsto -\frac{2}{n}(AAU), \\
(AAB) &\mapsto -\frac{2}{n}(AAB), \\
(AB)u &\mapsto (AUA)B, \\
(AA) &\mapsto -\frac{1}{n}(AA).
\end{aligned}$$

Par exemple, considérons $(AB)u = (\sum_{a,b} A_a^b B_b^a)(\sum_{c,d} A_c^d U_d^c)$. Après l'échange des indices supérieurs dans les deux A , l'expression devient $\sum_{a,b,c,d} A_a^d U_d^c A_c^b B_b^a = (AUA)B$.

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\phi(u, u, v) &\mapsto \frac{\phi_1}{3} \left(-\frac{2}{n}(AAU)v + 2(ABU)u - \frac{2}{n}(AAU)v \right) \\
&\quad + \frac{\phi_2}{3} \left(-\frac{3}{n}(AABU + AAUB) + \frac{3}{n^2}(AA)v + (AB)u \right) \\
&\quad + \frac{\phi_3}{3} \left(-\frac{1}{n}(AA)v + 2(ABAU) \right) + \phi_4 \left(-\frac{2}{n}(AAB) \right).
\end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
-\psi(u, u)v &= -k(AAU)v - k'(AA)v \mapsto \frac{2k}{n}(AAU)v + \frac{k'}{n}(AA)v, \\
&= -\frac{k^2}{2} \left((AABU + AAUB) - \frac{2}{n}(AA)v \right) - kk'(AAB) \mapsto \frac{k^2}{n} \left((AABU + AAUB) - \frac{2}{n}(AA)v \right) \\
&\quad - \frac{k^2}{n}(AA)v + \frac{kk'}{n}(AAB), \\
&= -\frac{\hbar^2}{6} \{u, \{v, u\}\} \\
&= -\frac{\hbar^2}{3} (ABAU) + \frac{\hbar^2}{6} (AABU + AAUB) \mapsto \frac{\hbar^2}{3} \left(-(AB)u + \frac{1}{n}(AABU + AAUB) - \frac{1}{n^2}(AA)v \right) \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{6} \left(-\frac{2}{n}(AABU + AAUB) + \frac{2}{n^2}(AA)v \right).
\end{aligned}$$

En appliquant la contrainte $U_a^b U_c^d = U_a^d U_c^b$ à (4.29), nous obtenons les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\phi_1 \left(1 + \frac{2}{n} \right) - k \left(1 + \frac{2}{n} \right) &= 0, \\
2\phi_2 \left(1 + \frac{3}{n} \right) - 3k^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \hbar^2 &= 0, \\
\phi_2 - 2\phi_3 - \hbar^2 &= 0, \\
\phi_3 \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 3k' \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{3}{n^2}\phi_2 + \frac{3}{n}k^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right) &= 0, \\
\phi_4 \left(1 + \frac{2}{n} \right) - kk' \left(1 + \frac{2}{n} \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Nous éliminons les paramètres ϕ_i et nous trouvons la relation

$$4k' \left(1 + \frac{1}{n}\right) = k^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 - \hbar^2.$$

La proposition est prouvée. ■

A.2 Démonstration de la Proposition 4.5.9

Rappelons que les relations qui définissent l'orbite nilpotente minimale sont

$$\sum_{cycl(abc)} L_{ab}L_{cd} = 0, \quad \eta^{bc}L_{ab}L_{cd} = 0.$$

En appliquant la première relation (contraction sur b, c) à l'Equation (4.38), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 = & \eta^{bc}\phi_{ab,cd,ef} - \frac{k}{2}(n-1)\eta_{ad}L_{ef} \\ & - \frac{\hbar^2}{12}((n-4)(\eta_{fd}L_{ae} + (a \leftrightarrow d) - (e \leftrightarrow f) - (a \leftrightarrow d, e \leftrightarrow f)) - 4\eta_{ad}L_{ef}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \eta^{bc}\phi_{ab,cd,ef} = & \left(\frac{\phi_1}{24}(n-1) - \frac{\phi_2}{6}\right)(\eta_{fd}L_{ae} + (a \leftrightarrow d) - (e \leftrightarrow f) - (a \leftrightarrow d, e \leftrightarrow f)) \\ & + \left(-\frac{\phi_1}{6} + \frac{\phi_2}{6}(n-1)\right)\eta_{ad}L_{ef}. \end{aligned}$$

La seconde relation (un genre de transformation de Fierz) donne

$$0 = \sum_{cycl} \phi_{ab,cd,ef} + \frac{\hbar^2}{3}\eta_{fa}(\eta_{de}L_{bc} + \eta_{ec}L_{db}) - (e \leftrightarrow f)$$

et

$$\sum_{cycl} \phi_{ab,cd,ef} = \left(\frac{\phi_1}{12} + \frac{\phi_2}{6}\right) \sum_{cycl} \eta_{fa}(\eta_{de}L_{cb} + \eta_{ce}L_{bd}) - (e \leftrightarrow f).$$

D'où les équations :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1}{24}(n-1) - \frac{\phi_2}{6} - \frac{\hbar^2}{12}(n-4) &= 0, \\ -\frac{\phi_1}{6} + \frac{\phi_2}{6}(n-1) - \frac{k}{2}(n-1) + \frac{\hbar^2}{3} &= 0, \\ \frac{\phi_1}{12} + \frac{\phi_2}{6} + \frac{\hbar^2}{3} &= 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \phi_1(n+1) &= 2\hbar^2(n-8) \\ \phi_2(1+n) &= -3\hbar^2(n-2) \\ k(n-1) &= \hbar^2(n-4). \end{aligned}$$

La proposition est prouvée. ■

A.3 Démonstration de la Proposition 4.5.11

Toutes les sous-algèbres de Cartan sont isomorphes et deux systèmes quelconques de racines simples sont liés par une transformation du groupe de Weyl. L'idéal ne détermine que le caractère infinitésimal $\chi(\lambda) := \rho + \lambda$, où ρ est la demi-somme des racines positives et λ est le plus haut poids, à une réflexion de Weyl près. Il ne distingue pas les poids qui sont liés par une transformation de Weyl du caractère infinitésimal. Dans le cas de $B_l = \mathfrak{so}_{2l+1}$ la formule est $\rho = (l - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. Le problème est de déterminer les valeurs possibles du caractère infinitésimal.

Nous commençons par la relation

$$\sum_b L_{db} * L_{b'a} - \frac{\hbar}{2}(n-2)L_{da} + \frac{k}{2}(n-1)\eta_{da} = 0,$$

dans le cas $a + d = n + 1$, $a < d$. Appliquée au vecteur de plus haut poids v_0 , elle donne

$$\left(\sum_{b \leq a} L_{db} * L_{b'a} + \frac{\hbar}{2}(n-2)\lambda_a + \frac{k}{2}(n-1) \right) v_0 = 0.$$

Si $b > a$, alors $b' < a'$ et $a + b' < n + 1$, ainsi $L_{b'a}v_0 = 0$. Par conséquent

$$\left(\sum_{b < a} \{L_{db}, L_{b'a}\} + \lambda_a 2 + \frac{\hbar}{2}(n-2)\lambda_a + \frac{k}{2}(n-1) \right) v_0 = 0.$$

Enfin, comme le crochet est égal à $\hbar^2(\lambda_b - \lambda_a)$, pour $b = 1 \dots a - 1$, on a

$$(1-a)\lambda_a + (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1}) + \lambda_a^2 + \frac{1}{2}(n-2)\lambda_a + \frac{1}{2}(n-4) = 0.$$

En particulier

$$\lambda_1^2 + \frac{1}{2}(n-2)\lambda_1 + \frac{1}{2}(n-4) = 0,$$

i. e.

$$(\lambda_1 + 1) \left(\lambda_1 + \frac{n-4}{2} \right) = 0.$$

Donc

$$(1-a)\lambda_a + (\lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1}) + \lambda_a^2 - \lambda_1^2 + \frac{n-2}{2}(\lambda_a - \lambda_1) = 0,$$

et

$$(\lambda_a - \lambda_{a-1}) \left(\lambda_a + \lambda_{a-1} + \frac{1}{2}(n-a) \right) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Nous revenons maintenant à la relation

$$\sum_b L_{db} * L_{b'a} - \frac{\hbar}{2}(n-2)L_{da} + \frac{k}{2}(n-1)\eta_{da} = 0,$$

dans le cas $a + d = n + 2$, $2 \leq a < d$. En appliquant cette relation au vecteur de plus haut poids v_0 , on a

$$\left(\sum_{b \leq a} L_{db} * L_{b'a} - \frac{\hbar}{2}(n-2)L_{da} \right) v_0 = 0,$$

$$\left(\sum_{b \leq a-2} L_{db} * L_{b'a} + L_{da} * L_{a'a} + L_{dd'} L_{da} - \frac{\hbar}{2}(n-2)L_{da} \right) v_0 = 0.$$

Le premier terme peut être remplacé par la somme de crochets $\sum_{a \leq a-2} [L_{db}, L_{b'a}] = \hbar \sum_{b \leq a-2} L_{da}$. Ainsi, pour $a = 2 \dots l$, on a la relation

$$\left((a-1)L_{da} - \lambda_a L_{da} - \lambda_{a-1} L_{da} - \frac{1}{2}(n-2)L_{da} \right) v_0 = 0.$$

D'où

$$\left(\lambda_a + \lambda_{a-1} + \frac{1}{2}(n-2a) \right) L_{da} v_0 = 0, \quad \forall a = 2 \dots l.$$

Notons que $\{L_{da}, L_{a'd'}\} = \hbar^2(\lambda_a - \lambda_{a-1})v_0$. L'information contenue dans le dernier résultat est précisément la même que dans (A.1), avec $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Alors $L_{ab}v_0 = 0$, $a, b > 1$.

Ensuite, la relation

$$\sum_{cycl(bcd)} (L_{ab} - \hbar \eta_{ab}) * L_{cd} = 0$$

appliquée à v_0 dans le cas $a + b = c + d = n + 1$, $a < b$, $c < d$, $a \neq c$, donne

$$((\lambda_a - 1)\lambda_c + L_{ac} * L_{db} + L_{ad} * L_{bc}) v_0 = 0.$$

En l'évaluant dans les deux cas, $a > b$, $a < c$, on trouve que $\lambda_{<}$ est -1 ou $\lambda_{>}$ est 0 . Cela complète la preuve. ■

ANNEXE B

Calcul des séries $P_\Gamma(t)$ et $P_\Gamma(t, u)$

B.1 Sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$

B.1.1 Type D — Groupes binaires diédraux

On a

$$P_\Gamma(t) = T_\Gamma \Delta(t) T_\Gamma T_\Gamma^{-2} v_0.$$

Or le vecteur colonne $T_\Gamma^{-2} v_0$ est la transposée du vecteur

$$\left(\frac{3n-1}{8n^2}, 0, 0, (-1)^n \frac{n-1}{8n^2}, -\frac{n-1}{4n^2}, \frac{n-1}{4n^2}, -\frac{n-1}{4n^2}, \frac{n-1}{4n^2}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{n-1}{4n^2} \right),$$

et la matrice $T_\Gamma \Delta(t) T_\Gamma$ est

$$T_\Gamma \Delta(t) T_\Gamma = \begin{pmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} \end{pmatrix},$$

avec

$$B^{(11)} = \left(B_1^{(11)}, B_2^{(11)}, B_3^{(11)}, B_4^{(11)} \right), \quad B^{(12)} = \left(B_1^{(12)}, B_2^{(12)}, \dots, B_{n-1}^{(12)} \right),$$

$$B^{(21)} = \left(B_1^{(21)}, B_2^{(21)}, B_3^{(21)}, B_4^{(21)} \right)$$

et

$$\begin{aligned}
B_1^{(11)} &= \begin{pmatrix} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \\ d_1 + i^n d_2 - i^n d_3 + (-1)^n d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \delta_k \\ d_1 - i^n d_2 + i^n d_3 + (-1)^n d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \delta_k \\ d_1 - d_2 - d_3 + d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \end{pmatrix}, \quad B_2^{(11)} = \begin{pmatrix} d_1 + i^n d_2 - i^n d_3 - d_4 \\ d_1 + (-1)^n (d_2 + d_3 - d_4) \\ d_1 + (-1)^n (-d_2 - d_3 + d_4) \\ d_1 - i^n d_2 + i^n d_3 - d_4 \end{pmatrix}, \\
B_3^{(11)} &= \begin{pmatrix} d_1 - i^n d_2 + i^n d_3 - d_4 \\ d_1 + (-1)^n (-d_2 - d_3 - d_4) \\ d_1 + (-1)^n (d_2 + d_3 - d_4) \\ d_1 + i^n d_2 - i^n d_3 - d_4 \end{pmatrix}, \quad B_4^{(11)} = \begin{pmatrix} d_1 + (-1)^n (d_2 + d_3) + d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \delta_k \\ d_1 + (-1)^n (i^n d_2 - i^n d_3 + d_4) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \\ d_1 + (-1)^n (-i^n d_2 + i^n d_3 + d_4) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \\ d_1 + (-1)^n (-d_2 - d_3) + d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \delta_k \end{pmatrix}, \\
B_j^{(12)} &= \begin{pmatrix} d_1 + (-1)^j (d_2 + d_3) + d_4 + \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{jk} + \omega_{2n}^{-jk}) \delta_k \\ d_1 + (-1)^j (i^n d_2 - i^n d_3) + (-1)^n d_4 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^{jk} + \omega_{2n}^{-jk}) \delta_k \\ d_1 + (-1)^j (-i^n d_2 + i^n d_3) + (-1)^n d_4 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^{jk} + \omega_{2n}^{-jk}) \delta_k \\ d_1 - (-1)^j (d_2 + d_3) + d_4 + \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{jk} + \omega_{2n}^{-jk}) \delta_k \end{pmatrix}, \\
B_1^{(21)} &= \begin{pmatrix} 2d_1 - 2d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^k + \omega_{2n}^{-k}) \delta_k \\ 2d_1 + 2d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{2k} + \omega_{2n}^{-2k}) \delta_k \\ 2d_1 - 2d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{3k} + \omega_{2n}^{-3k}) \delta_k \\ \vdots \\ 2d_1 + 2(-1)^{n-1} d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_{2n}^{(n-1)k} + \omega_{2n}^{-(n-1)k}) \delta_k \end{pmatrix}, \quad B_2^{(21)} = \begin{pmatrix} 2d_1 + 2d_4 \\ 2d_1 - 2d_4 \\ 2d_1 + 2d_4 \\ \vdots \\ 2d_1 + 2(-1)^n d_4 \end{pmatrix}, \\
B_3^{(21)} &= \begin{pmatrix} 2d_1 + 2d_4 \\ 2d_1 - 2d_4 \\ 2d_1 + 2d_4 \\ \vdots \\ 2d_1 + 2(-1)^n d_4 \end{pmatrix}, \quad B_4^{(21)} = \begin{pmatrix} 2d_1 - 2d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^k + \omega_{2n}^{-k}) \delta_k \\ 2d_1 + 2d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^{2k} + \omega_{2n}^{-2k}) \delta_k \\ 2d_1 - 2d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^{3k} + \omega_{2n}^{-3k}) \delta_k \\ \vdots \\ 2d_1 + 2(-1)^{n-1} d_4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\omega_{2n}^{(n-1)k} + \omega_{2n}^{-(n-1)k}) \delta_k \end{pmatrix}, \\
B^{(22)} &= \begin{pmatrix} 2d_1 - 2d_4 & 2d_1 - 2d_4 & \cdots & 2d_1 - 2d_4 \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{1,1} & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{1,2} & & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{1,n-1} \\ 2d_1 + 2d_4 & 2d_1 + 2d_4 & \cdots & 2d_1 + 2d_4 \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{2,1} & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{2,2} & & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{2,n-1} \\ 2d_1 - 2d_4 & 2d_1 - 2d_4 & \cdots & 2d_1 - 2d_4 \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{3,1} & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{3,2} & & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2d_1 + 2(-1)^{n-1} d_4 & 2d_1 + 2(-1)^{n-1} d_4 & \cdots & 2d_1 + 2(-1)^{n-1} d_4 \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{n-1,1} & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{n-1,2} & & + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega_{n-1,n-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec

$$\Omega_{p,q} := (\omega_{2n}^{pk} + \omega_{2n}^{-pk}) \delta_k (\omega_{2n}^{qk} + \omega_{2n}^{-qk}).$$

On en déduit les séries $P_\Gamma(t)_i$.

B.2 Sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$

B.2.1 Type A_2

- Calcul des séries $P_\Gamma(t, u)_i$:

La matrice $(T_1 \otimes T_2)\Delta(t, u)$ est la matrice par blocs

$$(T_1 \otimes T_2)\Delta(t, u) = \left((T_1 \otimes T_2)\Delta(t, u)_0, (T_1 \otimes T_2)\Delta(t, u)_1, \dots, (T_1 \otimes T_2)\Delta(t, u)_{j_1-1} \right),$$

avec

$$(T_1 \otimes T_2)\Delta(t, u)_k = \begin{pmatrix} (T_1)_{0,k} T_2 \Delta(t, u)^{(k)} \\ (T_1)_{1,k} T_2 \Delta(t, u)^{(k)} \\ \vdots \\ (T_1)_{j_1-1,k} T_2 \Delta(t, u)^{(k)} \end{pmatrix},$$

et on a

$$\begin{aligned} & (T_1 Q^{\sigma_1}) \otimes (T_2 Q^{\sigma_2}) \\ = & \begin{pmatrix} (T_1)_{0,0} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{0,j_1-1} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{0,j_1-2} \widetilde{T}_2 & \cdots & (T_1)_{0,2} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{0,1} \widetilde{T}_2 \\ (T_1)_{1,0} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{1,j_1-1} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{1,j_1-2} \widetilde{T}_2 & \cdots & (T_1)_{1,2} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{1,1} \widetilde{T}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (T_1)_{j_1-1,0} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{j_1-1,j_1-1} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{j_1-1,j_1-2} \widetilde{T}_2 & \cdots & (T_1)_{j_1-1,2} \widetilde{T}_2 & (T_1)_{j_1-1,1} \widetilde{T}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\widetilde{T}_2 = T_2 Q^{\sigma_2}$, donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j_1 j_2} T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma^{-1} = \frac{1}{j_1 j_2} (T_1 \otimes T_2) \Delta(t, u) ((T_1 Q^{\sigma_1}) \otimes (T_2 Q^{\sigma_2})) \\ = & \frac{1}{j_1 j_2} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{0,k} (T_1)_{k,0} \Pi_k & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{0,k} (T_1)_{k,j_1-1} \Pi_k & \cdots & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{0,k} (T_1)_{k,1} \Pi_k \\ \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{1,k} (T_1)_{k,0} \Pi_k & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{1,k} (T_1)_{k,j_1-1} \Pi_k & \cdots & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{1,k} (T_1)_{k,1} \Pi_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{j_1-1,k} (T_1)_{k,0} \Pi_k & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{j_1-1,k} (T_1)_{k,j_1-1} \Pi_k & \cdots & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{j_1-1,k} (T_1)_{k,1} \Pi_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$\Pi_k := T_2 \Delta(t, u)^{(k)} T_2 Q^{\sigma_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{0,l} f_{kl}(T_2)_{l,0} & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{0,l} f_{kl}(T_2)_{l,j_2-1} & \cdots & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{0,l} f_{kl}(T_2)_{l,1} \\ \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{1,l} f_{kl}(T_2)_{l,0} & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{1,l} f_{kl}(T_2)_{l,j_2-1} & \cdots & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{1,l} f_{kl}(T_2)_{l,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{j_2-1,l} f_{kl}(T_2)_{l,0} & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{j_2-1,l} f_{kl}(T_2)_{l,j_2-1} & \cdots & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{j_2-1,l} f_{kl}(T_2)_{l,1} \end{pmatrix},$$

et $f_{kl} = \Delta(t, u)_l^{(k)}$.

Finalement, pour $(m, n) \in \llbracket 0, j_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, j_2 - 1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t, u)_{mj_2+n} &= \frac{1}{j_1 j_2} \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{mk} \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{nl} f_{kl} \\ &= \frac{1}{j_1 j_2} \sum_{k=0}^{j_1-1} \sum_{l=0}^{j_2-1} \omega_{j_1}^{mk} \omega_{j_2}^{nl} f_{kl}. \end{aligned}$$

• Détermination de la matrice $A^{(1)}$:

On a dans un premier temps

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= T_\Gamma \Lambda^{(1)} T_\Gamma^{-1} = (T_1 \otimes T_2) \Lambda^{(1)} (T_1 \otimes T_2)^{-1} = (T_1 \otimes T_2) \Lambda^{(1)} (T_1^{-1} \otimes T_2^{-1}) \\ &= \frac{1}{j_1 j_2} (T_1 \otimes T_2) \Lambda^{(1)} ((T_1 Q^{\sigma_1}) \otimes (T_2 Q^{\sigma_2})), \end{aligned}$$

avec

$$(T_1 \otimes T_2) \Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} (T_1)_{0,0} T_2 \Lambda_{(0)}^{(1)} & (T_1)_{0,1} T_2 \Lambda_{(1)}^{(1)} & \cdots & (T_1)_{0,j_1-1} T_2 \Lambda_{(j_1-1)}^{(1)} \\ (T_1)_{1,0} T_2 \Lambda_{(0)}^{(1)} & (T_1)_{1,1} T_2 \Lambda_{(1)}^{(1)} & \cdots & (T_1)_{1,j_1-1} T_2 \Lambda_{(j_1-1)}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (T_1)_{j_1-1,0} T_2 \Lambda_{(0)}^{(1)} & (T_1)_{j_1-1,1} T_2 \Lambda_{(1)}^{(1)} & \cdots & (T_1)_{j_1-1,j_1-1} T_2 \Lambda_{(j_1-1)}^{(1)} \end{pmatrix},$$

et $(T_1 Q^{\sigma_1}) \otimes (T_2 Q^{\sigma_2})$ a déjà été calculée.

Ainsi

$$\begin{aligned} &(T_1 \otimes T_2) \Lambda^{(1)} ((T_1 Q^{\sigma_1}) \otimes (T_2 Q^{\sigma_2})) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{0,k} (T_1)_{k,0} \widetilde{T_2^{(k)}} & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{0,k} (T_1)_{k,j_1-1} \widetilde{T_2^{(k)}} & \cdots & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{0,k} (T_1)_{k,1} \widetilde{T_2^{(k)}} \\ \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{1,k} (T_1)_{k,0} \widetilde{T_2^{(k)}} & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{1,k} (T_1)_{k,j_1-1} \widetilde{T_2^{(k)}} & \cdots & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{1,k} (T_1)_{k,1} \widetilde{T_2^{(k)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{j_1-1,k} (T_1)_{k,0} \widetilde{T_2^{(k)}} & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{j_1-1,k} (T_1)_{k,j_1-1} \widetilde{T_2^{(k)}} & \cdots & \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{j_1-1,k} (T_1)_{k,1} \widetilde{T_2^{(k)}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\widetilde{T_2^{(k)}} = T_2 \Lambda_k^{(1)} T_2 Q^{\sigma_2}$.

Or

$$T_2 \Lambda_k^{(1)} T_2 Q^{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{0,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,0} & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{0,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,j_2-1} & \cdots & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{0,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,1} \\ \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{1,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,0} & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{1,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,j_2-1} & \cdots & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{1,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{j_2-1,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,0} & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{j_2-1,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,j_2-1} & \cdots & \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{j_2-1,l} \Lambda_{kl}^{(1)} (T_2)_{l,1} \end{pmatrix},$$

donc

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} A_{0,0}^{(1)} & A_{0,1}^{(1)} & \cdots & A_{0,j_1-1}^{(1)} \\ A_{1,0}^{(1)} & A_{1,1}^{(1)} & \cdots & A_{1,j_1-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{j_1-1,0}^{(1)} & A_{j_1-1,1}^{(1)} & \cdots & A_{j_1-1,j_1-1}^{(1)} \end{pmatrix},$$

avec

$$A_{p,q}^{(1)} = \frac{1}{j_1 j_2} \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{p,k} (T_1)_{k,j_1-q \bmod j_1} T_2 \Lambda_k^{(1)} T_2 Q^{\sigma_2},$$

i. e.

$$\begin{aligned} (A_{p,q}^{(1)})_{m,n} &= \frac{1}{j_1 j_2} \sum_{k=0}^{j_1-1} (T_1)_{p,k} (T_1)_{k,j_1-q \bmod j_1} \sum_{l=0}^{j_2-1} (T_2)_{m,l} \Lambda_{k,l}^{(1)} (T_2)_{l,j_2-n \bmod j_2} \\ &= \frac{1}{j_1 j_2} \sum_{k=0}^{j_1-1} \omega_{j_1}^{pk} \omega_{j_1}^{(j_1-q)k} \sum_{l=0}^{j_2-1} \omega_{j_2}^{ml} \omega_{j_2}^{(j_2-n)l} (\omega_{j_1}^{-k} + \omega_{j_2}^{-l} + \omega_{j_1}^k \omega_{j_2}^l) \\ &= \frac{1}{j_1} \sum_{k=0}^{j_1-1} \omega_{j_1}^{(p-q-1)k} \frac{1}{j_2} \sum_{l=0}^{j_2-1} \omega_{j_2}^{(m-n)l} + \frac{1}{j_1} \sum_{k=0}^{j_1-1} \omega_{j_1}^{(p-q)k} \frac{1}{j_2} \sum_{l=0}^{j_2-1} \omega_{j_2}^{(m-n-1)l} \\ &\quad + \frac{1}{j_1} \sum_{k=0}^{j_1-1} \omega_{j_1}^{(p-q+1)k} \frac{1}{j_2} \sum_{l=0}^{j_2-1} \omega_{j_2}^{(m-n+1)l} \\ &= \delta_{p-q-1}^0 \bmod j_1 \delta_{m-n}^0 \bmod j_2 + \delta_{p-q}^0 \bmod j_1 \delta_{m-n-1}^0 \bmod j_2 + \delta_{p-q+1}^0 \bmod j_1 \delta_{m-n+1}^0 \bmod j_2. \end{aligned}$$

B.2.2 Type BTa

Calcul des séries $P_\Gamma(t, u)_i$:

La matrice $(T_2 \otimes T_1)\Delta(t, u)$ est la matrice par blocs

$$(T_2 \otimes T_1)\Delta(t, u) = \begin{pmatrix} (T_2)_{0,0}T_1\Delta(t, u)^{(0)} & (T_2)_{0,1}T_1\Delta(t, u)^{(1)} & \cdots & (T_2)_{0,m-1}T_1\Delta(t, u)^{(m-1)} \\ (T_2)_{1,0}T_1\Delta(t, u)^{(0)} & (T_2)_{1,1}T_1\Delta(t, u)^{(1)} & \cdots & (T_2)_{1,m-1}T_1\Delta(t, u)^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (T_2)_{m-1,0}T_1\Delta(t, u)^{(0)} & (T_2)_{m-1,1}T_1\Delta(t, u)^{(1)} & \cdots & (T_2)_{m-1,m-1}T_1\Delta(t, u)^{(m-1)} \end{pmatrix},$$

et on a

$$(T_2 Q^{\sigma_2}) \otimes (T_1^{-1}) = \begin{pmatrix} (T_2)_{0,0}T_1^{-1} & (T_2)_{0,m-1}T_1^{-1} & (T_2)_{0,m-2}T_1^{-1} & \cdots & (T_2)_{0,2}T_1^{-1} & (T_2)_{0,1}T_1^{-1} \\ (T_2)_{1,0}T_1^{-1} & (T_2)_{1,m-1}T_1^{-1} & (T_2)_{1,m-2}T_1^{-1} & \cdots & (T_2)_{1,2}T_1^{-1} & (T_2)_{1,1}T_1^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (T_2)_{m-1,0}T_1^{-1} & (T_2)_{m-1,m-1}T_1^{-1} & (T_2)_{m-1,m-2}T_1^{-1} & \cdots & (T_2)_{m-1,2}T_1^{-1} & (T_2)_{m-1,1}T_1^{-1} \end{pmatrix},$$

donc

$$\frac{1}{m} T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma^{-1} = \frac{1}{m} (T_2 \otimes T_1) \Delta(t, u) ((T_2 Q^{\sigma_2}) \otimes T_1^{-1}) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{0,k} (T_2)_{k,0} \Pi_k & \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{0,k} (T_2)_{k,m-1} \Pi_k & \cdots & \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{0,k} (T_2)_{k,1} \Pi_k \\ \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{1,k} (T_2)_{k,0} \Pi_k & \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{1,k} (T_2)_{k,m-1} \Pi_k & \cdots & \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{1,k} (T_2)_{k,1} \Pi_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{m-1,k} (T_2)_{k,0} \Pi_k & \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{m-1,k} (T_2)_{k,m-1} \Pi_k & \cdots & \sum_{k=0}^{m-1} (T_2)_{m-1,k} (T_2)_{k,1} \Pi_k \end{pmatrix},$$

où

$$\Pi_k := T_1 \Delta(t, u)^{(k)} T_1^{-1},$$

avec

$$(\Pi_k)_{ij} = \sum_{l=0}^6 (T_1)_{il} f_{kl} (T_1)_{lj}^{-1}, \text{ et } f_{kl} = \Delta(t, u)_{ll}^{(k)}.$$

Comme

$$T_1^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 4 & 4j^2 & 4j & 4 & 4j^2 & 4j & 0 \\ 4 & 4j & 4j^2 & -4 & -4j & -4j^2 & 0 \\ 4 & 4j^2 & 4j & -4 & -4j^2 & -4j & 0 \\ 4 & 4j & 4j^2 & 4 & 4j & 4j^2 & 0 \end{pmatrix},$$

la première colonne de la matrice Π_k est

$$\frac{1}{24} \begin{pmatrix} f_{k,0} + f_{k,1} + 6 f_{k,2} + 4 f_{k,3} + 4 f_{k,4} + 4 f_{k,5} + 4 f_{k,6} \\ f_{k,0} + f_{k,1} + 6 f_{k,2} + (4 f_{k,3} + 4 f_{k,5}) j + (4 f_{k,4} + 4 f_{k,6}) j^2 \\ f_{k,0} + f_{k,1} + 6 f_{k,2} + (4 f_{k,3} + 4 f_{k,5}) j^2 + (4 f_{k,4} + 4 f_{k,6}) j \\ 2 f_{k,0} - 2 f_{k,1} + 4 f_{k,3} - 4 f_{k,4} - 4 f_{k,5} + 4 f_{k,6} \\ 2 f_{k,0} - 2 f_{k,1} + (4 f_{k,3} - 4 f_{k,5}) j + (-4 f_{k,4} + 4 f_{k,6}) j^2 \\ 2 f_{k,0} - 2 f_{k,1} + (4 f_{k,3} - 4 f_{k,5}) j^2 + (-4 f_{k,4} + 4 f_{k,6}) j \\ 3 f_{k,0} + 3 f_{k,1} - 6 f_{k,2} \end{pmatrix}.$$

B.2.3 Série C

Série C — m non divisible par 3

Calcul des séries $P_\Gamma(t, u)_i$:

Le vecteur colonne $T_\Gamma^{-2}v_{0,0}$ est donné par

$${}^t(T_\Gamma^{-2}v_{0,0}) = \left(\frac{5(m+1)(m-1)+1}{9m^4} \quad \frac{-(m+1)(m-1)}{9m^2} \quad \frac{-(m+1)(m-1)}{9m^2} \mid \frac{2(m+1)(m-1)}{3m^4} \quad \dots \quad \frac{2(m+1)(m-1)}{3m^4} \right).$$

On obtient alors $T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma = \left((T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma)_0, (T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma)_1, \dots, (T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma)_{\frac{m^2-1}{3}} \right)$, avec

$$(T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma)_0 = \begin{pmatrix} 3\Sigma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + j^2\varepsilon_3 & \varepsilon_1 + j^2\varepsilon_2 + j\varepsilon_3 \\ 3\Sigma + \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + j^2\varepsilon_3 & \varepsilon_1 + j^2\varepsilon_2 + j\varepsilon_3 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ 3\Sigma + \varepsilon_1 + j^2\varepsilon_2 + j\varepsilon_3 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + j^2\varepsilon_3 \\ \hline 3\Sigma_1 + 3\varepsilon_1 & 3\varepsilon_1 & 3\varepsilon_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3\Sigma_{\frac{m^2-1}{3}} + 3\varepsilon_1 & 3\varepsilon_1 & 3\varepsilon_1 \end{pmatrix},$$

et

$$(T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma)_q = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p c_{p,q} \\ \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + j^2\varepsilon_3 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p c_{p,q} \\ \varepsilon_1 + j^2\varepsilon_2 + j\varepsilon_3 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p c_{p,q} \\ \hline \vdots \\ 3\varepsilon_1 + \sum_{p=1}^{\frac{m^2-1}{3}} \gamma_p c_{i,p} c_{p,q} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

d'où l'expression des $P_\Gamma(t, u)_i$.

Série C — m divisible par 3

Calcul des séries $P_\Gamma(t, u)_i$:

On a

$$P_\Gamma(t, u) = T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma^{-2} v_{0,0}.$$

Tout d'abord,

$$T_\Gamma \Delta(t, u) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_4 & \beta_4 & \beta_4 & \beta_4 & \beta_4 & B^{(1)} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_4 & j\beta_4 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & j^2\beta_4 & B^{(2)} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & j^2\beta_4 & \beta_4 & \beta_4 & j\beta_4 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & \beta_4 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & \beta_4 & \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_4 & j^2\beta_4 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & j\beta_4 & B^{(3)} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & \beta_4 & j\beta_4 & j^2\beta_4 & \beta_4 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & j^2\beta_4 & j\beta_4 & j\beta_4 & \beta_4 & \beta_4 & j^2\beta_4 & \\ \hline 3\beta_1 & \beta_2 J_{l_1, l_2}^{(1)} & \beta_3 J_{l_1, l_2}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{C\Delta(t, u)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 3\beta_1 & \beta_2 J_{l_1, l_2}^{(1)} & \beta_3 J_{l_1, l_2}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right),$$

où le terme général de $\widetilde{C\Delta(t, u)}$ est

$$\gamma_j \left(\omega_m^{c_j^{(1)} d_i^{(1)} + c_j^{(2)} d_i^{(2)}} + \omega_m^{(-c_j^{(1)} - c_j^{(2)}) d_i^{(1)} + c_j^{(1)} d_i^{(2)}} + \omega_m^{c_j^{(2)} d_i^{(1)} + (-c_j^{(1)} - c_j^{(2)}) d_i^{(2)}} \right),$$

pour $j \in \llbracket 1, \frac{m^2}{3} - 1 \rrbracket$, et où le terme général de $B^{(i)} \in \mathbf{M}_{3, \frac{m^2}{3} - 1} \mathbb{C}$ est $\gamma_j j^{i(c_j^{(1)} - c_j^{(2)})}$ pour $j \in \llbracket 1, \frac{m^2}{3} - 1 \rrbracket$ et $i \in \{1, 2, 3\}$ (il ne dépend pas du numéro de ligne).

Le vecteur colonne $T_\Gamma^{-2} v_{0,0}$ est donné par

$$\begin{aligned} {}^t(T_\Gamma^{-2} v_{0,0}) &= \left(\frac{3(5(\frac{m}{3})^2 - 1) + 1}{3m^4}, \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4}, \frac{6(\frac{m}{3})^2 - 2}{3m^4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \right. \\ &\quad \underbrace{\frac{-3(\frac{m}{3})^2 + 1}{m^4}, \frac{-3(\frac{m}{3})^2 + 1}{m^4}, \frac{2(3(\frac{m}{3})^2 - 1)}{m^4}}_{\sigma}, \underbrace{\quad}_{\sigma}, \dots, \underbrace{\quad}_{\sigma}, \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\frac{\frac{m}{3}(\frac{m}{3}+1)}{2} - 1 \text{ blocs } \sigma} \\ &\quad \left. \frac{-3(\frac{m}{3})^2 + 1}{m^4}, \frac{-3(\frac{m}{3})^2 + 1}{m^4}, \underbrace{\quad}_{\sigma}, \dots, \underbrace{\quad}_{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$T_\Gamma \Delta(t, u) T_\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|c} L^{(11)} & L^{(12)} & L^{(13)} & L^{(14)} \\ \hline L^{(21)} & L^{(22)} & L^{(23)} & L^{(24)} \end{array} \right),$$

avec

$$L^{(11)} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3\Sigma^{(1)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 6\beta_4 & \Phi^{(11)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 6\beta_4 & \Phi^{(21)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 6\beta_4 \\ 3\Sigma^{(1)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3\beta_4 & \Phi^{(11)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3\beta_4 & \Phi^{(21)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3\beta_4 \\ 3\Sigma^{(1)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3\beta_4 & \Phi^{(11)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3\beta_4 & \Phi^{(21)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3\beta_4 \\ \hline 3\Sigma^{(2)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(12)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(22)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 3\Sigma^{(2)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(12)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(22)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 3\Sigma^{(2)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(12)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(22)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \hline 3\Sigma^{(3)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(13)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(23)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 3\Sigma^{(3)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(13)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(23)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 3\Sigma^{(3)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(13)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \Phi^{(23)} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{array} \right),$$

$$L^{(12)} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 \\ \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 + 3j\beta_4 \\ \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3j\beta_4 \\ \hline \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3j^2\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 \\ \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3j^2\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 + 3j^2\beta_4 \\ \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 + 6j^2\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3j^2\beta_4 \\ \hline \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3j\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3\beta_4 \\ \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 + 6j\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 \\ \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3j\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 + 3\beta_4 \end{array} \right),$$

$$L^{(13)} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 \\ \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 + 3j^2\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3j\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3j^2\beta_4 \\ \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3j^2\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 + 3j\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 + 3j^2\beta_4 \\ \hline \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 + 3\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 + 3j^2\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3\beta_4 \\ \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 + 3j^2\beta_4 + 3\beta_4 \\ \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3j^2\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 \\ \hline \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 + 3j\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 + 3\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 \\ \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3j\beta_4 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 - 3j\beta_4 \\ \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 + j^2\beta_3 - 3\beta_4 & \beta_1 + j^2\beta_2 + j\beta_3 + 3j\beta_4 \end{array} \right),$$

$$L^{(21)} = (L_1^{(21)}, L_2^{(21)}), \text{ avec}$$

$$L_1^{(21)} = \left(\begin{array}{cc} 3\beta_1 + \beta_2 J_1^{(1)} + \beta_3 J_1^{(2)} + 3\Sigma_1 & 3\beta_1 + \beta_2 J_1^{(1)} + \beta_3 J_1^{(2)} + 3\widetilde{\Sigma_1^{(1)}} \\ \vdots & \vdots \\ 3\beta_1 + \beta_2 J_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(1)} + \beta_3 J_1^{(2)} + 3\Sigma_{\frac{m_3^2}{3}-1} & 3\beta_1 + \beta_2 J_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(1)} + \beta_3 J_1^{(2)} + 3\widetilde{\Sigma_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(1)}} \end{array} \right),$$

et

$$L_2^{(21)} = \left(\begin{array}{c} 3\beta_1 + \beta_2 J_1^{(1)} + \beta_3 J_1^{(2)} + 3\widetilde{\Sigma_1^{(2)}} \\ \vdots \\ 3\beta_1 + \beta_2 J_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(1)} + \beta_3 J_1^{(2)} + 3\widetilde{\Sigma_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(2)}} \end{array} \right),$$

$$L^{(22)} = \left(\begin{array}{ccc} 3\beta_1 + j\beta_2 J_1^{(1)} + j^2\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j^2\beta_2 J_1^{(1)} + j\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j\beta_2 J_1^{(1)} + j^2\beta_3 J_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3\beta_1 + j\beta_2 J_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(1)} + j^2\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j^2\beta_2 J_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(1)} + j\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j\beta_2 J_{\frac{m_3^2}{3}-1}^{(1)} + j^2\beta_3 J_1^{(2)} \end{array} \right),$$

$$L^{(23)} = \begin{pmatrix} 3\beta_1 + j^2\beta_2 J_1^{(1)} + j\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j\beta_2 J_1^{(1)} + j^2\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j^2\beta_2 J_1^{(1)} + j\beta_3 J_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3\beta_1 + j^2\beta_2 J_{\frac{m^2}{3}-1}^{(1)} + j\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j\beta_2 J_{\frac{m^2}{3}-1}^{(1)} + j^2\beta_3 J_1^{(2)} & 3\beta_1 + j^2\beta_2 J_{\frac{m^2}{3}-1}^{(1)} + j\beta_3 J_1^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$L^{(14)} = (L_1^{(14)}, \dots, L_{\frac{m^2}{3}-1}^{(14)}), \text{ avec}$$

$$L_q^{(14)} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 3j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + 3j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k c_{k,q} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2j + j^2)j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + (2j^2 + j)j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k c_{k,q} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2j^2 + j)j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + (2j + j^2)j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k c_{k,q} \\ \hline \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2 + j)j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + (2j^2 + j)j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k j^{c_k^{(1)}-c_k^{(2)}} c_{k,q} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2j^2 + j)j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + (2 + j)j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k j^{c_k^{(1)}-c_k^{(2)}} c_{k,q} \\ \hline \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k j^{c_k^{(1)}-c_k^{(2)}} c_{k,q} \\ \hline \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2 + j^2)j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + (2j + j^2)j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k j^{2(c_k^{(1)}-c_k^{(2)})} c_{k,q} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k j^{2(c_k^{(1)}-c_k^{(2)})} c_{k,q} \\ \hline \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (2j + j^2)j^{c_q^{(1)}-c_q^{(2)}} \beta_4 + (2 + j^2)j^{2(c_q^{(1)}-c_q^{(2)})} \beta_4 + \sum_{k=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_k j^{2(c_k^{(1)}-c_k^{(2)})} c_{k,q} \end{pmatrix},$$

et le terme général de $L^{(24)}$ est

$$3\beta_1 + \beta_2 J_i^{(1)} + j\beta_3 J_i^{(2)} + \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p c_{i,p} c_{p,j},$$

avec

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \Sigma^{(i)} := \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} \gamma_p j^{(i-1)(c_p^{(1)}-c_p^{(1)})},$$

$$\forall (i, r) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}, \quad \Phi^{(i,r)} := \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} J_p^{(i)} \gamma_p j^{(r-1)(c_p^{(1)}-c_p^{(1)})},$$

et pour $r \in \{1, 2\}$,

$$\Sigma_i^{(r)} := \sum_{p=1}^{\frac{m^2}{3}-1} J_p^{(r)} \gamma_p \left(\omega_m^{c_p^{(1)}d_i^{(1)}+c_p^{(2)}d_i^{(2)}} + \omega_m^{(-c_p^{(1)}-c_p^{(2)})d_i^{(1)}+c_p^{(1)}d_i^{(2)}} + \omega_m^{c_p^{(2)}d_i^{(1)}+(-c_p^{(1)}-c_p^{(2)})d_i^{(2)}} \right).$$

On en déduit aussitôt l'expression des séries $P_\Gamma(t, u)_i$, en utilisant le vecteur ξ défini dans le Paragraphe 5.4.3.

ANNEXE C

Résultats pour les sous-groupes finis exceptionnels de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$

Pour tout sous-groupe fini exceptionnel de $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$ (types E, F, G, H, I, J, K, L), nous donnons l'expression des polynômes $N_\Gamma(t, u)_i$ et $D_\Gamma(t, u)_i$ tels que $P_\Gamma(t, u)_i = \frac{N_\Gamma(t, u)_i}{D_\Gamma(t, u)_i}$.

Dans tous les cas, le dénominateur est de la forme $\widetilde{D}_\Gamma(t, u)_i = \widetilde{D}_\Gamma(t)_i \widetilde{D}_\Gamma(u)_i$. De plus, nous prendrons le plus petit commun multiple $D_\Gamma(t)$ des $\widetilde{D}_\Gamma(t)_i$ pour que tous les dénominateurs aient la même forme $D_\Gamma(t)D_\Gamma(u)$, i. e.

$$\forall i \in \llbracket 0, l \rrbracket, \quad \boxed{P_\Gamma(t, u)_i = (1 - tu) \frac{M_\Gamma(t, u)_i}{D_\Gamma(t)D_\Gamma(u)}}.$$

C.1 Type E

$$D_E(t) = (t - 1)^3 (t^2 + t + 1)^3 (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1) (t + 1)^2 (t^2 - t + 1)^2$$

$$M_E(t, u)_0 = t^{18}u^{18} + t^{17}u^{17} - t^{18}u^{15} - t^{15}u^{18} + 2t^{16}u^{16} + t^{18}u^{12} + 5t^{15}u^{15} + t^{12}u^{18} + 2t^{17}u^{11} + 8t^{14}u^{14} + 2t^{11}u^{17} + t^{15}u^{12} + t^{12}u^{15} + 6t^{16}u^{10} + 13t^{13}u^{13} + 6t^{10}u^{16} + t^{18}u^6 + 8t^{15}u^9 + 15t^{12}u^{12} + 8t^9u^{15} + t^6u^{18} + 3t^{17}u^5 + 12t^{14}u^8 +$$

$$20t^{11}u^{11} + 12t^8u^{14} + 3t^5u^{17} - t^{18}u^3 + t^{15}u^6 + t^6u^{15} - t^3u^{18} + 4t^{16}u^4 + 14t^{13}u^7 + 18t^{10}u^{10} + 14t^7u^{13} + 4t^4u^{16} + t^{18} + 5t^{15}u^3 + 15t^{12}u^6 + 20t^9u^9 + 15t^6u^{12} + 5t^3u^{15} + u^{18} + 4t^{14}u^2 + 14t^{11}u^5 + 18t^8u^8 + 14t^5u^{11} + 4t^2u^{14} - t^{15} + t^{12}u^3 + t^3u^{12} - u^{15} + 3t^{13}u + 12t^{10}u^4 + 20t^7u^7 + 12t^4u^{10} + 3t^{13} + t^{12} + 8t^9u^3 + 15t^6u^6 + 8t^3u^9 + u^{12} + 6t^8u^2 + 13t^5u^5 + 6t^2u^8 + t^6u^3 + t^3u^6 + 2t^7u + 8t^4u^4 + 2tu^7 + t^6 + 5t^3u^3 + u^6 + 2t^2u^2 - t^3 - u^3 + tu + 1$$

$$M_E(t, u)_1 = -2(t^{16}u^{16} + t^{18}u^{12} + 2t^{15}u^{15} + t^{12}u^{18} + 2t^{17}u^{11} + 4t^{14}u^{14} + 2t^{11}u^{17} - t^{18}u^9 - t^9u^{18} + 3t^{16}u^{10} + 6t^{13}u^{13} + 3t^{10}u^{16} + t^{18}u^6 + 5t^{15}u^9 + 7t^{12}u^{12} + 5t^9u^{15} + t^6u^{18} + t^{17}u^5 + 6t^{14}u^8 + 8t^{11}u^{11} + 6t^8u^{14} + t^5u^{17} + t^{12}u^9 + t^9u^{12} + 2t^{16}u^4 + 8t^{13}u^7 + 9t^{10}u^{10} + 8t^7u^{13} + 2t^4u^{16} + 2t^{15}u^3 + 7t^{12}u^6 + 8t^9u^9 + 7t^6u^{12} + 2t^3u^{15} + 2t^{14}u^2 + 8t^{11}u^5 + 9t^8u^8 + 8t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + t^9u^6 + t^6u^9 + t^{13}u + 6t^{10}u^4 + 8t^7u^7 + 6t^4u^{10} + tu^{13} + t^{12} + 5t^9u^3 + 7t^6u^6 + 5t^3u^9 + u^{12} + 3t^8u^2 + 6t^5u^5 + 3t^2u^8 - t^9 - u^9 + 2t^7u + 4t^4u^4 + 2tu^7 + t^6 + 2t^3u^3 + u^6 + t^2u^2)$$

$$M_E(t, u)_2 = M_E(t, u)_3 = (t^{12}u^9 + t^9u^{12} + 2t^{11}u^8 + 2t^8u^{11} - t^{12}u^6 - t^6u^{12} + 5t^{10}u^7 + 5t^7u^{10} + t^{12}u^3 + 7t^9u^6 + 7t^6u^9 + t^3u^{12} + t^{11}u^2 + 10t^8u^5 + 10t^5u^8 + t^2u^{11} + 4t^6u^6 + t^{10}u + 10t^7u^4 + 10t^4u^7 + tu^{10} + t^9 + 7t^6u^3 + 7t^3u^6 + u^9 + 5t^5u^2 + 5t^2u^5 - t^6 - u^6 + 2t^4u + 2tu^4 + t^3 + u^3)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)$$

$$M_E(t, u)_4 = t^{17}u^{18} + 2t^{16}u^{17} + t^{17}u^{15} + 3t^{18}u^{13} + 6t^{15}u^{16} + 4t^{16}u^{14} + 3t^{13}u^{17} + 5t^{17}u^{12} + 12t^{14}u^{15} + 2t^{11}u^{18} + 7t^{15}u^{13} + 6t^{12}u^{16} + 12t^{16}u^{11} + 20t^{13}u^{14} + 6t^{10}u^{17} + 4t^{17}u^9 + 12t^{14}u^{12} + 10t^{11}u^{15} + 2t^{18}u^7 + 18t^{15}u^{10} + 27t^{12}u^{13} + 12t^9u^{16} + 6t^{16}u^8 + 14t^{13}u^{11} + 12t^{10}u^{14} + 2t^7u^{17} + 5t^{17}u^6 + 24t^{14}u^9 + 34t^{11}u^{12} + 18t^8u^{15} + 3t^5u^{18} + 10t^{15}u^7 + 18t^{12}u^{10} + 16t^9u^{13} + 6t^6u^{16} + 10t^{16}u^5 + 30t^{13}u^8 + 36t^{10}u^{11} + 24t^7u^{14} + 4t^4u^{17} + t^{17}u^3 + 12t^{14}u^6 + 16t^{11}u^9 + 18t^8u^{12} + 7t^5u^{15} + t^{18}u + 12t^{15}u^4 + 34t^{12}u^7 + 36t^9u^{10} + 27t^6u^{13} + 6t^3u^{16} + 2t^{16}u^2 + 13t^{13}u^5 + 18t^{10}u^8 + 20t^7u^{11} + 8t^4u^{14} + tu^{17} + t^{17} + 12t^{14}u^3 + 34t^{11}u^6 + 36t^8u^9 + 27t^5u^{12} + 6t^2u^{15} + t^{15}u + 12t^{12}u^4 + 16t^9u^7 + 18t^6u^{10} + 7t^3u^{13} + 10t^{13}u^2 + 30t^{10}u^5 + 36t^7u^8 + 24t^4u^{11} + 4tu^{14} + 10t^{11}u^3 + 18t^8u^6 + 16t^5u^9 + 6t^2u^{12} + 5t^{12}u + 24t^9u^4 + 34t^6u^7 + 18t^3u^{10} + 3u^{13} + 6t^{10}u^2 + 14t^7u^5 + 12t^4u^8 + 2tu^{11} + 2t^{11} + 18t^8u^3 + 27t^5u^6 + 12t^2u^9 + 4t^9u + 12t^6u^4 + 10t^3u^7 + 12t^7u^2 + 20t^4u^5 + 6tu^8 + 7t^5u^3 + 6t^2u^6 + 5t^6u + 12t^3u^4 + 2u^7 + 4t^4u^2 + 3tu^5 + 3t^5 + 6t^2u^3 + t^3u + 2tu^2 + u$$

$$M_E(t, u)_5 = M_E(u, t)_4$$

$$M_E(t, u)_6 = -2(t^{16}u^{17} + t^{17}u^{15} + t^{18}u^{13} + 3t^{15}u^{16} + 2t^{16}u^{14} + t^{13}u^{17} + 3t^{17}u^{12} + 6t^{14}u^{15} + 2t^{11}u^{18} + 4t^{15}u^{13} + 3t^{12}u^{16} + 6t^{16}u^{11} + 10t^{13}u^{14} + 3t^{10}u^{17} + t^{17}u^9 + 6t^{14}u^{12} + 4t^{11}u^{15} + 2t^{18}u^7 + 9t^{15}u^{10} + 14t^{12}u^{13} + 6t^9u^{16} + 3t^{16}u^8 + 8t^{13}u^{11} + 6t^{10}u^{14} + 2t^7u^{17} + 3t^{17}u^6 + 12t^{14}u^9 + 16t^{11}u^{12} + 9t^8u^{15} + t^5u^{18} + 4t^{15}u^7 + 9t^{12}u^{10} + 7t^9u^{13} + 3t^6u^{16} + 5t^{16}u^5 + 15t^{13}u^8 + 18t^{10}u^{11} + 12t^7u^{14} + 2t^4u^{17} + t^{17}u^3 + 6t^{14}u^6 + 10t^{11}u^9 + 9t^8u^{12} + 4t^5u^{15} + 6t^{15}u^4 + 16t^{12}u^7 + 18t^9u^{10} + 14t^6u^{13} + 3t^3u^{16} + t^{16}u^2 + 6t^{13}u^5 + 9t^{10}u^8 + 8t^7u^{11} + 4t^4u^{14} + 6t^{14}u^3 + 16t^{11}u^6 + 18t^8u^9 + 14t^5u^{12} + 3t^2u^{15} + t^{15}u + 6t^{12}u^4 + 10t^9u^7 + 9t^6u^{10} + 4t^3u^{13} + 5t^{13}u^2 + 15t^{10}u^5 + 18t^7u^8 + 12t^4u^{11} + 2tu^{14} + 4t^{11}u^3 + 9t^8u^6 + 7t^5u^9 + 3t^2u^{12} + 3t^{12}u + 12t^9u^4 + 16t^6u^7 + 9t^3u^{10} + u^{13} + 3t^{10}u^2 + 8t^7u^5 + 6t^4u^8 + 2tu^{11} + 2t^{11} + 9t^8u^3 + 14t^5u^6 + 6t^2u^9 + t^9u + 6t^6u^4 + 4t^3u^7 + 6t^7u^2 + 10t^4u^5 + 3tu^8 + 4t^5u^3 + 3t^2u^6 + 3t^6u + 6t^3u^4 + 2u^7 + 2t^4u^2 + tu^5 + t^5 + 3t^2u^3 + t^3u + tu^2)$$

$$M_E(t, u)_7 = M_E(u, t)_6$$

$$M_E(t, u)_8 = M_E(t, u)_9 = (t^{12}u^{10} + t^{10}u^{11} + 3t^{11}u^9 + 2t^8u^{12} + 3t^9u^{10} + 8t^{10}u^8 + 5t^7u^{11} + 3t^{11}u^6 + 6t^8u^9 + 2t^{12}u^4 + 15t^9u^7 + 10t^6u^{10} + 5t^{10}u^5 + 10t^7u^8 + 2t^4u^{11} + 3t^{11}u^3 + 20t^8u^6 + 15t^5u^9 + t^2u^{12} + 6t^9u^4 + 15t^6u^7 + 3t^3u^{10} + 4t^{10}u^2 + 25t^7u^5 + 16t^4u^8 + tu^{11} + 6t^8u^3 + 15t^5u^6 + 3t^2u^9 + 3t^9u + 20t^6u^4 + 15t^3u^7 + u^{10} + 5t^7u^2 + 10t^4u^5 + 2tu^8 + 2t^8 + 15t^5u^3 + 10t^2u^6 + 3t^6u + 6t^3u^4 + 8t^4u^2 + 5tu^5 + 3t^2u^3 + 3t^3u + 2u^4 + tu^2 + t^2)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)$$

$$M_E(t, u)_{10} = M_E(t, u)_{11} = M_E(u, t)_8$$

$$M_E(t, u)_{12} = M_E(t, u)_{13} = (t^2u + u^2 + t)(t^2u^2 + tu + 1)(tu^2 + t^2 + u)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(u + 1)^2(u^2 - u + 1)^2(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$P_E(t, 0)_0 = P_E(0, t)_0 = \frac{-t^{18} + t^{15} - t^{12} - t^6 + t^3 - 1}{(t - 1)^3(t^2 + t + 1)^3(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2}.$$

C.2 Type F

$$D_F(t) = (t - 1)^3(t^2 + t + 1)^3(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2$$

$$M_F(t, u)_0 = t^{18}u^{18} + t^{17}u^{17} - t^{18}u^{15} - t^{15}u^{18} + t^{16}u^{16} + 3t^{15}u^{15} + 4t^{14}u^{14} + t^{18}u^9 + t^{15}u^{12} + t^{12}u^{15} + t^9u^{18} + 3t^{16}u^{10} + 7t^{13}u^{13} + 3t^{10}u^{16} + 3t^{15}u^9 + 8t^{12}u^{12} + 3t^9u^{15} + 2t^{17}u^5 + 6t^{14}u^8 + 12t^{11}u^{11} + 6t^8u^{14} + 2t^5u^{17} - t^{18}u^3 + t^{15}u^6 - t^{12}u^9 - t^9u^{12} + t^6u^{15} - t^3u^{18} + 2t^{16}u^4 + 6t^{13}u^7 + 9t^{10}u^{10} + 6t^7u^{13} + 2t^4u^{16} + t^{18} + 3t^{15}u^3 + 8t^{12}u^6 + 12t^9u^9 + 8t^6u^{12} + 3t^3u^{15} + u^{18} + 2t^{14}u^2 + 6t^{11}u^5 + 9t^8u^8 + 6t^5u^{11} + 2t^2u^{14} - t^{15} + t^{12}u^3 - t^9u^6 - t^6u^9 + t^3u^{12} - u^{15} + 2t^{13}u + 6t^{10}u^4 + 12t^7u^7 +$$

$$6t^4u^{10} + 2tu^{13} + 3t^9u^3 + 8t^6u^6 + 3t^3u^9 + 3t^8u^2 + 7t^5u^5 + 3t^2u^8 + t^9 + t^6u^3 + t^3u^6 + u^9 + 4t^4u^4 + 3t^3u^3 + t^2u^2 - t^3 - u^3 + tu + 1$$

$$M_F(t, u)_1 = M_F(t, u)_2 = M_F(t, u)_3 = t^{16}u^{16} + t^{18}u^{12} + 2t^{15}u^{15} + t^{12}u^{18} + 2t^{17}u^{11} + 4t^{14}u^{14} + 2t^{11}u^{17} - t^{18}u^9 - t^9u^{18} + 3t^{16}u^{10} + 6t^{13}u^{13} + 3t^{10}u^{16} + t^{18}u^6 + 5t^{15}u^9 + 7t^{12}u^{12} + 5t^9u^{15} + t^6u^{18} + t^{17}u^5 + 6t^{14}u^8 + 8t^{11}u^{11} + 6t^8u^{14} + t^5u^{17} + t^{12}u^9 + t^9u^{12} + 2t^{16}u^4 + 8t^{13}u^7 + 9t^{10}u^{10} + 8t^7u^{13} + 2t^4u^{16} + 2t^{15}u^3 + 7t^{12}u^6 + 8t^9u^9 + 7t^6u^{12} + 2t^3u^{15} + 2t^{14}u^2 + 8t^{11}u^5 + 9t^8u^8 + 8t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + t^9u^6 + t^6u^9 + t^{13}u + 6t^{10}u^4 + 8t^7u^7 + 6t^4u^{10} + tu^{13} + t^{12} + 5t^9u^3 + 7t^6u^6 + 5t^3u^9 + u^{12} + 3t^8u^2 + 6t^5u^5 + 3t^2u^8 - t^9 - u^9 + 2t^7u + 4t^4u^4 + 2tu^7 + t^6 + 2t^3u^3 + u^6 + t^2u^2$$

$$M_F(t, u)_4 = (t^{12}u^9 + t^9u^{12} + 2t^{11}u^8 + 2t^8u^{11} - t^{12}u^6 - t^6u^{12} + 5t^{10}u^7 + 5t^7u^{10} + t^{12}u^3 + 7t^9u^6 + 7t^6u^9 + t^3u^{12} + t^{11}u^2 + 10t^8u^5 + 10t^5u^8 + t^2u^{11} + 4t^6u^6 + t^{10}u + 10t^7u^4 + 10t^4u^7 + tu^{10} + t^9 + 7t^6u^3 + 7t^3u^6 + u^9 + 5t^5u^2 + 5t^2u^5 - t^6 - u^6 + 2t^4u + 2tu^4 + t^3 + u^3)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)$$

$$M_F(t, u)_5 = M_F(t, u)_7 = M_F(t, u)_9 = t^{17}u^{16} + t^{15}u^{17} + 3t^{16}u^{15} + t^{13}u^{18} + t^{17}u^{13} + 2t^{14}u^{16} + 2t^{18}u^{11} + 6t^{15}u^{14} + 3t^{12}u^{17} + 3t^{16}u^{12} + 4t^{13}u^{15} + 3t^{17}u^{10} + 10t^{14}u^{13} + 6t^{11}u^{16} + 4t^{15}u^{11} + 6t^{12}u^{14} + t^9u^{17} + 6t^{16}u^9 + 14t^{13}u^{12} + 9t^{10}u^{15} + 2t^7u^{18} + 2t^{17}u^7 + 6t^{14}u^{10} + 8t^{11}u^{13} + 3t^8u^{16} + t^{18}u^5 + 9t^{15}u^8 + 16t^{12}u^{11} + 12t^9u^{14} + 3t^6u^{17} + 3t^{16}u^6 + 7t^{13}u^9 + 9t^{10}u^{12} + 4t^7u^{15} + 2t^{17}u^4 + 12t^{14}u^7 + 18t^{11}u^{10} + 15t^8u^{13} + 5t^5u^{16} + 4t^{15}u^5 + 9t^{12}u^8 + 10t^9u^{11} + 6t^6u^{14} + t^3u^{17} + 3t^{16}u^3 + 14t^{13}u^6 + 18t^{10}u^9 + 16t^7u^{12} + 6t^4u^{15} + 4t^{14}u^4 + 8t^{11}u^7 + 9t^8u^{10} + 6t^5u^{13} + t^2u^{16} + 3t^{15}u^2 + 14t^{12}u^5 + 18t^9u^8 + 16t^6u^{11} + 6t^3u^{14} + 4t^{13}u^3 + 9t^{10}u^6 + 10t^7u^9 + 6t^4u^{12} + tu^{15} + 2t^{14}u + 12t^{11}u^4 + 18t^8u^7 + 15t^5u^{10} + 5t^2u^{13} + 3t^{12}u^2 + 7t^9u^5 + 9t^6u^8 + 4t^3u^{11} + t^{13} + 9t^{10}u^3 + 16t^7u^6 + 12t^4u^9 + 3tu^{12} + 2t^{11}u + 6t^8u^4 + 8t^5u^7 + 3t^2u^{10} + 6t^9u^2 + 14t^6u^5 + 9t^3u^8 + 2u^{11} + 4t^7u^3 + 6t^4u^6 + tu^9 + 3t^8u + 10t^5u^4 + 6t^2u^7 + 3t^6u^2 + 4t^3u^5 + 2t^7 + 6t^4u^3 + 3tu^6 + t^5u + 2t^2u^4 + 3t^3u^2 + u^5 + tu^3 + t^2u$$

$$M_F(t, u)_6 = M_F(t, u)_8 = M_F(t, u)_{10} = M_F(u, t)_5$$

$$M_F(t, u)_{11} = t^{18}u^{17} + t^{17}u^{16} + 3t^{16}u^{15} + 2t^{13}u^{18} + 2t^{17}u^{13} + 2t^{14}u^{16} + 6t^{15}u^{14} + 2t^{12}u^{17} + 3t^{16}u^{12} + 3t^{13}u^{15} + 3t^{17}u^{10} + 10t^{14}u^{13} + 6t^{11}u^{16} + 6t^{15}u^{11} + 6t^{12}u^{14} + 3t^9u^{17} + 6t^{16}u^9 + 13t^{13}u^{12} + 9t^{10}u^{15} + 6t^{14}u^{10} + 6t^{11}u^{13} + 3t^8u^{16} + 2t^{18}u^5 + 9t^{15}u^8 + 18t^{12}u^{11} + 12t^9u^{14} + 2t^6u^{17} + 3t^{16}u^6 + 9t^{13}u^9 + 9t^{10}u^{12} + 6t^7u^{15} + 2t^{17}u^4 + 12t^{14}u^7 + 18t^{11}u^{10} + 15t^8u^{13} + 5t^5u^{16} + 3t^{15}u^5 + 9t^{12}u^8 + 6t^9u^{11} + 6t^6u^{14} + 3t^{16}u^3 + 13t^{13}u^6 + 18t^{10}u^9 + 18t^7u^{12} + 6t^4u^{15} + tu^{18} + t^{17}u + 4t^{14}u^4 + 12t^{11}u^7 + 9t^8u^{10} + 7t^5u^{13} + t^2u^{16} + 3t^{15}u^2 + 13t^{12}u^5 + 18t^9u^8 + 18t^6u^{11} + 6t^3u^{14} + u^{17} + 3t^{13}u^3 + 9t^{10}u^6 + 6t^7u^9 + 6t^4u^{12} + 2t^{14}u + 12t^{11}u^4 + 18t^8u^7 + 15t^5u^{10} + 5t^2u^{13} + 3t^{12}u^2 + 9t^9u^5 + 9t^6u^8 + 6t^3u^{11} + 2t^{13} + 9t^{10}u^3 + 18t^7u^6 + 12t^4u^9 + 2tu^{12} + 6t^8u^4 + 6t^5u^7 + 3t^2u^{10} + 6t^9u^2 + 13t^6u^5 + 9t^3u^8 + 6t^7u^3 + 6t^4u^6 + 3tu^9 + 3t^8u + 10t^5u^4 + 6t^2u^7 + 3t^6u^2 + 3t^3u^5 + 6t^4u^3 + 2tu^6 + 2t^5u + 2t^2u^4 + 3t^3u^2 + 2u^5 + t^2u + t$$

$$M_F(t, u)_{12} = M_F(u, t)_{11}$$

$$M_F(t, u)_{13} = (t^{10}u^{12} + t^{11}u^{10} + 2t^{12}u^8 + 3t^9u^{11} + 3t^{10}u^9 + 5t^{11}u^7 + 8t^8u^{10} + 6t^9u^8 + 3t^6u^{11} + 10t^{10}u^6 + 15t^7u^9 + 2t^4u^{12} + 2t^{11}u^4 + 10t^8u^7 + 5t^5u^{10} + t^{12}u^2 + 15t^9u^5 + 20t^6u^8 + 3t^3u^{11} + 3t^{10}u^3 + 15t^7u^6 + 6t^4u^9 + t^{11}u + 16t^8u^4 + 25t^5u^7 + 4t^2u^{10} + 3t^9u^2 + 15t^6u^5 + 6t^3u^8 + t^{10} + 15t^7u^3 + 20t^4u^6 + 3tu^9 + 2t^8u + 10t^5u^4 + 5t^2u^7 + 10t^6u^2 + 15t^3u^5 + 2u^8 + 6t^4u^3 + 3tu^6 + 5t^5u + 8t^2u^4 + 3t^3u^2 + 2t^4 + 3tu^3 + t^2u + u^2)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)$$

$$M_F(t, u)_{14} = M_F(u, t)_{13}$$

$$M_F(t, u)_{15} = (tu^2 + t^2 + u)(t^2u^2 + tu + 1)(t^2u + u^2 + t)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(u + 1)^2(u^2 - u + 1)^2(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$P_F(t, 0)_0 = P_F(0, t)_0 = \frac{-t^{18} + t^{15} - t^9 + t^3 - 1}{(t - 1)^3(t^2 + t + 1)^3(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2}.$$

C.3 Type G

$$D_G(t) = (t - 1)^3(t^6 - t^3 + 1)(t^2 + t + 1)^3(t + 1)^2(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t^2 - t + 1)^2(t^6 + t^3 + 1)^2$$

$$M_G(t, u)_0 = t^{36}u^{36} + t^{35}u^{35} + t^{34}u^{34} + 2t^{33}u^{33} + 3t^{32}u^{32} + t^{33}u^{30} + t^{30}u^{33} + t^{34}u^{28} + 4t^{31}u^{31} + t^{28}u^{34} + t^{35}u^{26} + t^{32}u^{29} + t^{29}u^{32} + t^{26}u^{35} + 2t^{33}u^{27} + 7t^{30}u^{30} + 2t^{27}u^{33} + 2t^{34}u^{25} + 3t^{31}u^{28} + 3t^{28}u^{31} + 2t^{25}u^{34} + 4t^{32}u^{26} + 10t^{29}u^{29} + 4t^{26}u^{32} + 4t^{33}u^{24} + 5t^{30}u^{27} + 5t^{27}u^{30} + 4t^{24}u^{33} + 2t^{34}u^{22} + 7t^{31}u^{25} + 14t^{28}u^{28} + 7t^{25}u^{31} + 2t^{22}u^{34} + t^{35}u^{20} + 7t^{32}u^{23} + 8t^{29}u^{26} + 8t^{26}u^{29} + 7t^{23}u^{32} + t^{20}u^{35} + t^{36}u^{18} + 3t^{33}u^{21} + 10t^{30}u^{24} + 19t^{27}u^{27} + 10t^{24}u^{30} + 3t^{21}u^{33} + t^{18}u^{36} + 2t^{34}u^{19} + 10t^{31}u^{22} + 12t^{28}u^{25} + 12t^{25}u^{28} + 10t^{22}u^{31} + 2t^{19}u^{34} + 3t^{35}u^{17} + 6t^{32}u^{20} + 15t^{29}u^{23} + 24t^{26}u^{26} + 15t^{23}u^{29} + 6t^{20}u^{32} + 3t^{17}u^{35} + 3t^{33}u^{18} + 13t^{30}u^{21} + 17t^{27}u^{24} + 17t^{24}u^{27} + 13t^{21}u^{30} + 3t^{18}u^{33} + 5t^{34}u^{16} + 9t^{31}u^{19} + 20t^{28}u^{22} + 30t^{25}u^{25} + 20t^{22}u^{28} + 9t^{19}u^{31} + 5t^{16}u^{34} + 6t^{32}u^{17} + 19t^{29}u^{20} + 21t^{26}u^{23} + 21t^{23}u^{26} + 19t^{20}u^{29} + 6t^{17}u^{32} + 7t^{33}u^{15} + 12t^{30}u^{18} + 26t^{27}u^{21} + 37t^{24}u^{24} + 26t^{21}u^{27} + 12t^{18}u^{30} + 7t^{15}u^{33} + t^{34}u^{13} + 9t^{31}u^{16} + 23t^{28}u^{19} + 26t^{25}u^{22} + 26t^{22}u^{25} + 23t^{19}u^{28} + 9t^{16}u^{31} +$$

$$\begin{aligned}
& t^{13}u^{34} + 2t^{35}u^{11} + 9t^{32}u^{14} + 15t^{29}u^{17} + 32t^{26}u^{20} + 44t^{23}u^{23} + 32t^{20}u^{26} + 15t^{17}u^{29} + 9t^{14}u^{32} + 2t^{11}u^{35} + 2t^{33}u^{12} + \\
& 11t^{30}u^{15} + 27t^{27}u^{18} + 31t^{24}u^{21} + 31t^{21}u^{24} + 27t^{18}u^{27} + 11t^{15}u^{30} + 2t^{12}u^{33} + 3t^{34}u^{10} + 11t^{31}u^{13} + 19t^{28}u^{16} + 38t^{25}u^{19} + \\
& 49t^{22}u^{22} + 38t^{19}u^{25} + 19t^{16}u^{28} + 11t^{13}u^{31} + 3t^{10}u^{34} + t^{35}u^8 + 2t^{32}u^{11} + 15t^{29}u^{14} + 31t^{26}u^{17} + 34t^{23}u^{20} + 34t^{20}u^{23} + \\
& 31t^{17}u^{26} + 15t^{14}u^{29} + 2t^{11}u^{32} + t^8u^{35} + 4t^{33}u^9 + 14t^{30}u^{12} + 22t^{27}u^{15} + 42t^{24}u^{18} + 56t^{21}u^{21} + 42t^{18}u^{24} + 22t^{15}u^{27} + \\
& 14t^{12}u^{30} + 4t^9u^{33} + t^{34}u^7 + 3t^{31}u^{10} + 17t^{28}u^{13} + 34t^{25}u^{16} + 38t^{22}u^{19} + 38t^{19}u^{22} + 34t^{16}u^{25} + 17t^{13}u^{28} + 3t^{10}u^{31} + \\
& t^7u^{34} + 5t^{32}u^8 + 15t^{29}u^{11} + 26t^{26}u^{14} + 46t^{23}u^{17} + 59t^{20}u^{20} + 46t^{17}u^{23} + 26t^{14}u^{26} + 15t^{11}u^{29} + 5t^8u^{32} + 2t^{33}u^6 + 4t^{30}u^9 + \\
& 19t^{27}u^{12} + 35t^{24}u^{15} + 42t^{21}u^{18} + 42t^{18}u^{21} + 35t^{15}u^{24} + 19t^{12}u^{27} + 4t^9u^{30} + 2t^6u^{33} + 5t^{31}u^7 + 16t^{28}u^{10} + 28t^{25}u^{13} + \\
& 47t^{22}u^{16} + 63t^{19}u^{19} + 47t^{16}u^{22} + 28t^{13}u^{25} + 16t^{10}u^{28} + 5t^7u^{31} + 2t^{32}u^5 + 4t^{29}u^8 + 20t^{26}u^{11} + 37t^{23}u^{14} + 41t^{20}u^{17} + \\
& 41t^{17}u^{20} + 37t^{14}u^{23} + 20t^{11}u^{26} + 4t^8u^{29} + 2t^5u^{32} + t^{36} + 5t^{30}u^6 + 17t^{27}u^9 + 29t^{24}u^{12} + 48t^{21}u^{15} + 64t^{18}u^{18} + 48t^{15}u^{21} + \\
& 29t^{12}u^{24} + 17t^9u^{27} + 5t^6u^{30} + u^{36} + 2t^{31}u^4 + 4t^{28}u^7 + 20t^{25}u^{10} + 37t^{22}u^{13} + 41t^{19}u^{16} + 41t^{16}u^{19} + 37t^{13}u^{22} + 20t^{10}u^{25} + \\
& 4t^7u^{28} + 2t^4u^{31} + 5t^{29}u^5 + 16t^{26}u^8 + 28t^{23}u^{11} + 47t^{20}u^{14} + 63t^{17}u^{17} + 47t^{14}u^{20} + 28t^{11}u^{23} + 16t^8u^{26} + 5t^5u^{29} + 2t^{30}u^3 + \\
& 4t^{27}u^6 + 19t^{24}u^9 + 35t^{21}u^{12} + 42t^{18}u^{15} + 42t^{15}u^{18} + 35t^{12}u^{21} + 19t^{9}u^{24} + 4t^6u^{27} + 2t^3u^{30} + 5t^{28}u^4 + 15t^{25}u^7 + 26t^{22}u^{10} + \\
& 46t^{19}u^{13} + 59t^{16}u^{16} + 46t^{13}u^{19} + 26t^{10}u^{22} + 15t^7u^{25} + 5t^4u^{28} + t^2u^{31} + 3t^{26}u^5 + 17t^{23}u^8 + 34t^{20}u^{11} + 38t^{17}u^{14} + 38t^{14}u^{17} + \\
& 34t^{11}u^{20} + 17t^8u^{23} + 3t^5u^{26} + t^2u^{29} + 4t^{27}u^3 + 14t^{24}u^6 + 22t^{21}u^9 + 42t^{18}u^{12} + 56t^{15}u^{15} + 42t^{12}u^{18} + 22t^9u^{21} + 14t^6u^{24} + \\
& 4t^3u^{27} + t^2u^8 + 2t^{25}u^7 + 15t^{22}u^7 + 31t^{19}u^{10} + 34t^{16}u^{13} + 34t^{13}u^{16} + 31t^{10}u^{19} + 15t^7u^{22} + 2t^4u^{25} + t^{38} + 3t^{26}u^2 + \\
& 11t^{23}u^5 + 19t^{20}u^8 + 38t^{17}u^{11} + 49t^{14}u^{14} + 38t^{11}u^{17} + 19t^8u^{20} + 11t^{5}u^{23} + 3t^2u^{26} + 2t^{24}u^3 + 11t^{21}u^6 + 27t^{18}u^9 + 31t^{15}u^{12} + \\
& 31t^{12}u^{15} + 27t^9u^{18} + 11t^6u^{21} + 2t^3u^{24} + 2t^{25}u + 9t^{22}u^4 + 15t^{19}u^7 + 32t^{16}u^{10} + 44t^{13}u^{13} + 32t^{10}u^{16} + 15t^7u^{19} + 9t^4u^{22} + \\
& 2tu^{25} + t^{23}u^2 + 9t^{20}u^5 + 23t^{17}u^8 + 26t^{14}u^{11} + 26t^{11}u^{14} + 23t^8u^{17} + 9t^5u^{20} + t^2u^{23} + 7t^{21}u^3 + 12t^{18}u^6 + 26t^{15}u^9 + \\
& 37t^{12}u^{12} + 26t^9u^{15} + 12t^6u^{18} + 7t^3u^{21} + 6t^{19}u^4 + 19t^{16}u^7 + 21t^{13}u^{10} + 21t^{10}u^{13} + 19t^7u^{16} + 6t^4u^{19} + 5t^{20}u^2 + 9t^{17}u^5 + \\
& 20t^{14}u^8 + 30t^{11}u^{11} + 20t^8u^{14} + 9t^5u^{17} + 5t^2u^{20} + 3t^{18}u^3 + 13t^{15}u^6 + 17t^{12}u^9 + 17t^9u^{12} + 13t^6u^{15} + 3t^3u^{18} + 3t^{19}u + \\
& 6t^{16}u^4 + 15t^{13}u^7 + 24t^{10}u^{10} + 15t^7u^{13} + 6t^4u^{16} + 3tu^{19} + 2t^{17}u^2 + 10t^{14}u^5 + 12t^{11}u^8 + 12t^8u^{11} + 10t^5u^{14} + 2t^{12}u^{17} + t^{18} + \\
& 3t^{15}u^3 + 10t^{12}u^6 + 19t^9u^9 + 10t^6u^{12} + 3t^3u^{15} + u^{18} + t^{16}u + 7t^{13}u^4 + 8t^{10}u^7 + 8t^7u^{10} + 7t^4u^{13} + tu^{16} + 2t^{14}u^2 + 7t^{11}u^5 + \\
& 14t^8u^8 + 7t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + 4t^{12}u^3 + 5t^9u^6 + 5t^6u^9 + 4t^3u^{12} + 4t^{10}u^4 + 10t^7u^7 + 4t^4u^{10} + 2t^{11}u^2 + 3t^8u^5 + 3t^5u^8 + \\
& 2t^2u^{11} + 2t^9u^3 + 7t^6u^6 + 2t^3u^9 + t^{10}u + t^7u^4 + t^4u^7 + tu^{10} + t^8u^2 + 4t^5u^5 + t^2u^8 + t^6u^3 + t^3u^6 + 3t^4u^4 + 2t^3u^3 + t^2u^2 + tu + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_1 = & t^{35}u^{32} + t^{30}u^{36} + t^{34}u^{31} + t^{32}u^{32} + 2t^{29}u^{35} + 2t^{33}u^{30} + t^{34}u^{28} + 2t^{31}u^{31} + 3t^{28}u^{34} + 4t^{32}u^{29} + t^{29}u^{32} + \\
& 2t^{36}u^{24} + 2t^{33}u^{27} + 3t^{30}u^{30} + 5t^{27}u^{33} + t^{34}u^{25} + 6t^{31}u^{28} + 3t^{28}u^{31} + t^{25}u^{34} + 3t^{35}u^{23} + 4t^{32}u^{26} + 5t^{29}u^{29} + 7t^{26}u^{32} + \\
& t^{23}u^{35} + 2t^{33}u^{24} + 8t^{30}u^{27} + 5t^{27}u^{30} + 3t^{24}u^{33} + 5t^{34}u^{22} + 7t^{31}u^{25} + 9t^{28}u^{28} + 10t^{25}u^{31} + 3t^{22}u^{34} + 4t^{32}u^{23} + 12t^{29}u^{26} + \\
& 8t^{26}u^{29} + 3t^{23}u^{32} + 2t^{20}u^{35} + 8t^{33}u^{21} + 10t^{30}u^{24} + 13t^{27}u^{27} + 15t^{24}u^{30} + 5t^{21}u^{33} + t^{34}u^{19} + 7t^{31}u^{22} + 16t^{28}u^{25} + \\
& 12t^{25}u^{28} + 6t^{22}u^{31} + 3t^{19}u^{34} + 2t^{35}u^{17} + 11t^{32}u^{20} + 13t^{29}u^{23} + 19t^{26}u^{26} + 20t^{23}u^{29} + 8t^{20}u^{32} + 3t^{33}u^{18} + 11t^{30}u^{21} + \\
& 20t^{27}u^{24} + 17t^{24}u^{27} + 9t^{21}u^{30} + 6t^{18}u^{33} + 4t^{34}u^{16} + 14t^{31}u^{19} + 18t^{28}u^{22} + 25t^{25}u^{25} + 25t^{22}u^{28} + 11t^{19}u^{31} + 12t^{16}u^{34} + \\
& t^{35}u^{14} + 3t^{32}u^{17} + 15t^{29}u^{20} + 26t^{26}u^{23} + 22t^{23}u^{26} + 12t^{20}u^{29} + 8t^{17}u^{32} + t^{14}u^{35} + 6t^{33}u^{15} + 19t^{30}u^{18} + 23t^{27}u^{21} + \\
& 30t^{24}u^{24} + 32t^{21}u^{27} + 15t^{18}u^{30} + 3t^{15}u^{33} + 2t^{12}u^{36} + 2t^{34}u^{13} + 6t^{31}u^{16} + 19t^{28}u^{19} + 31t^{25}u^{22} + 27t^{22}u^{25} + 16t^{19}u^{28} + \\
& 11t^{16}u^{31} + 2t^{13}u^{34} + 8t^{32}u^{14} + 23t^{29}u^{17} + 29t^{26}u^{20} + 36t^{23}u^{23} + 37t^{20}u^{26} + 20t^{17}u^{29} + 5t^{14}u^{32} + 2t^{11}u^{35} + 4t^{33}u^{12} + \\
& 9t^{30}u^{15} + 24t^{27}u^{18} + 35t^{24}u^{21} + 33t^{21}u^{24} + 21t^{18}u^{27} + 13t^{15}u^{30} + 3t^{12}u^{33} + t^{34}u^{10} + 10t^{31}u^{13} + 27t^{28}u^{16} + 35t^{25}u^{19} + \\
& 41t^{22}u^{22} + 43t^{19}u^{25} + 24t^{16}u^{28} + 7t^{13}u^{31} + 3t^{10}u^{34} + t^{35}u^8 + 5t^{32}u^{11} + 11t^{29}u^{14} + 28t^{26}u^{17} + 42t^{23}u^{20} + 36t^{20}u^{23} + \\
& 24t^{17}u^{26} + 16t^{14}u^{29} + 5t^{11}u^{32} + t^{36}u^6 + t^{33}u^9 + 12t^{30}u^{12} + 31t^{27}u^{15} + 39t^{24}u^{18} + 45t^{21}u^{21} + 47t^{18}u^{24} + 28t^{15}u^{27} + \\
& 9t^{12}u^{30} + 4t^9u^{33} + t^{34}u^7 + 6t^{31}u^{10} + 13t^{28}u^{13} + 31t^{25}u^{16} + 46t^{22}u^{19} + 40t^{19}u^{22} + 27t^{16}u^{25} + 18t^{13}u^{28} + 6t^{10}u^{31} + t^{35}u^5 + \\
& 2t^{32}u^8 + 15t^{29}u^{11} + 33t^{26}u^{14} + 42t^{23}u^{17} + 49t^{20}u^{20} + 52t^{17}u^{23} + 31t^{14}u^{26} + 10t^{11}u^{29} + 5t^8u^{32} + t^5u^{35} + t^{33}u^6 + 7t^{30}u^9 + \\
& 16t^{27}u^{12} + 33t^{24}u^{15} + 48t^{21}u^{18} + 42t^{18}u^{21} + 31t^{15}u^{24} + 19t^{12}u^{27} + 7t^9u^{30} + t^{34}u^4 + 2t^{31}u^7 + 16t^{28}u^{10} + 35t^{25}u^{13} + \\
& 43t^{22}u^{16} + 53t^{19}u^{19} + 53t^{16}u^{22} + 33t^{13}u^{25} + 11t^{10}u^{28} + 5t^7u^{31} + t^4u^{34} + 2t^{32}u^5 + 8t^{29}u^8 + 16t^{26}u^{11} + 35t^{23}u^{14} + 51t^{20}u^{17} + \\
& 43t^{17}u^{20} + 31t^{14}u^{23} + 20t^{11}u^{26} + 8t^8u^{29} + t^{33}u^3 + 2t^{30}u^6 + 17t^{27}u^9 + 36t^{24}u^{12} + 43t^{21}u^{15} + 54t^{18}u^{18} + 55t^{15}u^{21} + \\
& 32t^{12}u^{24} + 11t^9u^{27} + 6t^6u^{30} + t^{33}u^{33} + 2t^{31}u^4 + 8t^{28}u^7 + 16t^{25}u^{10} + 35t^{22}u^{13} + 51t^{19}u^{16} + 43t^{16}u^{19} + 31t^{13}u^{22} + 20t^{10}u^{25} + \\
& 8t^7u^{28} + t^{32}u^2 + 2t^{29}u^5 + 16t^{26}u^8 + 35t^{23}u^{11} + 43t^{20}u^{14} + 53t^{17}u^{17} + 53t^{14}u^{20} + 33t^{11}u^{23} + 11t^8u^{26} + 5t^5u^{29} + t^2u^{32} + \\
& t^{30}u^3 + 7t^{27}u^6 + 16t^{24}u^9 + 33t^{21}u^{12} + 48t^{18}u^{15} + 42t^{15}u^{18} + 31t^{12}u^{21} + 19t^9u^{24} + 7t^6u^{27} + t^{31}u + 2t^{28}u^4 + 15t^{25}u^7 + \\
& 33t^{22}u^{10} + 42t^{19}u^{13} + 49t^{16}u^{16} + 52t^{13}u^{19} + 31t^{10}u^{22} + 10t^7u^{25} + 5t^4u^{28} + tu^{31} + t^{29}u^2 + 6t^{26}u^5 + 13t^{23}u^8 + 3t^{20}u^{11} + \\
& 46t^{17}u^{14} + 40t^{14}u^{17} + 27t^{11}u^{20} + 18t^8u^{23} + 6t^5u^{26} + t^{30} + t^{27}u^3 + 12t^{24}u^6 + 31t^{21}u^9 + 39t^{18}u^{12} + 45t^{15}u^{15} + 47t^{12}u^{18} + \\
& 28t^9u^{21} + 9t^6u^{24} + 4t^3u^{27} + t^{28}u + 5t^{25}u^4 + 11t^{22}u^7 + 28t^{19}u^{10} + 42t^{16}u^{13} + 36t^{13}u^{16} + 24t^{10}u^{19} + 16t^7u^{22} + 5t^4u^{25} + \\
& t^{26}u^2 + 10t^{23}u^5 + 27t^{20}u^8 + 35t^{17}u^{11} + 41t^{14}u^{14} + 43t^{11}u^{17} + 24t^8u^{20} + 7t^5u^{23} + 3t^2u^{26} + 4t^{24}u^3 + 9t^{21}u^6 + 24t^{18}u^9 + \\
& 35t^{15}u^{12} + 33t^{12}u^{15} + 21t^9u^{18} + 13t^6u^{21} + 3t^3u^{24} + 8t^{22}u^4 + 23t^{19}u^7 + 29t^{16}u^{10} + 36t^{13}u^{13} + 37t^{10}u^{16} + 20t^7u^{19} + 5t^4u^{22} + \\
& 2tu^{25} + 2t^{23}u^2 + 6t^{20}u^5 + 19t^{17}u^8 + 31t^{14}u^{11} + 27t^{11}u^{14} + 16t^8u^{17} + 11t^5u^{20} + 2t^2u^{23} + 6t^{21}u^3 + 19t^{18}u^6 + 23t^{15}u^9 + \\
& 30t^{12}u^{12} + 32t^9u^{15} + 15t^6u^{18} + 3t^3u^{21} + 2u^{24} + t^{22}u + 3t^{19}u^4 + 15t^{16}u^7 + 26t^{13}u^{10} + 22t^{10}u^{13} + 12t^7u^{16} + 8t^4u^{19} + \\
& tu^{22} + 4t^{20}u^2 + 14t^{17}u^5 + 18t^{14}u^8 + 25t^{11}u^{11} + 25t^8u^{14} + 11t^5u^{17} + 2t^2u^{20} + 3t^{18}u^3 + 11t^{15}u^6 + 20t^{12}u^9 + 17t^9u^{12} + \\
& 9t^6u^{15} + 6t^3u^{18} + 2t^{19}u + 11t^{16}u^4 + 13t^{13}u^7 + 19t^{10}u^{10} + 20t^7u^{13} + 8t^4u^{16} + t^{17}u^2 + 7t^{14}u^5 + 16t^{11}u^8 + 12t^8u^{11} + \\
& 6t^5u^{14} + 3t^2u^{17} + 8t^{15}u^3 + 10t^{12}u^6 + 13t^9u^9 + 15t^6u^{12} + 5t^3u^{15} + 4t^{13}u^4 + 12t^{10}u^7 + 8t^7u^{10} + 3t^4u^{13} + 2tu^{16} + 5t^{14}u^2 + \\
& 7t^{11}u^5 + 9t^8u^8 + 10t^5u^{11} + 3t^2u^{14} + 2t^{12}u^3 + 8t^9u^6 + 5t^6u^9 + 3t^3u^{12} + 3t^{13}u + 4t^{10}u^4 + 5t^7u^7 + 7t^4u^{10} + tu^{13} + t^{11}u^2 + \\
& 6t^8u^5 + 3t^5u^8 + t^2u^{11} + 2t^{12} + 2t^9u^3 + 3t^6u^6 + 5t^3u^9 + 4t^7u^4 + t^4u^7 + t^8u^2 + 2t^5u^5 + 3t^2u^8 + 2t^6u^3 + t^4u^4 + 2tu^7 + t^5u^2 + u^6 + t^4u
\end{aligned}$$

$$M_G(t, u)_2 = M_G(u, t)_1$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_3 = & (t^{29}u^{26} + t^{26}u^{29} + 2t^{28}u^{25} + 2t^{25}u^{28} + t^{29}u^{23} + t^{23}u^{29} + 4t^{27}u^{24} + 4t^{24}u^{27} + 2t^{28}u^{22} + 2t^{25}u^{25} + 2t^{22}u^{28} + \\
& 6t^{26}u^{23} + 6t^{23}u^{26} + 5t^{27}u^{21} + 4t^{24}u^{24} + 5t^{21}u^{27} + 2t^{28}u^{19} + 9t^{25}u^{22} + 9t^{22}u^{25} + 2t^{19}u^{28} + t^{29}u^{17} + 8t^{26}u^{20} + 6t^{23}u^{23} + \\
& 8t^{20}u^{26} + t^{17}u^{29} + 3t^{30}u^{15} + 3t^{27}u^{18} + 13t^{24}u^{21} + 13t^{21}u^{24} + 3t^{18}u^{27} + 3t^{15}u^{30} + 2t^{28}u^{16} + 11t^{25}u^{19} + 10t^{22}u^{22} + \\
& 11t^{19}u^{25} + 2t^{16}u^{28} + 4t^{29}u^{14} + 6t^{26}u^{17} + 18t^{23}u^{20} + 18t^{20}u^{23} + 6t^{17}u^{26} + 4t^{14}u^{29} + 3t^{27}u^{15} + 15t^{24}u^{18} + 12t^{21}u^{21} + \\
& 15t^{18}u^{24} + 3t^{15}u^{27} + 6t^{12}u^{30} + 9t^{25}u^{16} + 22t^{22}u^{19} + 22t^{19}u^{22} + 9t^{16}u^{25} + 6t^{13}u^{28} + 6t^{26}u^{14} + 19t^{23}u^{17} + 14t^{20}u^{20} + \\
& 19t^{17}u^{23} + 6t^{14}u^{26} + 9t^{27}u^{12} + 9t^{24}u^{15} + 27t^{21}u^{18} + 27t^{18}u^{21} + 9t^{15}u^{24} + 9t^{12}u^{27} + t^{28}u^{10} + 9t^{25}u^{13} + 22t^{22}u^{16} + 16t^{19}u^{19} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 22t^{16}u^{22} + 9t^{13}u^{25} + t^{10}u^{28} + t^{29}u^8 + 11t^{26}u^{11} + 11t^{23}u^{14} + 29t^{20}u^{17} + 29t^{17}u^{20} + 11t^{14}u^{23} + 11t^{11}u^{26} + t^8u^{29} + 3t^{27}u^9 + \\
& 12t^{24}u^{12} + 24t^{21}u^{15} + 18t^{18}u^{18} + 24t^{15}u^{21} + 12t^{12}u^{24} + 3t^9u^{27} + 2t^{28}u^7 + 13t^{25}u^{10} + 14t^{22}u^{13} + 31t^{19}u^{16} + 31t^{16}u^{19} + \\
& 14t^{13}u^{22} + 13t^{10}u^{25} + 2t^7u^{28} + t^{29}u^5 + 3t^{26}u^8 + 15t^{23}u^{11} + 26t^{20}u^{14} + 16t^{17}u^{17} + 26t^{14}u^{20} + 15t^{11}u^{23} + 3t^8u^{26} + t^5u^{29} + \\
& 2t^{27}u^6 + 17t^{24}u^9 + 15t^{21}u^{12} + 33t^{18}u^{15} + 33t^{15}u^{18} + 15t^{12}u^{21} + 17t^9u^{24} + 2t^6u^{27} + t^{28}u^4 + 4t^{25}u^7 + 17t^{22}u^{10} + 27t^{19}u^{13} + \\
& 16t^{16}u^{16} + 27t^{13}u^{19} + 17t^{10}u^{22} + 4t^7u^{25} + t^4u^{28} + 3t^{26}u^5 + 17t^{23}u^8 + 18t^{20}u^{11} + 35t^{17}u^{14} + 35t^{14}u^{17} + 18t^{11}u^{20} + 17t^8u^{23} + \\
& 3t^5u^{26} + t^{27}u^3 + 5t^{24}u^6 + 16t^{21}u^9 + 27t^{18}u^{12} + 18t^{15}u^{15} + 27t^{12}u^{18} + 16t^9u^{21} + 5t^6u^{24} + t^3u^{27} + 3t^{25}u^4 + 17t^{22}u^7 + \\
& 18t^{19}u^{10} + 35t^{16}u^{13} + 35t^{13}u^{16} + 18t^{10}u^{19} + 17t^7u^{22} + 3t^4u^{25} + t^{26}u^2 + 4t^{23}u^5 + 17t^{20}u^8 + 27t^{17}u^{11} + 16t^{14}u^{14} + 27t^{11}u^{17} + \\
& 17t^8u^{20} + 4t^5u^{23} + t^2u^{26} + 2t^{24}u^3 + 17t^{21}u^6 + 15t^{18}u^9 + 33t^{15}u^{12} + 33t^{12}u^{15} + 15t^9u^{18} + 17t^6u^{21} + 2t^3u^{24} + t^{25}u + 3t^{22}u^4 + \\
& 15t^{19}u^7 + 26t^{16}u^{10} + 16t^{13}u^{13} + 26t^{10}u^{16} + 15t^7u^{19} + 3t^4u^{22} + tu^{25} + 2t^{23}u^2 + 13t^{20}u^5 + 14t^{17}u^8 + 31t^{14}u^{11} + 31t^{11}u^{14} + \\
& 14t^8u^{17} + 13t^5u^{20} + 2t^2u^{23} + 3t^{21}u^3 + 12t^{18}u^6 + 24t^{15}u^9 + 18t^{12}u^{12} + 24t^9u^{15} + 12t^6u^{18} + 3t^3u^{21} + t^{22}u + 11t^{19}u^4 + \\
& 11t^{16}u^7 + 29t^{13}u^{10} + 29t^{10}u^{13} + 11t^7u^{16} + 11t^4u^{19} + tu^{22} + t^{20}u^2 + 9t^{17}u^5 + 22t^{14}u^8 + 16t^{11}u^{11} + 22t^8u^{14} + 9t^5u^{17} + \\
& t^2u^{20} + 9t^{18}u^3 + 9t^{15}u^6 + 27t^{12}u^9 + 27t^9u^{12} + 9t^6u^{15} + 9t^3u^{18} + 6t^{16}u^4 + 19t^{13}u^7 + 14t^{10}u^{10} + 19t^7u^{13} + 6t^4u^{16} + 6t^{17}u^2 + \\
& 9t^{14}u^5 + 22t^{11}u^8 + 22t^8u^{11} + 9t^5u^{14} + 6t^2u^{17} + 3t^{15}u^3 + 15t^{12}u^6 + 12t^9u^9 + 15t^6u^{12} + 3t^3u^{15} + 4t^{16}u + 6t^{13}u^4 + 18t^{10}u^7 + \\
& 18t^7u^{10} + 6t^4u^{13} + 4tu^{16} + 2t^{14}u^2 + 11t^{11}u^5 + 10t^8u^8 + 11t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + 3t^{15} + 3t^{12}u^3 + 13t^9u^6 + 13t^6u^9 + 3t^3u^{12} + \\
& 3u^{15} + t^{13}u + 8t^{10}u^4 + 6t^7u^7 + 8t^4u^{10} + tu^{13} + 2t^{11}u^2 + 9t^8u^5 + 9t^5u^8 + 2t^2u^{11} + 5t^9u^3 + 4t^6u^6 + 5t^3u^9 + 6t^7u^4 + 6t^4u^7 + \\
& 2t^8u^2 + 2t^5u^5 + 2t^2u^8 + 4t^6u^3 + 4t^3u^6 + t^7u + tu^7 + 2t^5u^2 + 2t^2u^5 + t^4u + tu^4) (u^4 - u^2 + 1) (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1) (u^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_4 = & (t^{30}u^{27} + t^{29}u^{26} + t^{27}u^{27} + 2t^{28}u^{25} + t^{25}u^{28} + 2t^{26}u^{26} + t^{23}u^{29} + 4t^{27}u^{24} + t^{24}u^{27} + 2t^{21}u^{30} + t^{28}u^{22} + 4t^{25}u^{25} + \\
& 2t^{22}u^{28} + 2t^{29}u^{20} + 7t^{26}u^{23} + 3t^{23}u^{26} + 3t^{20}u^{29} + 2t^{27}u^{21} + 7t^{24}u^{24} + 3t^{21}u^{27} + 4t^{28}u^{19} + 10t^{25}u^{22} + 6t^{22}u^{25} + 5t^{19}u^{28} + \\
& 2t^{29}u^{17} + 3t^{26}u^{20} + 11t^{23}u^{23} + 6t^{20}u^{26} + 6t^{27}u^{18} + 16t^{24}u^{21} + 7t^{21}u^{24} + 8t^{18}u^{27} + 3t^{28}u^{16} + 6t^{25}u^{19} + 15t^{22}u^{22} + 9t^{19}u^{25} + \\
& t^{16}u^{28} + 9t^{26}u^{17} + 19t^{23}u^{20} + 10t^{20}u^{23} + 12t^{17}u^{26} + 2t^{14}u^{29} + 6t^{27}u^{15} + 9t^{24}u^{18} + 19t^{21}u^{21} + 12t^{18}u^{24} + 3t^{15}u^{27} + \\
& 2t^{28}u^{13} + 12t^{25}u^{16} + 23t^{22}u^{19} + 14t^{19}u^{22} + 15t^{16}u^{25} + 4t^{13}u^{28} + t^{29}u^{11} + 9t^{26}u^{14} + 10t^{23}u^{17} + 23t^{20}u^{20} + 16t^{17}u^{23} + \\
& 3t^{14}u^{26} + 2t^{11}u^{29} + 2t^{30}u^9 + 3t^{27}u^{12} + 15t^{24}u^{15} + 28t^{21}u^{18} + 15t^{18}u^{21} + 21t^{15}u^{24} + 5t^{12}u^{27} + 2t^{28}u^{10} + 12t^{25}u^{13} + \\
& 13t^{22}u^{16} + 25t^{19}u^{19} + 19t^{16}u^{22} + 6t^{13}u^{25} + 3t^{10}u^{28} + 3t^{29}u^8 + 6t^{26}u^{11} + 20t^{23}u^{14} + 31t^{20}u^{17} + 18t^{17}u^{20} + 23t^{14}u^{23} + \\
& 8t^{11}u^{26} + 2t^{27}u^9 + 15t^{24}u^{12} + 15t^{21}u^{15} + 27t^{18}u^{18} + 21t^{15}u^{21} + 9t^{12}u^{24} + 5t^9u^{27} + 4t^{28}u^7 + 8t^{25}u^{10} + 23t^{22}u^{13} + 33t^{19}u^{16} + \\
& 20t^{16}u^{19} + 26t^{13}u^{22} + 10t^{10}u^{25} + t^{27}u^{28} + 4t^{26}u^8 + 18t^{23}u^{11} + 15t^{20}u^{14} + 28t^{17}u^{17} + 25t^{14}u^{20} + 10t^{11}u^{23} + 7t^8u^{26} + 5t^{27}u^6 + \\
& 8t^{24}u^9 + 25t^{21}u^{12} + 36t^{18}u^{15} + 18t^{15}u^{18} + 30t^{12}u^{21} + 11t^9u^{24} + 2t^6u^{27} + t^3u^{30} + 5t^{25}u^7 + 20t^{22}u^{10} + 16t^{19}u^{13} + 28t^{16}u^{16} + \\
& 26t^{13}u^{19} + 12t^{10}u^{22} + 8t^7u^{25} + 5t^{26}u^5 + 8t^{23}u^8 + 26t^{20}u^{11} + 35t^{17}u^{14} + 20t^{14}u^{17} + 29t^{11}u^{20} + 13t^8u^{23} + 3t^5u^{26} + t^2u^{29} + \\
& t^{27}u^3 + 5t^{24}u^6 + 21t^{21}u^9 + 18t^{18}u^{12} + 27t^{15}u^{15} + 27t^{12}u^{18} + 13t^9u^{21} + 8t^6u^{24} + 5t^{25}u^4 + 8t^{22}u^7 + 26t^{19}u^{10} + 35t^{16}u^{13} + \\
& 20t^{13}u^{16} + 29t^{10}u^{19} + 13t^7u^{22} + 3t^4u^{25} + tu^{28} + 5t^{23}u^5 + 20t^{20}u^8 + 16t^{17}u^{11} + 28t^{14}u^{14} + 26t^{11}u^{17} + 12t^8u^{20} + 8t^5u^{23} + \\
& 5t^{24}u^3 + 8t^{21}u^6 + 25t^{18}u^9 + 36t^{15}u^{12} + 18t^{12}u^{15} + 30t^9u^{18} + 11t^6u^{21} + 2t^3u^{24} + u^{27} + 4t^{22}u^4 + 18t^{19}u^7 + 15t^{16}u^{10} + \\
& 28t^{13}u^{13} + 25t^{10}u^{16} + 10t^7u^{19} + 7t^4u^{22} + 4t^{23}u^2 + 8t^{20}u^5 + 23t^{17}u^8 + 33t^{14}u^{11} + 20t^{11}u^{14} + 26t^8u^{17} + 10t^5u^{20} + t^2u^{23} + \\
& 2t^{21}u^3 + 15t^{18}u^6 + 15t^{15}u^9 + 27t^{12}u^{12} + 21t^9u^{15} + 9t^6u^{18} + 5t^3u^{21} + 3t^{22}u + 6t^{19}u^4 + 20t^{16}u^7 + 31t^{13}u^{10} + 18t^{10}u^{13} + \\
& 23t^7u^{16} + 8t^4u^{19} + 2t^{20}u^2 + 12t^{17}u^5 + 13t^{14}u^8 + 25t^{11}u^{11} + 19t^8u^{14} + 6t^5u^{17} + 3t^2u^{20} + 2t^{21} + 3t^{18}u^3 + 15t^{15}u^6 + \\
& 28t^{12}u^9 + 15t^9u^{12} + 21t^6u^{15} + 5t^3u^{18} + t^{19}u + 9t^{16}u^4 + 10t^{13}u^7 + 23t^{10}u^{10} + 16t^7u^{13} + 3t^4u^{16} + 2t^{19}u + 2t^{17}u^2 + 12t^{14}u^5 + \\
& 23t^{11}u^8 + 14t^8u^{11} + 15t^5u^{14} + 4t^2u^{17} + 6t^{15}u^3 + 9t^{12}u^6 + 19t^9u^{12} + 12t^6u^{15} + 3t^3u^{18} + 9t^{13}u + t^{12} + 5t^9u^3 + 7t^6u^6 + 5t^3u^9 + u^{12} + 3t^8u^2 + \\
& 12t^4u^{13} + 2tu^{16} + 3t^{14}u^2 + 6t^{11}u^5 + 15t^8u^8 + 9t^5u^{11} + t^2u^{14} + 6t^{12}u^3 + 16t^9u^6 + 7t^6u^9 + 8t^3u^{12} + 2t^{13}u + 3t^{10}u^4 + \\
& 11t^7u^7 + 6t^4u^{10} + 4t^{11}u^2 + 10t^8u^5 + 6t^5u^8 + 5t^2u^{11} + 2t^9u^3 + 7t^6u^6 + 3t^3u^9 + 2t^{10}u + 7t^7u^4 + 3t^4u^7 + 3tu^{10} + t^8u^2 + \\
& 4t^5u^5 + 2t^2u^8 + 4t^6u^3 + t^3u^6 + 2u^9 + 2t^4u^4 + tu^7 + 2t^5u^2 + t^2u^5 + t^3u^3 + t^4u + t^3) (u^4 - u^2 + 1) (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1) (u^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$M_G(t, u)_5 = M_G(u, t)_4$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_6 = & (t^{16}u^{16} + t^{18}u^{12} + 2t^{15}u^{15} + t^{12}u^{18} + 2t^{17}u^{11} + 4t^{14}u^{14} + 2t^{11}u^{17} - t^{18}u^9 - t^9u^{18} + 3t^{16}u^{10} + 6t^{13}u^{13} + \\
& 3t^{10}u^{16} + t^{18}u^6 + 5t^{15}u^9 + 7t^{12}u^{12} + 5t^9u^{15} + t^6u^{18} + t^{17}u^5 + 6t^{14}u^8 + 8t^{11}u^{11} + 6t^8u^{14} + t^5u^{17} + t^{12}u^9 + t^9u^{12} + \\
& 2t^{16}u^4 + 8t^{13}u^7 + 9t^{10}u^{10} + 8t^7u^{13} + 2t^4u^{16} + 2t^{15}u^3 + 7t^{12}u^6 + 8t^9u^9 + 7t^6u^{12} + 2t^3u^{15} + 2t^{14}u^2 + 8t^{11}u^5 + 9t^8u^8 + \\
& 8t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + t^9u^6 + t^6u^9 + t^{13}u + 6t^{10}u^4 + 8t^7u^7 + 6t^4u^{10} + tu^{13} + t^{12} + 5t^9u^3 + 7t^6u^6 + 5t^3u^9 + u^{12} + 3t^8u^2 + \\
& 6t^5u^5 + 3t^2u^8 - t^9 - u^9 + 2t^7u + 4t^4u^4 + 2tu^7 + t^6 + 2t^3u^3 + u^6 + t^2u^2) (t^6 - t^3 + 1) (u^6 - u^3 + 1) (u^6 + u^3 + 1)^2 (t^6 + t^3 + 1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_7 = & t^{36}u^{35} + t^{35}u^{34} + 2t^{34}u^{33} + t^{32}u^{34} + 4t^{33}u^{32} + t^{34}u^{30} + 3t^{31}u^{33} + t^{28}u^{36} + 2t^{35}u^{28} + 7t^{32}u^{31} + 2t^{29}u^{34} + \\
& t^{36}u^{26} + 3t^{33}u^{29} + 5t^{30}u^{32} + 3t^{27}u^{35} + 5t^{34}u^{27} + 11t^{31}u^{30} + 4t^{28}u^{33} + 2t^{25}u^{36} + 4t^{35}u^{25} + 6t^{32}u^{28} + 10t^{29}u^{31} + 6t^{26}u^{34} + \\
& 9t^{33}u^{26} + 19t^{30}u^{29} + 9t^{27}u^{32} + 3t^{24}u^{35} + 7t^{34}u^{24} + 12t^{31}u^{27} + 17t^{28}u^{30} + 11t^{25}u^{33} + 2t^{35}u^{22} + 16t^{32}u^{25} + 28t^{29}u^{28} + \\
& 16t^{26}u^{31} + 7t^{23}u^{34} + t^{36}u^{20} + 14t^{33}u^{23} + 20t^{30}u^{26} + 26t^{27}u^{29} + 19t^{24}u^{32} + 3t^{21}u^{35} + 6t^{34}u^{21} + 25t^{31}u^{24} + 40t^{28}u^{27} + \\
& 25t^{25}u^{30} + 13t^{22}u^{33} + 3t^{19}u^{36} + 5t^{35}u^{19} + 21t^{32}u^{22} + 30t^{29}u^{25} + 38t^{26}u^{28} + 28t^{23}u^{31} + 6t^{20}u^{34} + 3t^{36}u^{17} + 11t^{33}u^{20} + \\
& 36t^{30}u^{23} + 54t^{27}u^{26} + 37t^{24}u^{29} + 20t^{21}u^{32} + 7t^{18}u^{35} + 9t^{34}u^{18} + 30t^{31}u^{21} + 44t^{28}u^{24} + 52t^{25}u^{27} + 39t^{22}u^{30} + 11t^{19}u^{33} + \\
& t^{16}u^{36} + 6t^{35}u^{16} + 18t^{32}u^{19} + 49t^{29}u^{22} + 70t^{26}u^{25} + 52t^{23}u^{28} + 29t^{20}u^{31} + 12t^{17}u^{34} + 15t^{33}u^{17} + 42t^{30}u^{20} + 58t^{27}u^{23} + \\
& 67t^{24}u^{26} + 53t^{21}u^{29} + 18t^{18}u^{32} + 3t^{15}u^{35} + 10t^{34}u^{15} + 27t^{31}u^{18} + 66t^{28}u^{21} + 87t^{25}u^{24} + 67t^{22}u^{27} + 41t^{19}u^{30} + 19t^{16}u^{33} + \\
& t^{35}u^{13} + 23t^{32}u^{16} + 55t^{29}u^{19} + 73t^{26}u^{22} + 83t^{23}u^{25} + 69t^{20}u^{28} + 27t^{17}u^{31} + 6t^{14}u^{34} + 2t^{36}u^{11} + 15t^{33}u^{14} + 36t^{30}u^{17} + \\
& 82t^{27}u^{20} + 106t^{24}u^{23} + 84t^{21}u^{26} + 51t^{18}u^{29} + 26t^{15}u^{32} + 3t^{12}u^{35} + 5t^{34}u^{12} + 30t^{31}u^{15} + 67t^{28}u^{18} + 89t^{25}u^{21} + 100t^{22}u^{24} + \\
& 83t^{19}u^{27} + 35t^{16}u^{30} + 10t^{13}u^{33} + t^{10}u^{36} + 4t^{35}u^{10} + 20t^{32}u^{13} + 45t^{29}u^{16} + 98t^{26}u^{19} + 123t^{23}u^{22} + 101t^{20}u^{25} + 63t^{17}u^{28} + \\
& 32t^{14}u^{31} + 7t^{11}u^{34} + t^{36}u^8 + 7t^{33}u^{11} + 38t^{30}u^{14} + 79t^{27}u^{17} + 103t^{24}u^{20} + 113t^{21}u^{23} + 97t^{18}u^{26} + 45t^{15}u^{29} + 13t^{12}u^{32} + \\
& 3t^9u^{35} + 7t^{34}u^5 + 25t^{31}u^{12} + 56t^{28}u^{15} + 113t^{25}u^{18} + 138t^{22}u^{21} + 114t^{19}u^{24} + 74t^{16}u^{27} + 41t^{13}u^{30} + 9t^{10}u^{33} + t^{35}u^7 + \\
& 9t^{32}u^{10} + 47t^{29}u^{13} + 89t^{26}u^{16} + 114t^{23}u^{19} + 127t^{20}u^{22} + 109t^{17}u^{25} + 54t^{14}u^{28} + 17t^{11}u^{31} + 5t^8u^{34} + 9t^{33}u^8 + 30t^{30}u^{11} + \\
& 65t^{27}u^{14} + 124t^{24}u^{17} + 152t^{21}u^{20} + 126t^{18}u^{23} + 84t^{15}u^{26} + 47t^{12}u^{29} + 12t^9u^{32} + 2t^{34}u^6 + 12t^{31}u^9 + 52t^{28}u^{12} + 97t^{25}u^{15} + \\
& 126t^{22}u^{18} + 138t^{19}u^{21} + 117t^{16}u^{24} + 62t^{13}u^{27} + 20t^{10}u^{30} + 7t^7u^{33} + 11t^{32}u^7 + 33t^{29}u^{10} + 73t^{26}u^{13} + 130t^{23}u^{16} + 163t^{20}u^{19} + \\
& 135t^{17}u^{22} + 91t^{14}u^{25} + 51t^{11}u^{28} + 14t^8u^{31} + t^5u^{34} + 3t^{33}u^5 + 13t^{30}u^8 + 56t^{27}u^{11} + 102t^{24}u^{14} + 130t^{21}u^{17} + 145t^{18}u^{20} + \\
& 121t^{15}u^{23} + 67t^{12}u^{26} + 22t^9u^{29} + 8t^6u^{32} + 11t^{31}u^6 + 35t^{28}u^9 + 77t^{25}u^{12} + 134t^{22}u^{15} + 168t^{19}u^{18} + 136t^{16}u^{21} + 96t^{13}u^{24} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 54t^{10}u^{27} + 14t^7u^{30} + t^4u^{33} + tu^{36} + t^{35}u + 3t^{32}u^4 + 13t^{29}u^7 + 58t^{26}u^{10} + 105t^{23}u^{13} + 130t^{20}u^{16} + 146t^{17}u^{19} + 124t^{14}u^{22} + \\
& 69t^{11}u^{25} + 23t^8u^{28} + 8t^5u^{31} + 11t^{30}u^5 + 35t^{27}u^8 + 77t^{24}u^{11} + 134t^{21}u^{14} + 168t^{18}u^{17} + 136t^{15}u^{20} + 96t^{12}u^{23} + 54t^9u^{26} + \\
& 14t^6u^{29} + t^3u^{32} + u^{35} + 3t^{31}u^3 + 13t^{28}u^6 + 56t^{25}u^9 + 102t^{22}u^{12} + 130t^{19}u^{15} + 145t^{16}u^{18} + 121t^{13}u^{21} + 67t^{10}u^{24} + 22t^7u^{27} + \\
& 8t^4u^{30} + 11t^{29}u^4 + 33t^{26}u^7 + 73t^{23}u^{10} + 130t^{20}u^{13} + 163t^{17}u^{16} + 135t^{14}u^{19} + 91t^{11}u^{22} + 51t^8u^{25} + 14t^5u^{28} + t^2u^{31} + \\
& 2t^{30}u^2 + 12t^{27}u^5 + 52t^{24}u^8 + 97t^{21}u^{11} + 126t^{18}u^{14} + 138t^{15}u^{17} + 117t^{12}u^{20} + 62t^9u^{23} + 20t^6u^{26} + 7t^3u^{29} + 9t^{28}u^3 + \\
& 30t^{25}u^6 + 65t^{22}u^9 + 124t^{19}u^{12} + 152t^{16}u^{15} + 126t^{13}u^{18} + 84t^{10}u^{21} + 47t^7u^{24} + 12t^4u^{27} + t^{29}u + 9t^{26}u^4 + 47t^{23}u^7 + \\
& 89t^{20}u^{10} + 114t^{17}u^{13} + 127t^{14}u^{16} + 109t^{11}u^{19} + 54t^8u^{22} + 17t^5u^{25} + 5t^2u^{28} + 7t^{27}u^2 + 25t^{24}u^5 + 56t^{21}u^8 + 113t^{18}u^{11} + \\
& 138t^{15}u^{14} + 114t^{12}u^{17} + 74t^9u^{20} + 41t^6u^{23} + 9t^3u^{26} + t^{28} + 7t^{25}u^3 + 38t^{22}u^6 + 79t^{19}u^9 + 103t^{16}u^{12} + 113t^{13}u^{15} + \\
& 97t^{10}u^{18} + 45t^7u^{21} + 13t^4u^{24} + 3tu^{27} + 4t^{26}u + 20t^{23}u^4 + 45t^{20}u^7 + 98t^{17}u^{10} + 123t^{14}u^{13} + 101t^{11}u^{16} + 63t^8u^{19} + \\
& 32t^5u^{22} + 7t^2u^{25} + 5t^{24}u^2 + 30t^{21}u^5 + 67t^{18}u^8 + 89t^{15}u^{11} + 100t^{12}u^{14} + 83t^9u^{17} + 35t^6u^{20} + 10t^3u^{23} + u^{26} + 2t^{25} + \\
& 15t^{22}u^3 + 36t^{19}u^6 + 82t^{16}u^9 + 106t^{13}u^{12} + 84t^{10}u^{15} + 51t^7u^{18} + 26t^4u^{21} + 3t^{24}u + t^{23}u^4 + 23t^{20}u^7 + 55t^{17}u^{10} + 73t^{14}u^{13} + \\
& 83t^{11}u^{16} + 69t^8u^{19} + 27t^5u^{22} + 10t^{21}u^5 + 27t^{18}u^8 + 56t^{15}u^{11} + 87t^{12}u^{14} + 67t^9u^{17} + 41t^6u^{20} + 19t^3u^{23} + 15t^{19}u^{13} + \\
& 42t^{16}u^6 + 58t^{13}u^9 + 67t^{10}u^{12} + 53t^7u^{15} + 18t^4u^{18} + 3t^{21}u^5 + 6t^{20}u^8 + 18t^{17}u^{11} + 49t^{14}u^{14} + 70t^{11}u^{17} + 52t^8u^{20} + 29t^5u^{23} + \\
& 12t^2u^{26} + 9t^{25}u^2 + 30t^{22}u^5 + 44t^{19}u^8 + 52t^{16}u^{11} + 39t^{13}u^{14} + 11t^{10}u^{17} + u^{20} + 3t^{19}u + 11t^{16}u^4 + 36t^{13}u^7 + 54t^{10}u^{10} + 37t^7u^{13} + \\
& 20t^4u^{16} + 7t^{15}u + 5t^{17}u + 21t^{14}u^4 + 30t^{11}u^7 + 38t^8u^{10} + 28t^5u^{13} + 6t^2u^{16} + 6t^{15}u^2 + 25t^{12}u^5 + 40t^9u^8 + 25t^6u^{11} + \\
& 13t^3u^{14} + 3u^{17} + t^{16} + 14t^{13}u^3 + 20t^{10}u^6 + 26t^7u^9 + 19t^4u^{12} + 3t^{15}u + 2t^{14}u^4 + 16t^{11}u^7 + 28t^8u^{10} + 16t^5u^{13} + 7t^2u^{16} + \\
& 7t^{12}u^2 + 12t^9u^5 + 17t^6u^8 + 11t^3u^{11} + 9t^{10}u^3 + 19t^7u^6 + 9t^4u^9 + 3t^{12}u + 4t^{11}u^4 + 6t^8u^7 + 10t^5u^{10} + 6t^2u^{13} + 5t^9u^2 + \\
& 11t^6u^5 + 4t^3u^8 + 2u^{11} + t^{10} + 3t^7u^3 + 5t^4u^6 + 3tu^9 + 2t^8u + 7t^5u^4 + 2t^2u^7 + t^6u^2 + 3t^3u^5 + u^8 + 4t^4u^3 + t^2u^4 + 2t^3u^2 + t^2u + t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_8 = & t^{33}u^{35} + t^{31}u^{36} + t^{35}u^{31} + 2t^{32}u^{34} + 2t^{36}u^{29} + t^{28}u^{32} + t^{30}u^{35} + 2t^{34}u^{30} + 4t^{31}u^{33} + 4t^{35}u^{28} + 3t^{32}u^{31} + \\
& 3t^{29}u^{34} + 4t^{33}u^{29} + 8t^{30}u^{32} + t^{27}u^{35} + 7t^{34}u^{27} + 6t^{31}u^{30} + 7t^{28}u^{33} + 2t^{25}u^{36} + t^{35}u^{25} + 9t^{32}u^{28} + 13t^{29}u^{31} + 3t^{26}u^{34} + \\
& t^{36}u^{23} + 12t^{33}u^{26} + 11t^{30}u^{29} + 12t^{27}u^{32} + 6t^{24}u^{35} + 5t^{34}u^{24} + 15t^{31}u^{27} + 20t^{28}u^{30} + 7t^{25}u^{33} + t^{22}u^{36} + 4t^{35}u^{22} + 19t^{32}u^{25} + \\
& 19t^{29}u^{28} + 19t^{26}u^{31} + 10t^{23}u^{34} + 2t^{36}u^{20} + 9t^{33}u^{23} + 23t^{30}u^{26} + 30t^{27}u^{29} + 13t^{24}u^{32} + 3t^{21}u^{35} + 10t^{34}u^{21} + 27t^{31}u^{24} + \\
& 30t^{28}u^{27} + 30t^{25}u^{30} + 17t^{22}u^{33} + 5t^{35}u^{19} + 14t^{32}u^{22} + 35t^{29}u^{25} + 42t^{26}u^{28} + 21t^{23}u^{31} + 7t^{20}u^{34} + 16t^{33}u^{20} + 40t^{30}u^{23} + \\
& 44t^{27}u^{26} + 40t^{24}u^{29} + 26t^{21}u^{32} + 3t^{18}u^{35} + 9t^{34}u^{18} + 23t^{31}u^{21} + 49t^{28}u^{24} + 56t^{25}u^{27} + 31t^{22}u^{30} + 13t^{19}u^{33} + 2t^{16}u^{36} + \\
& 2t^{35}u^{16} + 25t^{32}u^{19} + 53t^{29}u^{22} + 61t^{26}u^{25} + 54t^{23}u^{28} + 36t^{20}u^{31} + 9t^{17}u^{34} + t^{36}u^{14} + 16t^{33}u^{17} + 32t^{30}u^{20} + 64t^{27}u^{23} + \\
& 72t^{24}u^{26} + 44t^{21}u^{29} + 18t^{18}u^{32} + 5t^{15}u^{35} + 6t^{34}u^{15} + 34t^{31}u^{18} + 68t^{28}u^{21} + 77t^{25}u^{24} + 70t^{22}u^{27} + 49t^{19}u^{30} + 13t^{16}u^{33} + \\
& t^{13}u^{36} + 5t^{35}u^{13} + 22t^{32}u^{16} + 43t^{29}u^{19} + 81t^{26}u^{22} + 90t^{23}u^{25} + 57t^{20}u^{28} + 26t^{17}u^{31} + 9t^{14}u^{34} + 2t^{36}u^{11} + 10t^{33}u^{14} + \\
& 46t^{30}u^{17} + 84t^{27}u^{20} + 93t^{24}u^{23} + 86t^{21}u^{26} + 62t^{18}u^{29} + 20t^{15}u^{32} + 2t^{12}u^{35} + 7t^{34}u^{12} + 29t^{31}u^{15} + 57t^{28}u^{18} + 97t^{25}u^{21} + \\
& 105t^{22}u^{24} + 72t^{19}u^{27} + 35t^{16}u^{30} + 14t^{13}u^{33} + 3t^{35}u^{10} + 15t^{32}u^{13} + 57t^{29}u^{16} + 100t^{26}u^{19} + 110t^{23}u^{22} + 102t^{20}u^{25} + 75t^{17}u^{28} + \\
& 27t^{14}u^{31} + 5t^{11}u^{34} + 11t^{33}u^{11} + 36t^{30}u^{14} + 69t^{27}u^{17} + 112t^{24}u^{20} + 121t^{21}u^{23} + 87t^{18}u^{26} + 44t^{15}u^{29} + 19t^{12}u^{32} + 2t^9u^{35} + \\
& 5t^{34}u^9 + 21t^{31}u^{12} + 68t^{28}u^{15} + 113t^{25}u^{18} + 122t^{22}u^{21} + 119t^{19}u^{24} + 87t^{16}u^{27} + 33t^{13}u^{30} + 7t^{10}u^{33} + 2t^7u^{36} + 15t^{29}u^{10} + \\
& 43t^{29}u^{13} + 79t^{26}u^{16} + 125t^{23}u^{19} + 136t^{20}u^{22} + 98t^{17}u^{25} + 52t^{14}u^{28} + 23t^{11}u^{31} + 3t^8u^{34} + t^{36}u^5 + 7t^{33}u^8 + 25t^{30}u^{11} + \\
& 77t^{27}u^{14} + 125t^{24}u^{17} + 134t^{21}u^{20} + 130t^{18}u^{23} + 96t^{15}u^{26} + 40t^{12}u^{29} + 9t^9u^{32} + 3t^6u^{35} + t^{34}u^6 + 18t^{31}u^9 + 49t^{28}u^{12} + \\
& 89t^{25}u^{15} + 136t^{22}u^{18} + 146t^{19}u^{21} + 106t^{16}u^{24} + 59t^{13}u^{27} + 27t^{10}u^{30} + 4t^7u^{33} + 2t^{35}u^4 + 8t^{32}u^7 + 28t^{29}u^{10} + 83t^{26}u^{13} + \\
& 133t^{23}u^{16} + 144t^{20}u^{19} + 136t^{17}u^{22} + 102t^{14}u^{25} + 47t^{11}u^{28} + 11t^8u^{31} + 3t^5u^{34} + t^{33}u^5 + 20t^{30}u^8 + 52t^{27}u^{11} + 95t^{24}u^{14} + \\
& 140t^{21}u^{17} + 155t^{18}u^{20} + 111t^{15}u^{23} + 64t^{12}u^{26} + 30t^9u^{29} + 5t^6u^{32} + 2t^{34}u^3 + 9t^{31}u^6 + 30t^{28}u^9 + 87t^{25}u^{12} + 136t^{22}u^{15} + \\
& 150t^{19}u^{18} + 140t^{16}u^{21} + 107t^{13}u^{24} + 49t^{10}u^{27} + 11t^7u^{30} + 4t^4u^{33} + t^{32}u^4 + 22t^{29}u^7 + 53t^{26}u^{10} + 94t^{23}u^{13} + 143t^{20}u^{16} + \\
& 159t^{17}u^{19} + 113t^{14}u^{22} + 65t^{11}u^{25} + 32t^8u^{28} + 6t^5u^{31} + 2t^{33}u^2 + 9t^{30}u^5 + 30t^{27}u^8 + 87t^{24}u^{11} + 136t^{21}u^{14} + 150t^{18}u^{17} + \\
& 140t^{15}u^{20} + 107t^{12}u^{23} + 49t^9u^{26} + 11t^6u^{29} + 4t^3u^{32} + t^{31}u^3 + 20t^{28}u^6 + 52t^{25}u^9 + 95t^{22}u^{12} + 140t^{19}u^{15} + 155t^{16}u^{18} + \\
& 111t^{13}u^{21} + 64t^{10}u^{24} + 30t^7u^{27} + 5t^4u^{30} + 2t^{32}u^2 + 8t^{29}u^5 + 28t^{26}u^8 + t^{32}u^{10} + 83t^{23}u^{13} + 133t^{20}u^{16} + 144t^{17}u^{19} + 136t^{14}u^{22} + \\
& 102t^{11}u^{25} + 47t^8u^{28} + 11t^5u^{31} + 3t^2u^{34} + t^{30}u^2 + 18t^{27}u^5 + 49t^{24}u^8 + 89t^{21}u^{11} + 136t^{18}u^{14} + 146t^{15}u^{17} + 106t^{12}u^{20} + \\
& 59t^9u^{23} + 27t^6u^{26} + 4t^3u^{29} + t^{31} + 7t^{28}u^3 + 25t^{25}u^6 + 77t^{22}u^9 + 125t^{19}u^{12} + 134t^{16}u^{15} + 130t^{13}u^{18} + 96t^{10}u^{21} + 40t^7u^{24} + \\
& 9t^4u^{27} + 3tu^{30} + 15t^{26}u^4 + 43t^{23}u^7 + 79t^{20}u^{10} + 125t^{17}u^{13} + 136t^{14}u^{16} + 98t^{11}u^{19} + 52t^8u^{22} + 23t^5u^{25} + 3t^2u^{28} + 5t^{27}u^2 + \\
& 21t^{24}u^5 + 68t^{21}u^8 + 113t^{18}u^{11} + 122t^{15}u^{14} + 119t^{12}u^{17} + 87t^9u^{20} + 33t^6u^{23} + 7t^3u^{26} + 2u^{29} + 11t^{25}u^3 + 36t^{22}u^6 + 69t^{19}u^9 + \\
& 112t^{16}u^{12} + 121t^{13}u^{15} + 87t^{10}u^{18} + 44t^7u^{21} + 19t^4u^{24} + 2t^{27}u^3 + 3t^{26}u^6 + 15t^{23}u^9 + 57t^{20}u^{12} + 100t^{17}u^{15} + 110t^{14}u^{18} + \\
& 102t^{11}u^{21} + 75t^8u^{24} + 27t^5u^{27} + 5t^2u^{30} + 7t^{24}u^2 + 29t^{21}u^5 + 57t^{18}u^8 + 97t^{15}u^{11} + 105t^{12}u^{14} + 72t^9u^{17} + 35t^6u^{20} + 14t^3u^{23} + \\
& 2t^{25} + 10t^{22}u^3 + 46t^{19}u^6 + 84t^{16}u^9 + 93t^{13}u^{12} + 86t^{10}u^{15} + 62t^7u^{18} + 20t^4u^{21} + 2tu^{24} + 5t^{23}u + 22t^{20}u^4 + 43t^{17}u^7 + \\
& 81t^{14}u^{10} + 90t^{11}u^{13} + 57t^8u^{16} + 26t^5u^{19} + 9t^2u^{22} + 6t^{21}u^2 + 34t^{18}u^5 + 68t^{15}u^8 + 77t^{12}u^{11} + 70t^9u^{14} + 49t^6u^{17} + 13t^3u^{20} + \\
& u^{23} + t^{22} + 16t^{19}u^3 + 32t^{16}u^6 + 64t^{13}u^9 + 72t^{10}u^{12} + 44t^7u^{15} + 18t^4u^{18} + 5tu^{21} + 2t^{20}u + 25t^{17}u^4 + 53t^{14}u^7 + 61t^{11}u^{10} + \\
& 54t^8u^{13} + 36t^5u^{16} + 9t^2u^{19} + 9t^{18}u^2 + 23t^{15}u^5 + 49t^{12}u^8 + 56t^9u^{11} + 31t^6u^{14} + 13t^3u^{17} + 2t^{20}u + 16t^{16}u^3 + 40t^{13}u^6 + \\
& 44t^{10}u^9 + 40t^7u^{12} + 26t^4u^{15} + 3tu^{18} + 5t^{17}u + 14t^{14}u^4 + 35t^{11}u^7 + 42t^8u^{10} + 21t^5u^{13} + 7t^2u^{16} + 10t^{15}u^2 + 27t^{12}u^5 + 30t^9u^8 + \\
& 30t^6u^{11} + 17t^3u^{14} + 2t^{16}u + 9t^{13}u^3 + 23t^{10}u^6 + 30t^7u^9 + 13t^4u^{12} + 3t^{15}u + 4t^{14}u^4 + 19t^{11}u^7 + 19t^8u^{10} + 10t^5u^{13} + \\
& 5t^{12}u^2 + 15t^9u^5 + 20t^6u^8 + 7t^3u^{11} + u^{14} + t^{13} + 12t^{10}u^3 + 11t^7u^6 + 12t^4u^9 + 6tu^{12} + t^{11}u + 9t^8u^4 + 13t^5u^7 + 3t^2u^{10} + 7t^9u^2 + \\
& 6t^6u^5 + 7t^3u^8 + 2u^{11} + 4t^7u^3 + 8t^4u^6 + tu^9 + 4t^8u + 3t^5u^4 + 3t^2u^7 + 2t^6u^2 + 4t^3u^5 + 2t^7 + t^4u^3 + tu^6 + t^5u + 2t^2u^4 + u^5 + tu^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_9 = & t^{36}u^{32} + t^{34}u^{33} + t^{31}u^{36} + 2t^{35}u^{31} + 2t^{33}u^{32} + 3t^{30}u^{35} + 3t^{34}u^{30} + t^{31}u^{33} + t^{28}u^{36} + t^{35}u^{28} + 5t^{32}u^{31} + 5t^{29}u^{34} + \\
& 7t^{33}u^{29} + 3t^{30}u^{32} + 2t^{27}u^{35} + 3t^{34}u^{27} + 9t^{31}u^{30} + 9t^{28}u^{33} + 3t^{35}u^{25} + 12t^{32}u^{28} + 7t^{29}u^{31} + 5t^{26}u^{34} + 3t^{36}u^{23} + 7t^{33}u^{26} + \\
& 14t^{30}u^{29} + 15t^{27}u^{32} + 2t^{24}u^{35} + 6t^{34}u^{24} + 18t^{31}u^{27} + 13t^{28}u^{30} + 10t^{25}u^{33} + t^{22}u^{36} + 6t^{35}u^{22} + 13t^{32}u^{25} + 23t^{29}u^{28} + \\
& 22t^{26}u^{31} + 7t^{23}u^{34} + 11t^{33}u^{23} + 27t^{30}u^{26} + 22t^{27}u^{29} + 15t^{24}u^{32} + 5t^{21}u^{35} + 11t^{34}u^{21} + 21t^{31}u^{24} + 35t^{28}u^{27} + 33t^{25}u^{30} + \\
& 11t^{22}u^{33} + 2t^{19}u^{36} + t^{35}u^{19} + 19t^{32}u^{22} + 39t^{29}u^{25} + 33t^{26}u^{28} + 23t^{23}u^{31} + 10t^{20}u^{34} + 2t^{36}u^{17} + 18t^{33}u^{20} + 30t^{30}u^{23} + \\
& 49t^{27}u^{26} + 47t^{24}u^{29} + 19t^{21}u^{32} + 3t^{18}u^{35} + 6t^{34}u^{18} + 29t^{31}u^{21} + 52t^{28}u^{24} + 48t^{25}u^{27} + 34t^{22}u^{30} + 17t^{19}u^{33} + 6t^{35}u^{16} + \\
& 26t^{32}u^{19} + 42t^{29}u^{22} + 65t^{26}u^{25} + 62t^{23}u^{28} + 28t^{20}u^{31} + 8t^{17}u^{34} + t^{36}u^{14} + 10t^{33}u^{17} + 40t^{30}u^{20} + 67t^{27}u^{23} + 64t^{24}u^{26} + \\
& 45t^{21}u^{29} + 25t^{18}u^{32} + 3t^{15}u^{35} + 11t^{34}u^{15} + 34t^{31}u^{18} + 56t^{28}u^{21} + 84t^{25}u^{24} + 79t^{22}u^{27} + 38t^{19}u^{30} + 13t^{16}u^{33} + 3t^{13}u^{36} + \\
& 3t^{35}u^{13} + 15t^{32}u^{16} + 54t^{29}u^{19} + 83t^{26}u^{22} + 79t^{23}u^{25} + 59t^{20}u^{28} + 34t^{17}u^{31} + 6t^{14}u^{34} + 16t^{33}u^{14} + 46t^{30}u^{17} + 71t^{27}u^{20} + \\
& 100t^{24}u^{23} + 96t^{21}u^{26} + 51t^{18}u^{29} + 19t^{15}u^{32} + 6t^{12}u^{35} + 6t^{34}u^{12} + 23t^{31}u^{15} + 67t^{28}u^{18} + 98t^{25}u^{21} + 96t^{22}u^{24} + 73t^{19}u^{27} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 44t^{16}u^{30} + 10t^{13}u^{33} + t^{35}u^{10} + 22t^{32}u^{13} + 56t^{29}u^{16} + 88t^{26}u^{19} + 115t^{23}u^{22} + 113t^{20}u^{25} + 65t^{17}u^{28} + 25t^{14}u^{31} + 8t^{11}u^{34} + \\
& t^{36}u^8 + 10t^{33}u^{11} + 30t^{30}u^{14} + 80t^{27}u^{17} + 115t^{24}u^{20} + 110t^{21}u^{23} + 87t^{18}u^{26} + 53t^{15}u^{29} + 15t^{12}u^{32} + t^9u^{35} + 3t^{34}u^9 + \\
& 27t^{31}u^{12} + 66t^{28}u^{15} + 102t^{25}u^{18} + 131t^{22}u^{21} + 128t^{19}u^{24} + 76t^{16}u^{27} + 32t^{13}u^{30} + 12t^{10}u^{33} + 3t^{35}u^7 + 12t^{32}u^{10} + 36t^{29}u^{13} + \\
& 91t^{26}u^{16} + 130t^{23}u^{19} + 121t^{20}u^{22} + 97t^{17}u^{25} + 62t^{14}u^{28} + 20t^{11}u^{31} + 2t^8u^{34} + t^{36}u^5 + 4t^{33}u^8 + 33t^{30}u^{11} + 74t^{27}u^{14} + \\
& 112t^{24}u^{17} + 143t^{21}u^{20} + 141t^{18}u^{23} + 86t^{15}u^{26} + 37t^{12}u^{29} + 15t^9u^{32} + t^6u^{35} + 3t^{34}u^6 + 15t^{31}u^9 + 44t^{28}u^{12} + 98t^{25}u^{15} + \\
& 139t^{22}u^{18} + 131t^{19}u^{21} + 107t^{16}u^{24} + 68t^{13}u^{27} + 23t^{10}u^{30} + 3t^7u^{33} + t^4u^{36} + t^{35}u^4 + 5t^{32}u^7 + 37t^{29}u^{10} + 81t^{26}u^{13} + \\
& 118t^{23}u^{16} + 153t^{20}u^{19} + 149t^{17}u^{22} + 95t^{14}u^{25} + 42t^{11}u^{28} + 17t^8u^{31} + 2t^5u^{34} + 4t^{33}u^5 + 17t^{30}u^8 + 48t^{27}u^{11} + 104t^{24}u^{14} + \\
& 145t^{21}u^{17} + 138t^{18}u^{20} + 112t^{15}u^{23} + 72t^{12}u^{26} + 26t^9u^{29} + 3t^6u^{32} + t^3u^{35} + t^{34}u^3 + 6t^{31}u^6 + 40t^{28}u^9 + 84t^{25}u^{12} + 121t^{22}u^{15} + \\
& 161t^{19}u^{18} + 153t^{16}u^{21} + 96t^{13}u^{24} + 44t^{10}u^{27} + 19t^7u^{30} + 2t^4u^{33} + 5t^{32}u^4 + 17t^{29}u^7 + 49t^{26}u^{10} + 107t^{23}u^{13} + 148t^{20}u^{16} + \\
& 140t^{17}u^{19} + 114t^{14}u^{22} + 74t^{11}u^{25} + 27t^8u^{28} + 4t^5u^{31} + t^2u^{34} + t^{33}u^2 + 6t^{30}u^5 + 40t^{27}u^8 + 84t^{24}u^{11} + 121t^{21}u^{14} + 161t^{18}u^{17} + \\
& 153t^{15}u^{20} + 96t^{12}u^{23} + 44t^9u^{26} + 19t^6u^{29} + 2t^3u^{32} + 4t^{31}u^3 + 17t^{28}u^6 + 48t^{25}u^9 + 104t^{22}u^{12} + 145t^{19}u^{15} + 138t^{16}u^{18} + \\
& 112t^{13}u^{21} + 72t^{10}u^{24} + 26t^7u^{27} + 3t^4u^{30} + tu^{33} + t^{32}u + 5t^{29}u^4 + 37t^{26}u^7 + 81t^{23}u^{10} + 118t^{20}u^{13} + 153t^{17}u^{16} + 149t^{14}u^{19} + \\
& 95t^{11}u^{22} + 42t^8u^{25} + 17t^5u^{28} + 2t^2u^{31} + 3t^{30}u^2 + 15t^{27}u^5 + 44t^{24}u^8 + 98t^{21}u^{11} + 139t^{18}u^{14} + 131t^{15}u^{17} + 107t^{12}u^{20} + \\
& 68t^9u^{23} + 23t^6u^{26} + 3t^3u^{29} + u^{32} + t^{31} + 4t^{28}u^3 + 33t^{25}u^6 + 74t^{22}u^9 + 112t^{19}u^{12} + 143t^{16}u^{15} + 141t^{13}u^{18} + 86t^{10}u^{21} + \\
& 37t^7u^{24} + 15t^4u^{27} + tu^{30} + 3t^{29}u + 12t^{26}u^4 + 36t^{23}u^7 + 91t^{20}u^{10} + 130t^{17}u^{13} + 121t^{14}u^{16} + 97t^{11}u^{19} + 62t^8u^{22} + 20t^5u^{25} + \\
& 2t^2u^{28} + 3t^{27}u + 27t^{24}u^5 + 66t^{21}u^8 + 102t^{18}u^{11} + 131t^{15}u^{14} + 128t^{12}u^{17} + 76t^9u^{20} + 32t^6u^{23} + 12t^3u^{26} + t^2u^{29} + 88t^{25}u^3 + \\
& 30t^{22}u^6 + 80t^{19}u^9 + 115t^{16}u^{12} + 110t^{13}u^{15} + 87t^{10}u^{18} + 53t^7u^{21} + 15t^4u^{24} + tu^{27} + t^{26}u + 22t^{23}u^4 + 56t^{20}u^7 + 88t^{17}u^{10} + \\
& 115t^{14}u^{13} + 113t^{11}u^{16} + 65t^8u^{19} + 25t^5u^{22} + 8t^2u^{25} + 6t^{24}u^2 + 23t^{21}u^5 + 67t^{18}u^8 + 98t^{15}u^{11} + 96t^{12}u^{14} + 73t^9u^{17} + 44t^6u^{20} + \\
& 10t^3u^{23} + 16t^{22}u^3 + 46t^{19}u^6 + 71t^{16}u^9 + 100t^{13}u^{12} + 96t^{10}u^{15} + 51t^7u^{18} + 19t^4u^{21} + 6tu^{24} + 3t^{23}u + 15t^{20}u^4 + 54t^{17}u^7 + \\
& 83t^{14}u^{10} + 79t^{11}u^{13} + 59t^8u^{16} + 34t^5u^{19} + 6t^2u^{22} + 11t^{21}u^2 + 34t^{18}u^5 + 56t^{15}u^8 + 84t^{12}u^{11} + 79t^9u^{14} + 38t^6u^{17} + 13t^3u^{20} + \\
& 3u^{23} + t^{22} + 10t^{19}u^3 + 40t^{16}u^6 + 67t^{13}u^9 + 64t^{10}u^{12} + 45t^7u^{15} + 25t^4u^{18} + 3tu^{21} + 6t^{20}u + 26t^{17}u^4 + 42t^{14}u^7 + 65t^{11}u^{10} + \\
& 62t^8u^{13} + 28t^5u^{16} + 8t^2u^{19} + 6t^{18}u^2 + 29t^{15}u^5 + 52t^{12}u^8 + 48t^9u^{11} + 34t^6u^{14} + 17t^3u^{17} + 2t^{19} + 18t^{16}u^3 + 30t^{13}u^6 + \\
& 49t^{10}u^9 + 47t^7u^{12} + 19t^4u^{15} + 3tu^{18} + t^{17}u + 19t^{14}u^4 + 39t^{11}u^7 + 33t^8u^{10} + 23t^5u^{13} + 10t^2u^{16} + 11t^{15}u^2 + 21t^{12}u^5 + 35t^9u^8 + \\
& 33t^6u^{11} + 11t^3u^{14} + 2u^{17} + 11t^{13}u^3 + 27t^{10}u^6 + 22t^7u^9 + 15t^4u^{12} + 5tu^{15} + 6t^{14}u + 13t^{11}u^4 + 23t^8u^7 + 22t^5u^{10} + 7t^2u^{13} + \\
& 6t^{12}u^2 + 18t^9u^5 + 13t^6u^8 + 10t^3u^{11} + u^{14} + 3t^{13} + 7t^{10}u^3 + 14t^7u^6 + 15t^4u^9 + 2tu^{12} + 3t^{11}u + 12t^8u^4 + 7t^5u^7 + 5t^2u^{10} + \\
& 3t^9u^2 + 9t^6u^5 + 9t^3u^8 + 7t^7u^3 + 3t^4u^6 + 2tu^9 + t^8u + 5t^5u^4 + 5t^2u^7 + 3t^6u^2 + t^3u^5 + u^8 + 2t^4u^3 + 3tu^6 + 2t^5u + t^3u^2 + u^5 + t^4
\end{aligned}$$

$$M_G(t, u)_{10} = M_G(u, t)_9$$

$$M_G(t, u)_{11} = M_G(u, t)_7$$

$$M_G(t, u)_{12} = M_G(u, t)_8$$

$$\begin{aligned}
& M_G(t, u)_{13} = (t^{30}u^{26} + t^{27}u^{29} + t^{28}u^{27} + t^{25}u^{30} + 3t^{29}u^{25} + 3t^{26}u^{28} + t^{30}u^{23} + 2t^{27}u^{26} + 3t^{24}u^{29} + 7t^{28}u^{24} + 6t^{25}u^{27} + \\
& t^{22}u^{30} + 3t^{29}u^{22} + 6t^{26}u^{25} + 7t^{23}u^{28} + 12t^{27}u^{23} + 12t^{24}u^{26} + 2t^{21}u^{29} + 7t^{28}u^{21} + 12t^{25}u^{24} + 13t^{22}u^{27} + 2t^{29}u^{19} + 20t^{26}u^{22} + \\
& 19t^{23}u^{25} + 7t^{20}u^{28} + 3t^9u^{17} + 15t^{27}u^{20} + 19t^{24}u^{23} + 22t^{21}u^{26} + 3t^{18}u^{29} + 6t^{28}u^{18} + 30t^{25}u^{21} + 28t^{22}u^{24} + 13t^{19}u^{27} + \\
& 4t^{16}u^{30} + 6t^{29}u^{16} + 22t^{26}u^{19} + 29t^{23}u^{22} + 32t^{20}u^{25} + 6t^{17}u^{28} + 4t^{30}u^{14} + 11t^{27}u^{17} + 42t^{24}u^{20} + 41t^{21}u^{23} + 20t^{18}u^{26} + \\
& 9t^{15}u^{29} + 9t^{28}u^{15} + 32t^{25}u^{18} + 40t^{22}u^{21} + 44t^{19}u^{24} + 11t^{16}u^{27} + t^{13}u^{30} + 7t^{29}u^{13} + 18t^{26}u^{16} + 55t^{23}u^{19} + 52t^{20}u^{22} + \\
& 30t^{17}u^{25} + 13t^{14}u^{28} + 15t^{27}u^{14} + 43t^{24}u^{17} + 48t^{21}u^{20} + 56t^{18}u^{23} + 18t^{15}u^{26} + 3t^{12}u^{29} + 12t^{28}u^{12} + 27t^{25}u^{15} + 68t^{22}u^{18} + \\
& 63t^{19}u^{21} + 37t^{16}u^{24} + 21t^{13}u^{27} + t^{29}u^{10} + 24t^{26}u^{13} + 50t^{23}u^{16} + 57t^{20}u^{19} + 68t^{17}u^{22} + 27t^{14}u^{25} + 7t^{11}u^{28} + t^{30}u^8 + \\
& 18t^{27}u^{11} + 32t^{24}u^{14} + 78t^{21}u^{17} + 72t^{18}u^{20} + 42t^{15}u^{23} + 29t^{12}u^{26} + 2t^9u^{29} + 5t^{28}u^9 + 32t^{25}u^{12} + 60t^{22}u^{15} + 63t^{19}u^{18} + \\
& 75t^{16}u^{21} + 35t^{13}u^{24} + 12t^{10}u^{27} + t^7u^{30} + 3t^{29}u^7 + 24t^{26}u^{10} + 40t^{23}u^{13} + 84t^{20}u^{16} + 78t^{17}u^{19} + 52t^{14}u^{22} + 36t^{11}u^{25} + \\
& 6t^8u^{28} + t^{30}u^5 + 8t^{27}u^8 + 40t^{24}u^{11} + 67t^{21}u^{14} + 65t^{18}u^{17} + 81t^{15}u^{20} + 44t^{12}u^{23} + 16t^9u^{26} + 3t^6u^{29} + 5t^{28}u^6 + 30t^{25}u^9 + \\
& 47t^{22}u^{12} + 90t^{19}u^{15} + 80t^{16}u^{18} + 58t^{13}u^{21} + 45t^{10}u^{24} + 7t^7u^{27} + t^4u^{30} + 2t^{29}u^4 + 9t^{26}u^7 + 49t^{23}u^{10} + 71t^{20}u^{13} + 65t^{17}u^{16} + \\
& 86t^{14}u^{19} + 50t^{11}u^{22} + 21t^8u^{25} + 4t^5u^{28} + 6t^{27}u^5 + 35t^{24}u^8 + 53t^{21}u^{11} + 95t^{18}u^{14} + 84t^{15}u^{17} + 63t^{12}u^{20} + 51t^9u^{23} + 9t^6u^{26} + \\
& t^3u^{29} + 2t^{28}u^3 + 12t^{25}u^6 + 50t^{22}u^9 + 75t^{19}u^{12} + 66t^{16}u^{15} + 89t^{13}u^{18} + 54t^{10}u^{21} + 23t^7u^{24} + 5t^4u^{27} + 7t^{26}u^4 + 36t^{23}u^7 + \\
& 55t^{20}u^{10} + 97t^{17}u^{13} + 85t^{14}u^{16} + 66t^{11}u^{19} + 50t^8u^{22} + 11t^5u^{25} + t^2u^{28} + 2t^{27}u^2 + 12t^{24}u^5 + 50t^{21}u^8 + 75t^{18}u^{11} + 66t^{15}u^{14} + \\
& 89t^{12}u^{17} + 54t^9u^{20} + 23t^6u^{23} + 5t^3u^{26} + 6t^{25}u^3 + 35t^{22}u^6 + 53t^{19}u^9 + 95t^{16}u^{12} + 84t^{13}u^{15} + 63t^{10}u^{18} + 51t^7u^{21} + 9t^4u^{24} + \\
& tu^{27} + 2t^{26}u + 9t^{23}u^4 + 49t^{20}u^7 + 71t^{17}u^{10} + 65t^{14}u^{13} + 86t^{11}u^{16} + 50t^8u^{19} + 21t^5u^{22} + 4t^2u^{25} + 5t^{24}u^2 + 30t^{21}u^5 + 47t^{18}u^8 + \\
& 90t^{15}u^{11} + 80t^{12}u^{14} + 58t^9u^{17} + 45t^6u^{20} + 7t^3u^{23} + u^{26} + t^{25} + 8t^{22}u^3 + 40t^{19}u^6 + 67t^{16}u^9 + 65t^{13}u^{12} + 81t^{10}u^{15} + 44t^7u^{18} + \\
& 16t^4u^{21} + 3tu^{24} + 3t^{23}u + 24t^{20}u^4 + 40t^{17}u^7 + 84t^{14}u^{10} + 78t^{11}u^{13} + 52t^8u^{16} + 36t^5u^{19} + 6t^2u^{22} + 5t^{21}u^2 + 32t^{18}u^5 + \\
& 60t^{15}u^8 + 63t^{12}u^{11} + 75t^9u^{14} + 35t^6u^{17} + 12t^3u^{20} + u^{23} + t^{22} + 18t^{19}u^3 + 32t^{16}u^6 + 78t^{13}u^9 + 72t^{10}u^{12} + 42t^7u^{15} + 29t^4u^{18} + \\
& 2tu^{21} + t^{20}u + 24t^{17}u^4 + 50t^{14}u^7 + 57t^{11}u^{10} + 68t^8u^{13} + 27t^5u^{16} + 7t^2u^{19} + 12t^{18}u^2 + 27t^{15}u^5 + 68t^{12}u^8 + 63t^9u^{11} + \\
& 37t^6u^{14} + 21t^3u^{17} + 15t^{16}u^3 + 43t^{13}u^6 + 48t^{10}u^9 + 56t^7u^{12} + 18t^4u^{15} + 3tu^{18} + 7t^{17}u + 18t^{14}u^4 + 55t^{11}u^7 + 52t^8u^{10} + \\
& 30t^5u^{13} + 13t^2u^{16} + 9t^{15}u^2 + 32t^{12}u^5 + 40t^9u^8 + 44t^6u^{11} + 11t^3u^{14} + u^{17} + 4t^{16} + 11t^{13}u^3 + 42t^{10}u^6 + 41t^7u^9 + 20t^4u^{12} + \\
& 9tu^{15} + 6t^{14}u + 22t^{11}u^4 + 29t^8u^7 + 32t^5u^{10} + 6t^2u^{13} + 6t^{12}u^2 + 30t^9u^5 + 28t^6u^8 + 13t^3u^{11} + 4u^{14} + t^{13} + 15t^{10}u^3 + 19t^7u^6 + \\
& 22t^4u^9 + 3tu^{12} + 2t^{11}u + 20t^8u^4 + 19t^5u^7 + 7t^2u^{10} + 7t^9u^2 + 12t^6u^5 + 13t^3u^8 + 12t^7u^3 + 12t^4u^6 + 2tu^9 + 3t^8u + 6t^5u^4 + \\
& 7t^2u^7 + 7t^6u^2 + 6t^3u^5 + u^8 + t^7 + 2t^4u^3 + 3tu^6 + 3t^5u + 3t^2u^4 + t^3u^2 + u^5 + t^4 + tu^3)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(u^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_G(t, u)_{14} = (t^{29}u^{28} + t^{30}u^{26} + 2t^{28}u^{27} + 2t^{29}u^{25} + 2t^{26}u^{28} + 5t^{27}u^{26} + 2t^{24}u^{29} + 5t^{28}u^{24} + 5t^{25}u^{27} + 3t^{22}u^{30} + t^{29}u^{22} + \\
& 10t^{26}u^{25} + 4t^{23}u^{28} + 2t^{30}u^{20} + 11t^{27}u^{23} + 9t^{24}u^{26} + 7t^{21}u^{29} + 5t^{28}u^{21} + 18t^{25}u^{24} + 9t^{22}u^{27} + t^{19}u^{30} + 6t^{29}u^{19} + 18t^{26}u^{22} + \\
& 17t^{23}u^{25} + 11t^{20}u^{28} + 2t^{30}u^{17} + 9t^{27}u^{20} + 28t^{24}u^{23} + 16t^{21}u^{26} + 3t^{18}u^{29} + 12t^{28}u^{18} + 28t^{25}u^{21} + 25t^{22}u^{24} + 19t^{19}u^{27} + \\
& 5t^{29}u^{16} + 15t^{26}u^{19} + 42t^{23}u^{22} + 25t^{20}u^{25} + 7t^{17}u^{28} + 18t^{27}u^{17} + 40t^{24}u^{20} + 33t^{21}u^{23} + 29t^{18}u^{26} + 3t^{15}u^{29} + 9t^{28}u^{15} + \\
& 24t^{25}u^{18} + 53t^{22}u^{21} + 34t^{19}u^{24} + 13t^{16}u^{27} + 2t^{13}u^{30} + 2t^{29}u^{13} + 27t^{26}u^{16} + 50t^{23}u^{19} + 46t^{20}u^{22} + 39t^{17}u^{25} + 9t^{14}u^{28} + \\
& t^{30}u^{11} + 17t^{27}u^{14} + 31t^{24}u^{17} + 65t^{21}u^{20} + 45t^{18}u^{23} + 18t^{15}u^{26} + 6t^{12}u^{29} + 6t^{28}u^{12} + 36t^{25}u^{15} + 60t^{22}u^{18} + 55t^{19}u^{21} + \\
& 52t^{16}u^{24} + 13t^{13}u^{27} + 2t^{10}u^{30} + 5t^{29}u^{10} + 24t^{26}u^{13} + 38t^{23}u^{16} + 76t^{20}u^{19} + 53t^{17}u^{22} + 27t^{14}u^{25} + 10t^{11}u^{28} + 3t^{30}u^8 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 11t^{27}u^{11} + 47t^{24}u^{14} + 71t^{21}u^{17} + 61t^{18}u^{20} + 63t^{15}u^{23} + 20t^{12}u^{26} + 3t^9u^{29} + 7t^{28}u^9 + 33t^{25}u^{12} + 48t^{22}u^{15} + 83t^{19}u^{18} + \\
& 61t^{16}u^{21} + 35t^{13}u^{24} + 16t^{10}u^{27} + 5t^{29}u^7 + 16t^{26}u^{10} + 58t^{23}u^{13} + 76t^{20}u^{16} + 68t^{17}u^{19} + 70t^{14}u^{22} + 28t^{11}u^{25} + 6t^8u^{28} + \\
& 10t^{27}u^8 + 41t^{24}u^{11} + 53t^{21}u^{14} + 88t^{18}u^{17} + 69t^{15}u^{20} + 42t^{12}u^{23} + 22t^9u^{26} + t^6u^{29} + 7t^{28}u^6 + 22t^{25}u^9 + 66t^{22}u^{12} + \\
& 81t^{19}u^{15} + 69t^{16}u^{18} + 81t^{13}u^{21} + 32t^{10}u^{24} + 9t^7u^{27} + t^4u^{30} + 14t^{26}u^7 + 46t^{23}u^{10} + 58t^{20}u^{13} + 92t^{17}u^{16} + 72t^{14}u^{19} + \\
& 49t^{11}u^{22} + 26t^8u^{25} + 2t^5u^{28} + 8t^{27}u^5 + 23t^{24}u^8 + 71t^{21}u^{11} + 84t^{18}u^{14} + 69t^{15}u^{17} + 85t^{12}u^{20} + 37t^9u^{23} + 12t^6u^{26} + 2t^3u^{29} + \\
& t^{28}u^3 + 15t^{25}u^6 + 51t^{22}u^9 + 62t^{19}u^{12} + 90t^{16}u^{15} + 76t^{13}u^{18} + 51t^{10}u^{21} + 29t^7u^{24} + 2t^4u^{27} + 9t^{26}u^4 + 23t^{23}u^7 + 73t^{20}u^{10} + \\
& 85t^{17}u^{13} + 70t^{14}u^{16} + 85t^{11}u^{19} + 40t^8u^{22} + 13t^5u^{25} + 2t^2u^{28} + t^{27}u^2 + 15t^{24}u^5 + 51t^{21}u^8 + 62t^{18}u^{11} + 90t^{15}u^{14} + 76t^{12}u^{17} + \\
& 51t^9u^{20} + 29t^6u^{23} + 2t^3u^{26} + 8t^{25}u^3 + 23t^{22}u^6 + 71t^{19}u^9 + 84t^{16}u^{12} + 69t^{13}u^{15} + 85t^{10}u^{18} + 37t^7u^{21} + 12t^4u^{24} + 2t^{27}u^7 + \\
& 14t^{23}u^4 + 46t^{20}u^7 + 58t^{17}u^{10} + 92t^{14}u^{13} + 72t^{11}u^{16} + 49t^8u^{19} + 26t^5u^{22} + 2t^2u^{25} + 7t^{24}u^2 + 22t^{21}u^5 + 66t^{18}u^8 + 81t^{15}u^{11} + \\
& 69t^{12}u^{14} + 81t^9u^{17} + 32t^6u^{20} + 9t^3u^{23} + u^{26} + 10t^{22}u^3 + 41t^{19}u^6 + 53t^{16}u^9 + 88t^{13}u^{12} + 69t^{10}u^{15} + 42t^7u^{18} + 22t^4u^{21} + \\
& tu^{24} + 5t^{23}u^7 + 16t^{20}u^{10} + 58t^{17}u^{13} + 76t^{14}u^{16} + 68t^{11}u^{19} + 70t^8u^{22} + 28t^5u^{25} + 6t^2u^{28} + 7t^{21}u^2 + 33t^{18}u^5 + 48t^{15}u^8 + \\
& 83t^{12}u^{11} + 61t^9u^{14} + 35t^6u^{17} + 16t^3u^{20} + 3t^{22}u^3 + 11t^{19}u^6 + 47t^{16}u^9 + 71t^{13}u^{12} + 63t^{10}u^{15} + 20t^7u^{18} + 3tu^{21} + \\
& 5t^{20}u^4 + 24t^{17}u^7 + 38t^{14}u^{10} + 76t^{11}u^{13} + 53t^8u^{16} + 27t^5u^{19} + 10t^2u^{22} + 6t^{18}u^2 + 36t^{15}u^5 + 60t^{12}u^8 + 55t^9u^{11} + 52t^6u^{14} + \\
& 13t^3u^{17} + 2u^{20} + t^{19} + 17t^{16}u^3 + 31t^{13}u^6 + 65t^{10}u^9 + 45t^7u^{12} + 18t^4u^{15} + 6tu^{18} + 2t^{17}u + 27t^{14}u^4 + 50t^{11}u^7 + 46t^8u^{10} + \\
& 39t^5u^{13} + 9t^2u^{16} + 9t^{15}u^2 + 24t^{12}u^5 + 53t^9u^8 + 34t^6u^{11} + 13t^3u^{14} + 2u^{17} + 18t^{13}u^3 + 40t^{10}u^6 + 33t^7u^9 + 29t^4u^{12} + 3tu^{15} + \\
& 5t^{14}u + 15t^{11}u^4 + 42t^8u^7 + 25t^5u^{10} + 7t^2u^{13} + 12t^{12}u^2 + 28t^9u^5 + 25t^6u^8 + 19t^{10}u^{11} + 2t^{13} + 9t^{10}u^3 + 28t^7u^6 + 16t^4u^9 + \\
& 3tu^{12} + 6t^{11}u + 18t^8u^4 + 17t^5u^7 + 11t^2u^{10} + 5t^9u^2 + 18t^6u^5 + 9t^3u^8 + u^{11} + 2t^{10} + 11t^7u^3 + 9t^4u^6 + 7tu^9 + t^8u + 10t^5u^4 + \\
& 4t^2u^7 + 5t^6u^2 + 5t^3u^5 + 3u^8 + 5t^4u^3 + 2tu^6 + 2t^5u + 2t^4u^4 + 2t^3u^2 + t^4 + t^2u)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(u^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_{15} = & (t^{28}u^{30} + 2t^{27}u^{29} + t^{28}u^{27} + t^{29}u^{25} + 4t^{26}u^{28} + t^{30}u^{23} + 4t^{27}u^{26} + t^{24}u^{29} + 3t^{28}u^{24} + 8t^{25}u^{27} + 5t^{29}u^{22} + \\
& 8t^{26}u^{25} + 4t^{23}u^{28} + 3t^{30}u^{20} + 6t^{27}u^{23} + 15t^{24}u^{26} + 3t^{21}u^{29} + 8t^{28}u^{21} + 15t^{25}u^{24} + 9t^{22}u^{27} + 2t^{19}u^{30} + 6t^{29}u^{19} + 13t^{26}u^{22} + \\
& 24t^{23}u^{25} + 8t^{20}u^{28} + 14t^{27}u^{20} + 25t^{24}u^{23} + 14t^{21}u^{26} + 6t^{18}u^{29} + 11t^{28}u^{18} + 22t^{25}u^{21} + 37t^{22}u^{24} + 3t^{19}u^{27} + 2t^{16}u^{30} + \\
& t^{29}u^{16} + 23t^{26}u^{19} + 34t^{23}u^{22} + 24t^{20}u^{25} + 11t^{17}u^{28} + 2t^{30}u^{14} + 19t^{27}u^{17} + 29t^{24}u^{20} + 50t^{21}u^{23} + 21t^{18}u^{26} + 3t^{15}u^{29} + \\
& 6t^{12}u^{32} + 33t^{25}u^{18} + 47t^{22}u^{21} + 33t^{19}u^{24} + 18t^{16}u^{27} + 6t^{29}u^{13} + 27t^{26}u^{16} + 39t^{23}u^{19} + 61t^{20}u^{22} + 30t^{17}u^{25} + 8t^{14}u^{28} + \\
& 2t^{30}u^{11} + 10t^{27}u^{14} + 43t^{24}u^{17} + 59t^{21}u^{20} + 41t^{18}u^{23} + 27t^{15}u^{26} + 3t^{12}u^{29} + 11t^{28}u^{12} + 36t^{25}u^{15} + 48t^{22}u^{18} + 74t^{19}u^{21} + \\
& 37t^{16}u^{24} + 14t^{13}u^{27} + 3t^{10}u^{30} + 5t^{29}u^{10} + 15t^{26}u^{13} + 56t^{23}u^{16} + 66t^{20}u^{19} + 50t^{17}u^{22} + 36t^{14}u^{25} + 6t^{11}u^{28} + 16t^{27}u^{11} + \\
& 47t^{24}u^{14} + 55t^{21}u^{17} + 84t^{18}u^{20} + 48t^{15}u^{23} + 21t^{12}u^{26} + 7t^{9}u^{29} + 8t^{28}u^9 + 24t^{25}u^{12} + 63t^{22}u^{15} + 73t^{19}u^{18} + 56t^{16}u^{21} + \\
& 47t^{13}u^{24} + 10t^{10}u^{27} + t^7u^{30} + t^{29}u^7 + 23t^{26}u^{10} + 55t^{23}u^{13} + 62t^{20}u^{16} + 91t^{17}u^{19} + 58t^{14}u^{22} + 29t^{11}u^{25} + 9t^8u^{28} + 13t^{27}u^8 + \\
& 30t^{24}u^{11} + 72t^{21}u^{14} + 78t^{18}u^{17} + 60t^{15}u^{20} + 56t^{12}u^{23} + 14t^{9}u^{26} + 2t^6u^{29} + 3t^{28}u^6 + 28t^{25}u^9 + 63t^{22}u^{12} + 66t^{19}u^{15} + \\
& 97t^{16}u^{18} + 65t^{13}u^{21} + 34t^{10}u^{24} + 13t^7u^{27} + t^{29}u^{10} + 16t^{26}u^{13} + 34t^{23}u^{16} + 81t^{20}u^{19} + 77t^{17}u^{22} + 64t^{14}u^{25} + 63t^{11}u^{28} + \\
& 19t^{25}u^6 + 3t^{22}u^9 + t^{30}u^2 + 5t^{27}u^5 + 32t^{24}u^8 + 68t^{21}u^{11} + 67t^{18}u^{14} + 99t^{15}u^{17} + 69t^{12}u^{20} + 36t^9u^{23} + 15t^6u^{26} + t^{28}u^3 + \\
& 18t^{25}u^6 + 39t^{22}u^9 + 82t^{19}u^{12} + 78t^{16}u^{15} + 66t^{13}u^{18} + 67t^{10}u^{21} + 20t^7u^{24} + 4t^4u^{27} + t^{29}u + 5t^{26}u^4 + 34t^{23}u^7 + 68t^{20}u^{10} + \\
& 70t^{17}u^{13} + 97t^{14}u^{16} + 72t^{11}u^{19} + 39t^8u^{22} + 15t^5u^{25} + t^2u^{28} + t^{27}u^2 + 18t^{24}u^5 + 39t^{21}u^8 + 82t^{18}u^{11} + 78t^{15}u^{14} + 66t^{12}u^{17} + \\
& 67t^9u^{20} + 20t^6u^{23} + 4t^3u^{26} + t^{28} + 5t^{25}u^3 + 32t^{22}u^6 + 68t^{19}u^9 + 67t^{16}u^{12} + 99t^{13}u^{15} + 69t^{10}u^{18} + 36t^7u^{21} + 15t^4u^{24} + \\
& t^{26}u + 16t^{23}u^4 + 34t^{20}u^7 + 81t^{17}u^{10} + 77t^{14}u^{13} + 64t^{11}u^{16} + 63t^8u^{19} + 19t^5u^{22} + 3t^2u^{25} + 3t^{24}u^2 + 28t^{21}u^5 + 63t^{18}u^8 + \\
& 66t^{15}u^{11} + 97t^{12}u^{14} + 65t^9u^{17} + 34t^6u^{20} + 13t^3u^{23} + 13t^{22}u^3 + 30t^{19}u^6 + 72t^{16}u^9 + 78t^{13}u^{12} + 60t^{10}u^{15} + 56t^7u^{18} + \\
& 14t^4u^{21} + 2tu^{24} + t^{23}u + 23t^{20}u^4 + 55t^{17}u^7 + 62t^{14}u^{10} + 91t^{11}u^{13} + 58t^8u^{16} + 29t^5u^{19} + 9t^2u^{22} + 8t^{21}u^2 + 24t^{18}u^5 + \\
& 63t^{15}u^8 + 73t^{12}u^{11} + 56t^9u^{14} + 47t^6u^{17} + 10t^3u^{20} + u^{23} + 16t^{19}u^3 + 47t^{16}u^6 + 55t^{13}u^9 + 84t^{10}u^{12} + 48t^7u^{15} + 21t^4u^{18} + \\
& 7tu^{21} + 5t^{20}u + 15t^{17}u^4 + 56t^{14}u^7 + 66t^{11}u^{10} + 50t^8u^{13} + 36t^5u^{16} + 6t^2u^{19} + 11t^{18}u^2 + 36t^{15}u^5 + 48t^{12}u^8 + 74t^9u^{11} + \\
& 37t^6u^{14} + 14t^3u^{17} + 3u^{20} + 2t^{19} + 10t^{16}u^3 + 43t^{13}u^6 + 59t^{10}u^9 + 41t^7u^{12} + 27t^4u^{15} + 3tu^{18} + 6t^{17}u + 27t^{14}u^4 + 39t^{11}u^7 + \\
& 61t^8u^{10} + 30t^5u^{13} + 3t^2u^{16} + 6t^{15}u^2 + 33t^{12}u^5 + 47t^9u^8 + 33t^6u^{11} + 18t^3u^{14} + 2t^{16} + 19t^{13}u^3 + 29t^{10}u^6 + 50t^7u^9 + 21t^4u^{12} + \\
& 3tu^{15} + t^{14}u + 23t^{11}u^4 + 34t^8u^7 + 24t^5u^{10} + 11t^2u^{13} + 11t^{12}u^2 + 22t^9u^5 + 37t^6u^8 + 13t^3u^{11} + 2u^{14} + 14t^{10}u^3 + 25t^7u^6 + \\
& 14t^4u^9 + 6tu^{12} + 6t^{11}u + 13t^8u^4 + 24t^5u^7 + 8t^2u^{10} + 8t^9u^2 + 15t^6u^5 + 9t^3u^8 + 2u^{11} + 3t^{10} + 6t^7u^3 + 15t^4u^6 + 3tu^9 + 5t^8u + \\
& 8t^5u^4 + 4t^2u^7 + 3t^6u^2 + 8t^3u^5 + t^7 + 4t^4u^3 + tu^6 + t^5u + 4t^2u^4 + t^3u^2 + 2tu^3 + u^2)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(u^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$M_G(t, u)_{16} = M_G(u, t)_{15}$$

$$\begin{aligned}
M_G(t, u)_{17} = & t^{29}u^{27} + t^{26}u^{30} + t^{30}u^{25} + t^{27}u^{28} + 3t^{28}u^{26} + 3t^{25}u^{29} + 3t^{29}u^{24} + 2t^{26}u^{27} + t^{23}u^{30} + t^{30}u^{22} + 6t^{27}u^{25} + 7t^{24}u^{28} + \\
& 7t^{28}u^{23} + 6t^{25}u^{26} + 3t^{22}u^{29} + 2t^{29}u^{21} + 12t^{26}u^{24} + 12t^{23}u^{27} + 13t^{27}u^{22} + 12t^{24}u^{25} + 7t^{21}u^{28} + 7t^{28}u^{20} + 19t^{25}u^{23} + \\
& 20t^{22}u^{26} + 2t^{19}u^{29} + 3t^{29}u^{18} + 22t^{26}u^{21} + 19t^{23}u^{24} + 15t^{20}u^{27} + t^{17}u^{30} + 4t^{30}u^{16} + 13t^{27}u^{19} + 28t^{24}u^{22} + 30t^{21}u^{25} + \\
& 6t^{18}u^{28} + 6t^{28}u^{17} + 32t^{25}u^{20} + 29t^{22}u^{23} + 22t^{19}u^{26} + 6t^{16}u^{29} + 9t^{29}u^{15} + 20t^{26}u^{18} + 41t^{23}u^{21} + 42t^{20}u^{24} + 11t^{17}u^{27} + \\
& 4t^{14}u^{30} + t^{30}u^{13} + 11t^{27}u^{16} + 44t^{24}u^{19} + 40t^{21}u^{22} + 32t^{18}u^{25} + 9t^{15}u^{28} + 13t^{28}u^{14} + 30t^{25}u^{17} + 52t^{22}u^{20} + 55t^{19}u^{23} + \\
& 18t^{16}u^{26} + 7t^{13}u^{29} + 3t^{29}u^{12} + 18t^{26}u^{15} + 56t^{23}u^{18} + 48t^{20}u^{21} + 43t^{17}u^{24} + 15t^{14}u^{27} + 21t^{27}u^{13} + 37t^{24}u^{16} + 63t^{21}u^{19} + \\
& 68t^{18}u^{22} + 27t^{15}u^{25} + 12t^{12}u^{28} + 7t^{28}u^{11} + 27t^{25}u^{14} + 68t^{22}u^{17} + 57t^{19}u^{20} + 50t^{16}u^{23} + 24t^{13}u^{26} + t^{10}u^{29} + 2t^{29}u^9 + \\
& 29t^{26}u^{12} + 42t^{23}u^{15} + 72t^{20}u^{18} + 78t^{17}u^{21} + 32t^{14}u^{24} + 18t^{11}u^{27} + t^8u^{30} + t^{30}u^7 + 12t^{27}u^{10} + 35t^{24}u^{13} + 75t^{21}u^{16} + 63t^{18}u^{19} + \\
& 60t^{15}u^{22} + 32t^{12}u^{25} + 5t^9u^{28} + 6t^{28}u^8 + 36t^{25}u^{11} + 52t^{22}u^{14} + 78t^{19}u^{17} + 84t^{16}u^{20} + 40t^{13}u^{23} + 24t^{10}u^{26} + 3t^7u^{29} + 3t^{29}u^6 + \\
& 16t^{26}u^9 + 44t^{23}u^{12} + 81t^{20}u^{15} + 65t^{17}u^{18} + 67t^{14}u^{21} + 40t^{11}u^{24} + 8t^8u^{27} + t^5u^{30} + t^{30}u^4 + 7t^{27}u^7 + 45t^{24}u^{10} + 58t^{21}u^{13} + \\
& 80t^{18}u^{16} + 90t^{15}u^{19} + 47t^{12}u^{22} + 30t^9u^{25} + 5t^6u^{28} + 4t^{28}u^5 + 21t^{25}u^8 + 50t^{22}u^{11} + 86t^{19}u^{14} + 65t^{16}u^{17} + 71t^{13}u^{20} + \\
& 49t^{10}u^{23} + 9t^7u^{26} + 2t^4u^{29} + t^{29}u^3 + 9t^{26}u^6 + 51t^{23}u^9 + 63t^{20}u^{12} + 84t^{17}u^{15} + 95t^{14}u^{18} + 53t^{11}u^{21} + 35t^8u^{24} + 6t^5u^{27} + \\
& 5t^{24}u + 23t^{21}u^4 + 54t^{18}u^7 + 89t^{15}u^{10} + 66t^{12}u^{13} + 75t^{12}u^{16} + 75t^{12}u^{19} + 50t^9u^{22} + 12t^6u^{25} + 2t^3u^{28} + t^{28}u^2 + 11t^{25}u^5 + 50t^{22}u^8 + \\
& 66t^{19}u^{11} + 85t^{16}u^{14} + 97t^{13}u^{17} + 55t^{10}u^{20} + 36t^7u^{23} + 7t^4u^{26} + 5t^{26}u^3 + 23t^{23}u^6 + 54t^{20}u^9 + 89t^{17}u^{12} + 66t^{14}u^{15} + \\
& 75t^{11}u^{18} + 50t^8u^{21} + 12t^5u^{24} + 2t^2u^{27} + t^{27}u + 9t^{24}u^4 + 51t^{21}u^7 + 63t^{18}u^{10} + 84t^{15}u^{13} + 95t^{12}u^{16} + 53t^9u^{19} + 35t^6u^{22} + \\
& 6t^3u^{25} + 4t^{25}u^2 + 21t^{22}u^5 + 50t^{19}u^8 + 86t^{16}u^{11} + 65t^{13}u^{14} + 71t^{10}u^{17} + 49t^7u^{20} + 9t^4u^{23} + 2tu^{26} + t^{26}u + 7t^{23}u^3 + 45t^{20}u^6 + \\
& 58t^{17}u^9 + 80t^{14}u^{12} + 90t^{11}u^{15} + 47t^8u^{18} + 30t^5u^{21} + 5t^2u^{24} + 3t^{24}u + 16t^{21}u^4 + 44t^{18}u^7 + 81t^{15}u^{10} + 65t^{12}u^{13} + 67t^9u^{16} + \\
& 40t^6u^{19} + 8t^3u^{22} + u^{25} + 6t^{22}u^2 + 36t^{19}u^5 + 52t^{16}u^8 + 78t^{13}u^{11} + 84t^{10}u^{14} + 40t^7u^{17} + 24t^4u^{20} + 3tu^{23} + t^{23}u + 12t^{20}u^3 + \\
& 35t^{17}u^6 + 75t^{14}u^9 + 63t^{11}u^{12} + 60t^8u^{15} + 32t^5u^{18} + 5t^2u^{21} + 2t^{21}u + 29t^{18}u^4 + 42t^{15}u^7 + 72t^{12}u^{10} + 78t^9u^{13} + 32t^6u^{16} +
\end{aligned}$$

$$18t^3u^{19}+u^{22}+7t^{19}u^2+27t^{16}u^5+68t^{13}u^8+57t^{10}u^{11}+50t^7u^{14}+24t^4u^{17}+tu^{20}+21t^{17}u^3+37t^{14}u^6+63t^{11}u^9+68t^8u^{12}+27t^5u^{15}+12t^2u^{18}+3t^{18}u+18t^{15}u^4+56t^{12}u^7+48t^9u^{10}+43t^6u^{13}+15t^3u^{16}+13t^{16}u^2+30t^{13}u^5+52t^{10}u^8+55t^7u^{11}+18t^4u^{14}+7tu^{17}+t^{17}+11t^{14}u^3+44t^{11}u^6+40t^8u^9+32t^5u^{12}+9t^2u^{15}+9t^{15}u+20t^{12}u^4+41t^9u^7+42t^6u^{10}+11t^3u^{13}+4u^{16}+6t^{13}u^2+32t^{10}u^5+29t^7u^8+22t^4u^{11}+6tu^{14}+4t^{14}+13t^{11}u^3+28t^8u^6+30t^5u^9+6t^2u^{12}+3t^{12}u+22t^9u^4+19t^6u^7+15t^3u^{10}+u^{13}+7t^{10}u^2+19t^7u^5+20t^4u^8+2tu^{11}+13t^8u^3+12t^5u^6+7t^2u^9+2t^9u+12t^6u^4+12t^3u^7+7t^7u^2+6t^4u^5+3tu^8+t^8+6t^5u^3+7t^2u^6+3t^6u+2t^3u^4+u^7+3t^4u^2+3tu^5+t^5+t^2u^3+t^3u+u^4)(u^4-u^2+1)(t^2+1)(t^4-t^2+1)(u^2+1)$$

$$M_G(t, u)_{18} = M_G(u, t)_{14}$$

$$M_G(t, u)_{19} = (t^{17}u^{17}+2t^{16}u^{16}+5t^{15}u^{15}+2t^{16}u^{13}+2t^{13}u^{16}+2t^{17}u^{11}+10t^{14}u^{14}+2t^{11}u^{17}+3t^{18}u^9+4t^{15}u^{12}+4t^{12}u^{15}+3t^9u^{18}+5t^{16}u^{10}+13t^{13}u^{13}+5t^{10}u^{16}+5t^{17}u^8+5t^{14}u^{11}+5t^{11}u^{14}+5t^8u^{17}+6t^{15}u^9+20t^{12}u^{12}+6t^9u^{15}+7t^{16}u^7+9t^{13}u^{10}+9t^{10}u^{13}+7t^7u^{16}+9t^{14}u^8+29t^{11}u^{11}+9t^8u^{14}+10t^{15}u^6+12t^{12}u^9+12t^9u^{12}+10t^{16}u^{15}+t^{16}u^4+10t^{13}u^7+34t^{10}u^{10}+10t^7u^{13}+t^4u^{16}+t^{17}u^2+11t^{14}u^5+10t^{11}u^8+10t^8u^{11}+11t^5u^{14}+t^2u^{17}+2t^{15}u^3+8t^{12}u^6+33t^9u^9+8t^6u^{12}+2t^3u^{15}+t^{16}u+11t^{13}u^4+10t^{10}u^7+10t^7u^{10}+11t^4u^{13}+tu^{16}+t^{14}u^2+10t^{11}u^5+34t^8u^8+10t^5u^{11}+t^2u^{14}+10t^{12}u^3+12t^9u^6+12t^6u^9+10t^3u^{12}+9t^{10}u^4+29t^7u^7+9t^4u^{10}+7t^{11}u^2+9t^8u^5+9t^5u^8+7t^2u^{11}+6t^9u^3+20t^6u^6+6t^3u^9+5t^{10}u+5t^7u^4+5t^4u^7+5tu^{10}+5t^8u^2+13t^5u^5+5t^2u^8+3t^9+4t^6u^3+4t^3u^6+3u^9+2t^7u+10t^4u^4+2tu^7+2t^5u^2+2t^2u^5+5t^3u^3+2t^2u+tu)(t^6-t^3+1)(u^6-u^3+1)(t+1)^2(u^4-u^2+1)(t^2+1)(t^4-t^2+1)(t^2-t+1)(u+1)^2(u^2-u+1)^2(u^2+1)$$

$$M_G(t, u)_{20} = (t^{15}u^{18}+t^{16}u^{16}+t^{17}u^{14}+3t^{14}u^{17}+2t^{18}u^{12}+2t^{15}u^{15}+3t^{16}u^{13}+5t^{13}u^{16}+5t^{17}u^{11}+3t^{14}u^{14}+4t^{15}u^{12}+10t^{12}u^{15}+8t^{16}u^{10}+6t^{13}u^{13}+3t^{10}u^{16}+6t^{14}u^{11}+17t^{11}u^{14}+3t^8u^{17}+13t^{15}u^9+8t^{12}u^{12}+6t^9u^{15}+2t^{16}u^7+10t^{13}u^{10}+21t^{10}u^{13}+5t^7u^{16}+2t^{17}u^5+18t^{14}u^8+10t^{11}u^{11}+5t^8u^{14}+3t^5u^{17}+t^{18}u^3+4t^{15}u^6+12t^{12}u^9+26t^9u^{12}+4t^6u^{15}+3t^{16}u^4+19t^{13}u^7+15t^{10}u^{10}+6t^7u^{13}+4t^4u^{16}+t^{17}u^2+3t^{14}u^5+15t^{11}u^8+31t^8u^{11}+6t^5u^{14}+2t^{15}u^3+20t^{12}u^6+18t^9u^9+8t^6u^{12}+5t^3u^{15}+t^{16}u+3t^{13}u^4+15t^{10}u^7+31t^7u^{10}+6t^4u^{13}+3t^{14}u^2+19t^{11}u^5+15t^8u^8+6t^5u^{11}+4t^2u^{14}+t^{15}+4t^{12}u^3+12t^9u^6+26t^6u^9+4t^3u^{12}+2t^{13}u+18t^{10}u^4+10t^7u^7+5t^4u^{10}+3tu^{13}+2t^{11}u^2+10t^8u^5+21t^5u^8+5t^2u^{11}+13t^9u^3+8t^6u^6+6t^3u^9+2u^{12}+6t^7u^4+17t^4u^7+3tu^{10}+8t^8u^2+6t^5u^5+3t^2u^8+4t^6u^3+10t^3u^6+5t^7u+3t^4u^4+3t^5u^2+5t^2u^5+2t^6+2t^3u^3+t^4u+3tu^4+t^2u^2+u^3)(t^6-t^3+1)(u^6-u^3+1)(t+1)^2(u^4-u^2+1)(t^2+1)(t^4-t^2+1)(t^2-t+1)^2(u+1)^2(u^2-u+1)^2(u^2+1)$$

$$M_G(t, u)_{21} = M_G(u, t)_{20}$$

$$M_G(t, u)_{22} = (t^{17}u^{16}+t^{15}u^{17}+3t^{16}u^{15}+t^{13}u^{18}+t^{17}u^{13}+2t^{14}u^{16}+2t^{18}u^{11}+6t^{15}u^{14}+3t^{12}u^{17}+3t^{16}u^{12}+4t^{13}u^{15}+3t^{17}u^{10}+10t^{14}u^{13}+6t^{11}u^{16}+4t^{15}u^{11}+6t^{12}u^{14}+t^9u^{17}+6t^{16}u^9+14t^{13}u^{12}+9t^{10}u^{15}+2t^7u^{18}+2t^{17}u^7+6t^{14}u^{10}+8t^{11}u^{13}+3t^8u^{16}+t^{18}u^5+9t^{15}u^8+16t^{12}u^{11}+12t^9u^{14}+3t^6u^{17}+3t^{16}u^6+7t^{13}u^9+9t^{10}u^{12}+4t^7u^{15}+2t^{17}u^4+12t^{14}u^7+18t^{11}u^{10}+15t^8u^{13}+5t^5u^{16}+4t^{15}u^5+9t^{12}u^8+10t^9u^{11}+6t^6u^{14}+t^3u^{17}+3t^{16}u^3+14t^{13}u^6+18t^{10}u^9+16t^7u^{12}+6t^4u^{15}+4t^{14}u^4+8t^{11}u^7+9t^8u^{10}+6t^5u^{13}+t^2u^{16}+3t^{15}u^2+14t^{12}u^5+18t^9u^8+16t^6u^{11}+6t^3u^{14}+4t^{13}u^3+9t^{10}u^6+10t^7u^9+6t^4u^{12}+tu^{15}+2t^{14}u+12t^{11}u^4+18t^8u^7+15t^5u^{10}+5t^2u^{13}+3t^{12}u^2+7t^9u^5+9t^6u^8+4t^3u^{11}+t^{13}+9t^{10}u^3+16t^7u^6+12t^4u^9+3tu^{12}+2t^{11}u+6t^8u^4+8t^5u^7+3t^2u^{10}+6t^9u^2+14t^6u^5+9t^3u^8+2u^{11}+4t^7u^3+6t^4u^6+tu^9+3t^8u+10t^5u^4+6t^2u^7+3t^6u^2+4t^3u^5+2t^7+6t^4u^3+3tu^6+t^5u+2t^2u^4+3t^3u^2+u^5+tu^3+t^2u)(t^6-t^3+1)(u^6-u^3+1)(u^6+u^3+1)^2(t^6+t^3+1)^2$$

$$M_G(t, u)_{23} = M_G(u, t)_{22}$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$P_G(t, 0)_0 = P_G(0, t)_0 = \frac{-t^{18}-t^{36}-1}{(t-1)^3(t^6-t^3+1)(t^2+t+1)^3(t+1)^2(t^2+1)(t^4-t^2+1)(t^2-t+1)^2(t^6+t^3+1)^2}.$$

C.4 Type H

$$D_H(t) = (t-1)^3(t^2+t+1)(t^4+t^3+t^2+t+1)(t+1)^2$$

$$M_H(t, u)_0 = t^8u^8+t^8u^7+t^7u^8+2t^7u^7-t^8u^5+t^7u^6+t^6u^7-t^5u^8-t^8u^4-t^7u^5+2t^6u^6-t^5u^7-t^4u^8-t^8u^3-2t^7u^4+t^6u^5+t^5u^6-2t^4u^7-t^3u^8-t^7u^3+4t^5u^5-t^3u^7+t^8u+t^7u^2+t^6u^3+5t^5u^4+5t^4u^5+t^3u^6+t^2u^7+tu^8+t^8+2t^7u+2t^6u^2+4t^5u^3+8t^4u^4+4t^3u^5+2t^2u^6+2tu^7+u^8+t^7+t^6u+t^5u^2+5t^4u^3+5t^3u^4+t^2u^5+tu^6+u^7-t^5u+4t^3u^3-tu^5-t^5-2t^4u+t^3u^2+t^2u^3-2tu^4-u^5-t^4-t^3u+2t^2u^2-tu^3-u^4-t^3+t^2u+tu^2-u^3+2tu+t+u+1$$

$$M_H(t, u)_1 = (t^6u^3+t^5u^4+t^4u^5+t^3u^6+t^5u^3+t^4u^4+t^3u^5+t^5u^2+t^2u^5+t^4u^2+t^2u^4+t^4u+tu^4+t^3u+t^2u^2+tu^3+t^3+t^2u+tu^2+u^3)(u^2+u+1)(t^2+t+1)$$

$$M_H(t, u)_2 = (t^6u^5+t^5u^6+t^5u^5-t^6u^3-t^3u^6-t^5u^3+t^4u^4-t^3u^5+t^6u+2t^4u^3+2t^3u^4+tu^6+t^5u+t^4u^2+4t^3u^3+t^2u^4+tu^5+t^5+2t^3u^2+2t^2u^3+u^5-t^3u+t^2u^2-tu^3-t^3-u^3+tu+t+u)(u^2+u+1)(t^2+t+1)$$

$$M_H(t, u)_3 = (t^6u^3 + t^5u^4 + t^4u^5 + t^3u^6 + t^5u^2 + t^4u^3 + t^3u^4 + t^2u^5 - t^3u^3 + t^4u + t^3u^2 + t^2u^3 + tu^4 + t^3 + t^2u + tu^2 + u^3)(u+1)^2(t+1)^2$$

$$M_H(t, u)_4 = (t^4u^2 + t^3u^3 + t^2u^4 + t^3u^2 + t^2u^3 + t^3u + tu^3 + t^2u + tu^2 + t^2 + tu + u^2)(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$P_H(t, 0)_0 = P_H(0, t)_0 = \frac{-t^8 - t^7 + t^5 + t^4 + t^3 - t - 1}{(t-1)^3(t^2 + t + 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t+1)^2}.$$

C.5 Type I

$$D_I(t) = (t-1)^3(t^2 + t + 1)(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t^2 + 1)(t+1)^2$$

$$M_I(t, u)_0 = t^{12}u^{12} + t^{12}u^{11} + t^{11}u^{12} + 2t^{11}u^{11} - t^{12}u^9 + t^{11}u^{10} + t^{10}u^{11} - t^9u^{12} - t^{12}u^8 - t^{11}u^9 + 2t^{10}u^{10} - t^9u^{11} - t^8u^{12} - 2t^{11}u^8 + t^{10}u^9 + t^9u^{10} - 2t^8u^{11} + t^{12}u^6 - t^{11}u^7 + 4t^9u^9 - t^7u^{11} + t^6u^{12} + t^{11}u^6 - t^{10}u^7 + 4t^9u^8 + 4t^8u^9 - t^7u^{10} + t^6u^{11} - t^{12}u^4 + t^{11}u^5 + 2t^9u^7 + 6t^8u^8 + 2t^7u^9 + t^5u^{11} - t^4u^{12} - t^{12}u^3 + t^{10}u^5 + 5t^8u^7 + 5t^7u^8 + t^5u^{10} - t^3u^{12} + 2t^{10}u^4 + 2t^8u^6 + 7t^7u^7 + 2t^6u^8 + 2t^4u^{10} + t^{12}u + 2t^{10}u^3 + 2t^9u^4 + t^8u^5 + 5t^7u^6 + 5t^6u^7 + t^5u^8 + 2t^4u^9 + 2t^3u^{10} + tu^{12} + t^{12} + t^{11}u + t^{10}u^2 + 3t^9u^3 + 2t^8u^4 + 3t^7u^5 + 6t^6u^6 + 3t^5u^7 + 2t^4u^8 + 3t^3u^9 + t^2u^{10} + tu^{11} + u^{12} + t^{11} + 2t^9u^2 + 2t^8u^3 + t^7u^4 + 5t^6u^5 + 5t^5u^6 + t^4u^7 + 2t^3u^8 + 2t^2u^9 + u^{11} + 2t^8u^2 + 2t^6u^4 + 7t^5u^5 + 2t^4u^6 + 2t^2u^8 - t^9 + t^7u^2 + 5t^5u^4 + 5t^4u^5 + t^2u^7 - u^9 - t^8 + t^7u + 2t^5u^3 + 6t^4u^4 + 2t^3u^5 + tu^7 - u^8 + t^6u - t^5u^2 + 4t^4u^3 + 4t^3u^4 - t^2u^5 + tu^6 + t^6 - t^5u + 4t^3u^3 - tu^5 + u^6 - 2t^4u + t^3u^2 + t^2u^3 - 2tu^4 - t^4 - t^3u + 2t^2u^2 - tu^3 - u^4 - t^3 + t^2u + tu^2 - u^3 + 2tu + t + u + 1$$

$$M_I(t, u)_1 = (t^9u^{10} + t^{10}u^7 - t^9u^8 + t^8u^9 - t^7u^{10} + t^7u^9 + t^9u^6 - t^8u^7 + 3t^7u^8 + t^9u^5 + t^8u^6 + t^6u^8 - t^{10}u^3 + t^9u^4 + t^8u^5 + 2t^6u^7 + t^5u^8 + t^3u^{10} + t^8u^4 + t^6u^6 + 2t^5u^7 + t^4u^8 - t^3u^9 + t^{10}u - t^9u^2 + 3t^8u^3 + t^6u^5 + t^5u^6 + 2t^4u^7 - t^3u^8 + t^2u^9 + 2t^7u^3 + t^6u^4 + t^5u^5 + t^4u^6 + 2t^3u^7 + tu^9 + t^9 - t^8u + 3t^7u^2 + t^5u^4 + t^4u^5 + 2t^3u^6 - t^2u^7 + tu^8 + t^6u^2 + t^4u^4 + 2t^3u^5 + t^2u^6 - tu^7 - t^7 + t^6u + t^5u^2 + 2t^3u^4 + t^2u^5 + u^7 + t^5u + t^4u^2 + t^2u^4 + t^4u - t^3u^2 + 3t^2u^3 + tu^3 + t^3 - t^2u + tu^2 - u^3 + u)(u^2 + u + 1)(t^2 + t + 1)$$

$$M_I(t, u)_2 = M_I(u, t)_1$$

$$M_I(t, u)_3 = (t^8u^6 + t^6u^8 - t^8u^4 + 2t^7u^5 - 2t^6u^6 + 2t^5u^7 - t^4u^8 + t^7u^4 + t^6u^5 + t^5u^6 + t^4u^7 + t^8u^2 - t^7u^3 + 4t^6u^4 - 4t^5u^5 + 4t^4u^6 - t^3u^7 + t^2u^8 + t^6u^3 + t^3u^6 + t^7u - 2t^6u^2 + 5t^5u^3 - 4t^4u^4 + 5t^3u^5 - 2t^2u^6 + tu^7 + t^5u^2 + t^2u^5 + t^6 - t^5u + 4t^4u^2 - 4t^3u^3 + 4t^2u^4 - tu^5 + u^6 + t^4u + t^3u^2 + t^2u^3 + tu^4 - t^4 + 2t^3u - 2t^2u^2 + 2tu^3 - u^4 + t^2 + u^2)(u^2 + u + 1)(u^2 + 1)(t^2 + t + 1)(t + 1)$$

$$M_I(t, u)_4 = (t^6u^3 + t^5u^4 + t^4u^5 + t^3u^6 + t^5u^3 + t^4u^4 + t^3u^5 + t^5u^2 + t^4u^3 + t^3u^4 + t^2u^5 + t^4u^2 + t^2u^4 + t^4u + t^3u^2 + t^2u^3 + tu^4 + t^3u + t^2u^2 + tu^3 + t^3 + t^2u + tu^2 + u^3)(u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$$

$$M_I(t, u)_5 = (t^7u^7 + t^8u^4 + t^6u^6 + t^4u^8 - t^7u^4 + t^6u^5 + t^5u^6 - t^4u^7 + t^7u^3 + t^5u^5 + t^3u^7 + t^7u^2 + t^2u^7 + 3t^4u^4 + t^6u + tu^6 + t^5u + t^3u^3 + tu^5 - t^4u + t^3u^2 + t^2u^3 - tu^4 + t^4 + t^2u^2 + u^4 + tu)(u^2 + 1)(u + 1)^2(t^2 + 1)(t + 1)^2$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$P_I(t, 0)_0 = P_I(0, t)_0 = \frac{-t^{12} - t^{11} + t^9 + t^8 - t^6 + t^4 + t^3 - t - 1}{(t-1)^3(t^2 + t + 1)(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t^2 + 1)(t+1)^2}.$$

C.6 Type J

$$D_J(t) = (t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1)(t+1)^2(t^2 - t + 1)^2(t-1)^3(t^2 + t + 1)^3$$

$$M_J(t, u)_0 = t^{24}u^{24} + t^{23}u^{23} + 2t^{22}u^{22} + 3t^{21}u^{21} + t^{22}u^{19} + t^{19}u^{22} + t^{23}u^{17} + 6t^{20}u^{20} + t^{17}u^{23} + 3t^{21}u^{18} + 3t^{18}u^{21} + 3t^{22}u^{16} + 10t^{19}u^{19} + 3t^{16}u^{22} + 2t^{23}u^{14} + 6t^{20}u^{17} + 6t^{17}u^{20} + 2t^{14}u^{23} + t^{24}u^{12} + 6t^{21}u^{15} + 14t^{18}u^{18} + 6t^{15}u^{21} + t^{12}u^{24} + 3t^{22}u^{13} + 10t^{19}u^{16} + 10t^{16}u^{19} + 3t^{13}u^{22} + 2t^{23}u^{11} + 9t^{20}u^{14} + 18t^{17}u^{17} + 9t^{14}u^{20} + 2t^{11}u^{23} + 6t^{21}u^{12} + 15t^{18}u^{15} + 15t^{15}u^{18} + 6t^{12}u^{21} + 4t^{22}u^{10} + 12t^{19}u^{13} + 20t^{16}u^{16} + 12t^{13}u^{19} + 4t^{10}u^{22} + t^{23}u^8 + 9t^{20}u^{11} + 18t^{17}u^{14} + 18t^{14}u^{17} + 9t^{11}u^{20} + t^8u^{23} + 6t^{21}u^9 + 14t^{18}u^{12} + 21t^{15}u^{15} + 14t^{12}u^{18} + 6t^9u^{21} + 2t^{22}u^7 + 13t^{19}u^{10} + 21t^{16}u^{13} + 21t^{13}u^{16} + 13t^{10}u^{19} + 2t^7u^{22} + 2t^{23}u^5 + 9t^{20}u^8 + 17t^{17}u^{11} + 22t^{14}u^{14} + 17t^{11}u^{17} + 9t^8u^{20} + 2t^5u^{23} + 3t^{21}u^6 + 15t^{18}u^9 + 21t^{15}u^{12} + 21t^{12}u^{15} + 15t^9u^{18} + 3t^6u^{21} + 3t^{22}u^4 + 12t^{19}u^7 + 19t^{16}u^{10} + 23t^{13}u^{13} + 19t^{10}u^{16} + 12t^7u^{19} + 3t^4u^{22} + 3t^{20}u^5 + 16t^{17}u^8 + 21t^{14}u^{11} +$$

$$\begin{aligned}
& 21 t^{11} u^{14} + 16 t^8 u^{17} + 3 t^5 u^{20} + t^{24} + 3 t^{21} u^3 + 14 t^{18} u^6 + 21 t^{15} u^9 + 24 t^{12} u^{12} + 21 t^9 u^{15} + 14 t^6 u^{18} + 3 t^3 u^{21} + u^{24} + 3 t^{19} u^4 + \\
& 16 t^{16} u^7 + 21 t^{13} u^{10} + 21 t^{10} u^{13} + 16 t^7 u^{16} + 3 t^4 u^{19} + 3 t^{20} u^2 + 12 t^{17} u^5 + 19 t^{14} u^8 + 23 t^{11} u^{11} + 19 t^8 u^{14} + 12 t^5 u^{17} + 3 t^2 u^{20} + \\
& 3 t^{18} u^3 + 15 t^{15} u^6 + 21 t^{12} u^9 + 21 t^9 u^{12} + 15 t^6 u^{15} + 3 t^3 u^{18} + 2 t^{19} u + 9 t^{16} u^4 + 17 t^{13} u^7 + 22 t^{10} u^{10} + 17 t^7 u^{13} + 9 t^4 u^{16} + \\
& 2 t u^{19} + 2 t^{17} u^2 + 13 t^{14} u^5 + 21 t^{11} u^8 + 21 t^8 u^{11} + 13 t^5 u^{14} + 2 t^2 u^{17} + 6 t^{15} u^3 + 14 t^{12} u^6 + 21 t^9 u^9 + 14 t^6 u^{12} + 6 t^3 u^{15} + t^{16} u + \\
& 9 t^{13} u^4 + 18 t^{10} u^7 + 18 t^7 u^{10} + 9 t^4 u^{13} + t u^{16} + 4 t^{14} u^2 + 12 t^{11} u^5 + 20 t^8 u^8 + 12 t^5 u^{11} + 4 t^2 u^{14} + 6 t^{12} u^3 + 15 t^9 u^6 + 15 t^6 u^9 + \\
& 6 t^3 u^{12} + 2 t^{13} u + 9 t^{10} u^4 + 18 t^7 u^7 + 9 t^4 u^{10} + 2 t u^{13} + 3 t^{11} u^2 + 10 t^8 u^5 + 10 t^5 u^8 + 3 t^2 u^{11} + t^{12} + 6 t^9 u^3 + 14 t^6 u^6 + 6 t^3 u^9 + u^{12} + \\
& 2 t^{10} u + 6 t^7 u^4 + 6 t^4 u^7 + 2 t u^{10} + 3 t^8 u^2 + 10 t^5 u^5 + 3 t^2 u^8 + 3 t^6 u^3 + 3 t^3 u^6 + t^7 u + 6 t^4 u^4 + t u^7 + t^5 u^2 + t^2 u^5 + 3 t^3 u^3 + 2 t^2 u^2 + t u + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_J(t, u)_1 &= t^{24} u^{22} + t^{23} u^{21} + t^{20} u^{24} + 3 t^{22} u^{20} + 2 t^{19} u^{23} + t^{23} u^{18} + t^{20} u^{21} + 5 t^{21} u^{19} + 3 t^{18} u^{22} + 2 t^{22} u^{17} + 3 t^{19} u^{20} + \\
& t^{16} u^{23} + 2 t^{23} u^{15} + 8 t^{20} u^{18} + 6 t^{17} u^{21} + t^{14} u^{24} + 5 t^{21} u^{16} + 7 t^{18} u^{19} + 3 t^{15} u^{22} + 4 t^{22} u^{14} + 12 t^{19} u^{17} + 9 t^{16} u^{20} + 2 t^{13} u^{23} + \\
& t^{23} u^{12} + 8 t^{20} u^{15} + 11 t^{17} u^{18} + 6 t^{14} u^{21} + t^{24} u^{10} + 6 t^{21} u^{13} + 16 t^{18} u^{16} + 13 t^{15} u^{19} + 4 t^{12} u^{22} + 3 t^{22} u^{11} + 13 t^{19} u^{14} + 16 t^{16} u^{17} + \\
& 9 t^{13} u^{20} + 2 t^{10} u^{23} + 2 t^{23} u^9 + 9 t^{20} u^{12} + 18 t^{17} u^{15} + 15 t^{14} u^{18} + 6 t^{11} u^{21} + 6 t^{21} u^{10} + 17 t^{18} u^{13} + 19 t^{15} u^{16} + 13 t^{12} u^{19} + 3 t^9 u^{22} + \\
& 3 t^{22} u^8 + 12 t^{19} u^{11} + 19 t^{16} u^{14} + 17 t^{13} u^{17} + 9 t^{10} u^{20} + t^7 u^{23} + t^{23} u^6 + 8 t^{20} u^9 + 20 t^{17} u^{12} + 21 t^{14} u^{15} + 17 t^{11} u^{18} + 5 t^8 u^{21} + \\
& t^{24} u^4 + 6 t^{21} u^7 + 15 t^{18} u^{10} + 21 t^{15} u^{13} + 19 t^{12} u^{16} + 13 t^9 u^{19} + 3 t^6 u^{22} + t^{22} u^5 + 10 t^{19} u^8 + 21 t^{16} u^{11} + 21 t^{13} u^{14} + 18 t^{10} u^{17} + \\
& 6 t^7 u^{20} + t^{23} u^3 + 8 t^{20} u^6 + 18 t^{17} u^9 + 22 t^{14} u^{12} + 21 t^{11} u^{15} + 16 t^8 u^{18} + 5 t^5 u^{21} + t^2 u^{24} + t^{21} u^4 + 11 t^{18} u^7 + 21 t^{15} u^{10} + \\
& 20 t^{12} u^{13} + 19 t^9 u^{16} + 7 t^6 u^{19} + 2 t^{22} u^2 + 10 t^{19} u^5 + 20 t^{16} u^8 + 23 t^{13} u^{11} + 22 t^{10} u^{14} + 18 t^7 u^{17} + 6 t^4 u^{20} + t u^{23} + t^{20} u^3 + \\
& 11 t^{17} u^6 + 21 t^{14} u^9 + 20 t^{11} u^{12} + 19 t^8 u^{15} + 7 t^5 u^{18} + t^{21} u + 8 t^{18} u^4 + 18 t^{15} u^7 + 22 t^{12} u^{10} + 21 t^9 u^{13} + 16 t^6 u^{16} + 5 t^3 u^{19} + u^{22} + \\
& t^{19} u^2 + 10 t^{16} u^5 + 21 t^{13} u^8 + 21 t^{10} u^{11} + 18 t^7 u^{14} + 6 t^4 u^{17} + t^{20} + 6 t^{17} u^3 + 15 t^{14} u^6 + 21 t^{11} u^9 + 19 t^8 u^{12} + 13 t^5 u^{15} + 3 t^2 u^{18} + \\
& t^{18} u + 8 t^{15} u^4 + 20 t^{12} u^7 + 21 t^9 u^{10} + 17 t^6 u^{13} + 5 t^3 u^{16} + 3 t^{16} u^2 + 12 t^{13} u^5 + 19 t^{10} u^8 + 17 t^7 u^{11} + 9 t^4 u^{14} + t u^{17} + 6 t^{14} u^3 + \\
& 17 t^{11} u^6 + 19 t^8 u^9 + 13 t^5 u^{12} + 3 t^2 u^{15} + 2 t^{15} u + 9 t^{12} u^4 + 18 t^9 u^7 + 15 t^6 u^{10} + 6 t^3 u^{13} + 3 t^{13} u^2 + 13 t^{10} u^5 + 16 t^7 u^8 + 9 t^4 u^{11} + \\
& 2 t u^{14} + t^{14} + 6 t^{11} u^3 + 16 t^8 u^6 + 13 t^5 u^9 + 4 t^2 u^{12} + t^{12} u + 8 t^9 u^4 + 11 t^6 u^7 + 6 t^3 u^{10} + 4 t^{10} u^2 + 12 t^7 u^5 + 9 t^4 u^8 + 2 t u^{11} + 5 t^8 u^3 + \\
& 7 t^5 u^6 + 3 t^2 u^9 + 2 t^9 u + 8 t^6 u^4 + 6 t^3 u^7 + u^{10} + 2 t^7 u^2 + 3 t^4 u^5 + t u^8 + 5 t^5 u^3 + 3 t^2 u^6 + t^6 u + t^3 u^4 + 3 t^4 u^2 + 2 t u^5 + t^3 u + u^4 + t^2
\end{aligned}$$

$$M_J(t, u)_2 = M_J(u, t)_1$$

$$\begin{aligned}
M_J(t, u)_3 &= t^{24} u^{21} + t^{21} u^{24} + t^{22} u^{22} + 3 t^{23} u^{20} + 3 t^{20} u^{23} + 4 t^{21} u^{21} + 8 t^{22} u^{19} + 8 t^{19} u^{22} + 4 t^{23} u^{17} + 9 t^{20} u^{20} + 4 t^{17} u^{23} + \\
& 2 t^{24} u^{15} + 14 t^{21} u^{18} + 14 t^{18} u^{21} + 2 t^{15} u^{24} + 9 t^{22} u^{16} + 20 t^{19} u^{19} + 9 t^{16} u^{22} + 5 t^{23} u^{14} + 24 t^{20} u^{17} + 24 t^{17} u^{20} + 5 t^{14} u^{23} + \\
& 3 t^{24} u^{12} + 17 t^{21} u^{15} + 35 t^{18} u^{18} + 17 t^{15} u^{21} + 3 t^{12} u^{24} + 10 t^{22} u^{13} + 35 t^{19} u^{16} + 35 t^{16} u^{19} + 10 t^{13} u^{22} + 6 t^{23} u^{11} + 27 t^{20} u^{14} + \\
& 45 t^{17} u^{17} + 27 t^{14} u^{20} + 6 t^{11} u^{23} + 2 t^{24} u^9 + 18 t^{21} u^{12} + 46 t^{18} u^{15} + 46 t^{15} u^{18} + 18 t^{12} u^{21} + 2 t^9 u^{24} + 11 t^{22} u^{10} + 37 t^{19} u^{13} + \\
& 55 t^{16} u^{16} + 37 t^{13} u^{19} + 11 t^{10} u^{22} + 6 t^{23} u^8 + 27 t^{20} u^{11} + 55 t^{17} u^{14} + 55 t^{14} u^{17} + 27 t^{11} u^{20} + 6 t^{18} u^{23} + 17 t^{21} u^9 + 44 t^{18} u^{12} + \\
& 61 t^{15} u^{15} + 44 t^{12} u^{18} + 17 t^9 u^{21} + 11 t^{22} u^7 + 38 t^{19} u^{10} + 61 t^{16} u^{13} + 61 t^{13} u^{16} + 38 t^{10} u^{19} + 11 t^7 u^{22} + 2 t^{23} u^5 + 24 t^{20} u^8 + \\
& 52 t^{17} u^{11} + 65 t^{14} u^{14} + 52 t^{11} u^{17} + 24 t^8 u^{20} + 2 t^5 u^{23} + t^{24} u^3 + 14 t^{21} u^6 + 46 t^{18} u^9 + 63 t^{15} u^{12} + 63 t^{12} u^{15} + 46 t^9 u^{18} + 14 t^6 u^{21} + \\
& t^3 u^{24} + 3 t^{22} u^4 + 31 t^{19} u^7 + 59 t^{16} u^{10} + 67 t^{13} u^{13} + 59 t^{10} u^{16} + 31 t^7 u^{19} + 3 t^4 u^{22} + t^{23} u^2 + 18 t^{20} u^5 + 48 t^{17} u^8 + 64 t^{14} u^{11} + \\
& 64 t^{11} u^{14} + 48 t^8 u^{17} + 18 t^5 u^{20} + t^2 u^{23} + 4 t^{21} u^3 + 35 t^{18} u^6 + 61 t^{15} u^9 + 68 t^{12} u^{12} + 61 t^9 u^{15} + 35 t^6 u^{18} + 4 t^3 u^{21} + t^{22} u + \\
& 18 t^{19} u^4 + 48 t^{16} u^7 + 64 t^{13} u^{10} + 64 t^{10} u^{13} + 48 t^7 u^{16} + 18 t^4 u^{19} + t u^{22} + 3 t^{20} u^2 + 31 t^{17} u^5 + 59 t^{14} u^8 + 67 t^{11} u^{11} + 59 t^8 u^{14} + \\
& 31 t^5 u^{17} + 3 t^2 u^{20} + t^{21} + 14 t^{18} u^3 + 46 t^{15} u^6 + 63 t^{12} u^9 + 63 t^9 u^{12} + 46 t^6 u^{15} + 14 t^3 u^{18} + u^{21} + 2 t^{19} u + 24 t^{16} u^4 + 52 t^{13} u^7 + \\
& 65 t^{10} u^{10} + 52 t^7 u^{13} + 24 t^4 u^{16} + 2 t u^{19} + 11 t^{17} u^2 + 38 t^{14} u^5 + 61 t^{11} u^8 + 61 t^8 u^{11} + 38 t^5 u^{14} + 11 t^2 u^{17} + 17 t^{15} u^3 + 44 t^{12} u^6 + \\
& 61 t^9 u^9 + 44 t^6 u^{12} + 17 t^3 u^{15} + 6 t^{16} u + 27 t^{13} u^4 + 55 t^{10} u^7 + 55 t^7 u^{10} + 27 t^4 u^{13} + 6 t u^{16} + 11 t^{14} u^2 + 37 t^{11} u^5 + 55 t^8 u^8 + \\
& 37 t^5 u^{11} + 11 t^2 u^{14} + 2 t^{15} + 18 t^{12} u^3 + 46 t^9 u^6 + 46 t^6 u^9 + 18 t^3 u^{12} + 2 u^{15} + 6 t^{13} u + 27 t^{10} u^4 + 45 t^7 u^7 + 27 t^4 u^{10} + 6 t u^{13} + \\
& 10 t^{11} u^2 + 35 t^8 u^5 + 35 t^5 u^8 + 10 t^2 u^{11} + 3 t^{12} + 17 t^9 u^3 + 35 t^6 u^6 + 17 t^3 u^9 + 3 u^{12} + 5 t^{10} u + 24 t^7 u^4 + 24 t^4 u^7 + 5 t u^{10} + 9 t^8 u^2 + \\
& 20 t^5 u^5 + 9 t^2 u^8 + 2 t^9 + 14 t^6 u^3 + 14 t^3 u^6 + 2 u^9 + 4 t^7 u + 9 t^4 u^4 + 4 t u^7 + 8 t^5 u^2 + 8 t^2 u^5 + 4 t^3 u^3 + 3 t^4 u + 3 t u^4 + t^2 u^2 + t^3 + u^3 + t u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_J(t, u)_4 &= t^{23} u^{23} + t^{24} u^{21} + t^{21} u^{24} + t^{22} u^{22} + 3 t^{23} u^{20} + 3 t^{20} u^{23} + t^{24} u^{18} + 4 t^{21} u^{21} + t^{18} u^{24} + 8 t^{22} u^{19} + 8 t^{19} u^{22} + \\
& 3 t^{23} u^{17} + 9 t^{20} u^{20} + 3 t^{17} u^{23} + 2 t^{24} u^{15} + 14 t^{21} u^{18} + 14 t^{18} u^{21} + 2 t^{15} u^{24} + 9 t^{22} u^{16} + 20 t^{19} u^{19} + 9 t^{16} u^{22} + 6 t^{23} u^{14} + \\
& 24 t^{20} u^{17} + 24 t^{17} u^{20} + 6 t^{14} u^{23} + t^{24} u^{12} + 17 t^{21} u^{15} + 32 t^{18} u^{18} + 17 t^{15} u^{21} + t^{12} u^{24} + 11 t^{22} u^{13} + 35 t^{19} u^{16} + 35 t^{16} u^{19} + \\
& 11 t^{13} u^{22} + 5 t^{23} u^{11} + 27 t^{20} u^{14} + 45 t^{17} u^{17} + 27 t^{14} u^{20} + 5 t^{11} u^{23} + 2 t^{24} u^9 + 18 t^{21} u^{12} + 46 t^{18} u^{15} + 46 t^{15} u^{18} + 18 t^{12} u^{21} + \\
& 2 t^9 u^{24} + 11 t^{22} u^{10} + 38 t^{19} u^{13} + 55 t^{16} u^{16} + 38 t^{13} u^{19} + 11 t^{10} u^{22} + 4 t^{23} u^8 + 27 t^{20} u^{11} + 53 t^{17} u^{14} + 53 t^{14} u^{17} + 27 t^{11} u^{20} + \\
& 4 t^8 u^{23} + t^{24} u^6 + 17 t^{21} u^9 + 48 t^{18} u^{12} + 61 t^{15} u^{15} + 48 t^{12} u^{18} + 17 t^9 u^{21} + t^6 u^{24} + 9 t^{22} u^7 + 38 t^{19} u^{10} + 59 t^{16} u^{13} + 59 t^{13} u^{16} + \\
& 38 t^{10} u^{19} + 9 t^7 u^{22} + 3 t^{23} u^5 + 24 t^{20} u^8 + 55 t^{17} u^{11} + 65 t^{14} u^{14} + 55 t^{11} u^{17} + 24 t^8 u^{20} + 3 t^5 u^{23} + t^{24} u^3 + 14 t^{21} u^6 + 46 t^{18} u^9 + \\
& 63 t^{15} u^{12} + 63 t^{12} u^{15} + 46 t^9 u^{18} + 14 t^6 u^{21} + t^3 u^{24} + 3 t^{22} u^4 + 29 t^{19} u^7 + 59 t^{16} u^{10} + 64 t^{13} u^{13} + 59 t^{10} u^{16} + 29 t^7 u^{19} + \\
& 3 t^4 u^{22} + 2 t^{23} u^2 + 18 t^{20} u^5 + 52 t^{17} u^8 + 65 t^{14} u^{11} + 65 t^{11} u^{14} + 52 t^8 u^{17} + 18 t^5 u^{20} + 2 t^2 u^{23} + 4 t^{21} u^3 + 32 t^{18} u^6 + 61 t^{15} u^9 + \\
& 64 t^{12} u^{12} + 61 t^9 u^{15} + 32 t^6 u^{18} + 4 t^3 u^{21} + 2 t^{22} u + 18 t^{19} u^4 + 52 t^{16} u^7 + 65 t^{13} u^{10} + 65 t^{10} u^{13} + 52 t^7 u^{16} + 18 t^4 u^{19} + 2 t u^{22} + \\
& 3 t^{20} u^2 + 29 t^{17} u^5 + 59 t^{14} u^8 + 64 t^{11} u^{11} + 59 t^8 u^{14} + 29 t^5 u^{17} + 3 t^2 u^{20} + t^{21} + 14 t^{18} u^3 + 46 t^{15} u^6 + 63 t^{12} u^9 + 63 t^9 u^{12} + \\
& 46 t^6 u^{15} + 14 t^3 u^{18} + u^{21} + 3 t^{19} u + 24 t^{16} u^4 + 55 t^{13} u^7 + 65 t^{10} u^{10} + 55 t^7 u^{13} + 24 t^4 u^{16} + 3 t u^{19} + 9 t^{17} u^2 + 38 t^{14} u^5 + \\
& 59 t^{11} u^8 + 59 t^8 u^{11} + 38 t^5 u^{14} + 9 t^2 u^{17} + t^{18} + 17 t^{15} u^3 + 48 t^{12} u^6 + 61 t^9 u^9 + 48 t^6 u^{12} + 17 t^3 u^{15} + u^{18} + 4 t^{16} u + 27 t^{13} u^4 + \\
& 53 t^{10} u^7 + 53 t^7 u^{10} + 27 t^4 u^{13} + 4 t u^{16} + 11 t^{14} u^2 + 38 t^{11} u^5 + 55 t^8 u^8 + 38 t^5 u^{11} + 11 t^2 u^{14} + 2 t^{15} + 18 t^{12} u^3 + 46 t^9 u^6 + \\
& 46 t^6 u^9 + 18 t^3 u^{12} + 2 u^{15} + 5 t^{13} u + 27 t^{10} u^4 + 45 t^7 u^7 + 27 t^4 u^{10} + 5 t u^{13} + 11 t^{11} u^2 + 35 t^8 u^5 + 35 t^5 u^8 + 11 t^2 u^{11} + t^{12} + \\
& 17 t^9 u^3 + 32 t^6 u^6 + 17 t^3 u^9 + u^{12} + 6 t^{10} u + 24 t^7 u^4 + 24 t^4 u^7 + 6 t u^{10} + 9 t^8 u^2 + 20 t^5 u^5 + 9 t^2 u^8 + 2 t^9 + 14 t^6 u^3 + 14 t^3 u^6 + \\
& 2 u^9 + 3 t^7 u + 9 t^4 u^4 + 3 t u^7 + 8 t^5 u^2 + 8 t^2 u^5 + t^6 + 4 t^3 u^3 + u^6 + 3 t^4 u + 3 t u^4 + t^2 u^2 + t^3 + u^3 + t u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_J(t, u)_5 &= t^{23} u^{22} + t^{21} u^{23} + 4 t^{22} u^{21} + 2 t^{19} u^{24} + 2 t^{23} u^{19} + 3 t^{20} u^{22} + 3 t^{24} u^{17} + 9 t^{21} u^{20} + 5 t^{18} u^{23} + 6 t^{22} u^{18} + 9 t^{19} u^{21} + \\
& t^{16} u^{24} + 6 t^{23} u^{16} + 18 t^{20} u^{19} + 11 t^{17} u^{22} + 2 t^{24} u^{14} + 14 t^{21} u^{17} + 18 t^{18} u^{20} + 5 t^{15} u^{23} + 11 t^{22} u^{15} + 28 t^{19} u^{18} + 17 t^{16} u^{21} + \\
& t^{13} u^{24} + 6 t^{23} u^{13} + 24 t^{20} u^{16} + 31 t^{17} u^{19} + 11 t^{14} u^{22} + t^{24} u^{11} + 18 t^{21} u^{14} + 38 t^{18} u^{17} + 27 t^{15} u^{20} + 5 t^{12} u^{23} + 12 t^{22} u^{12} + \\
& 36 t^{19} u^{15} + 44 t^{16} u^{18} + 18 t^{13} u^{21} + 2 t^{10} u^{24} + 5 t^{23} u^{10} + 27 t^{20} u^{13} + 48 t^{17} u^{16} + 38 t^{14} u^{19} + 10 t^{11} u^{22} + t^{24} u^8 + 18 t^{21} u^{11} + \\
& 46 t^{18} u^{14} + 52 t^{15} u^{17} + 27 t^{12} u^{20} + 5 t^9 u^{23} + 11 t^{22} u^9 + 39 t^{19} u^{12} + 58 t^{16} u^{15} + 49 t^{13} u^{18} + 18 t^{10} u^{21} + 3 t^7 u^{24} + 4 t^{23} u^7 + \\
& 27 t^{20} u^{10} + 52 t^{17} u^{13} + 59 t^{14} u^{16} + 37 t^{11} u^{19} + 9 t^8 u^{22} + 2 t^{24} u^5 + 17 t^{21} u^8 + 49 t^{18} u^{11} + 63 t^{15} u^{14} + 56 t^{12} u^{17} + 27 t^9 u^{20} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5t^6u^{23} + 6t^{22}u^6 + 36t^{19}u^9 + 57t^{16}u^{12} + 63t^{13}u^{15} + 46t^{10}u^{18} + 14t^7u^{21} + 3t^{23}u^4 + 24t^{20}u^7 + 55t^{17}u^{10} + 64t^{14}u^{13} + \\
& 61t^{11}u^{16} + 35t^{18}u^{19} + 8t^{15}u^{22} + 9t^{21}u^5 + 44t^{18}u^8 + 63t^{15}u^{11} + 66t^{12}u^{14} + 52t^9u^{17} + 18t^6u^{20} + t^3u^{23} + 4t^{22}u^3 + 28t^{19}u^6 + \\
& 58t^{16}u^9 + 62t^{13}u^{12} + 63t^{10}u^{15} + 38t^7u^{18} + 9t^4u^{21} + 9t^{20}u^4 + 45t^{17}u^7 + 65t^{14}u^{10} + 67t^{11}u^{13} + 55t^8u^{16} + 20t^5u^{19} + t^2u^{22} + \\
& 4t^{21}u^2 + 28t^{18}u^5 + 58t^{15}u^8 + 62t^{12}u^{11} + 63t^9u^{14} + 38t^6u^{17} + 9t^3u^{20} + 9t^{19}u^3 + 44t^{16}u^6 + 63t^{13}u^9 + 66t^{10}u^{12} + 52t^7u^{15} + \\
& 18t^4u^{18} + tu^{21} + 3t^{20}u + 24t^{17}u^4 + 55t^{14}u^7 + 64t^{11}u^{10} + 61t^8u^{13} + 35t^5u^{16} + 8t^2u^{19} + 6t^{18}u^2 + 36t^{15}u^5 + 57t^{12}u^8 + \\
& 63t^9u^{11} + 46t^6u^{14} + 14t^3u^{17} + 2t^{19} + 17t^{16}u^3 + 49t^{13}u^6 + 63t^{10}u^9 + 56t^7u^{12} + 27t^4u^{15} + 5tu^{18} + 4t^{17}u + 27t^{14}u^4 + 52t^{11}u^7 + \\
& 59t^8u^{10} + 37t^5u^{13} + 9t^2u^{16} + 11t^{15}u^2 + 39t^{12}u^5 + 58t^9u^8 + 49t^6u^{11} + 18t^3u^{14} + 3u^{17} + t^{16} + 18t^{13}u^3 + 46t^{10}u^6 + 52t^7u^9 + \\
& 27t^4u^{12} + 5tu^{15} + 5t^{14}u + 27t^{11}u^4 + 48t^8u^7 + 38t^5u^{10} + 10t^2u^{13} + 12t^{12}u^2 + 36t^9u^5 + 44t^6u^8 + 18t^3u^{11} + 2u^{14} + t^{13} + \\
& 18t^{10}u^3 + 38t^7u^6 + 27t^4u^9 + 5tu^{12} + 6t^{11}u + 24t^8u^4 + 31t^5u^7 + 11t^2u^{10} + 11t^9u^2 + 28t^6u^5 + 17t^3u^8 + u^{11} + 2t^{10} + 14t^7u^3 + \\
& 18t^4u^6 + 5tu^9 + 6t^8u + 18t^5u^4 + 11t^2u^7 + 6t^6u^2 + 9t^3u^5 + u^8 + 3t^7 + 9t^4u^3 + 5tu^6 + 2t^5u + 3t^2u^4 + 4t^3u^2 + 2u^5 + tu^3 + t^2u
\end{aligned}$$

$$M_J(t, u)_6 = M_J(u, t)_5$$

$$\begin{aligned}
& M_J(t, u)_7 = t^{24}u^{23} + 2t^{23}u^{22} + t^{21}u^{23} + 4t^{22}u^{21} + 2t^{19}u^{24} + 3t^{23}u^{19} + 3t^{20}u^{22} + t^{24}u^{17} + 9t^{21}u^{20} + 4t^{18}u^{23} + 7t^{22}u^{18} + \\
& 9t^{19}u^{21} + t^{16}u^{24} + 4t^{23}u^{16} + 18t^{20}u^{19} + 9t^{17}u^{22} + 2t^{24}u^{14} + 14t^{21}u^{17} + 18t^{18}u^{20} + 5t^{15}u^{23} + 11t^{22}u^{15} + 29t^{19}u^{18} + 17t^{16}u^{21} + \\
& 2t^{13}u^{24} + 5t^{23}u^{16} + 24t^{20}u^{16} + 29t^{17}u^{19} + 11t^{14}u^{22} + 2t^{24}u^{11} + 18t^{21}u^{14} + 41t^{18}u^{17} + 27t^{15}u^{20} + 5t^{12}u^{23} + 10t^{22}u^{12} + \\
& 36t^{19}u^{15} + 42t^{16}u^{18} + 18t^{13}u^{21} + 2t^{10}u^{24} + 6t^{23}u^{10} + 27t^{20}u^{13} + 52t^{17}u^{16} + 38t^{14}u^{19} + 11t^{11}u^{22} + t^{24}u^8 + 18t^{21}u^{11} + \\
& 47t^{18}u^{14} + 52t^{15}u^{17} + 27t^{12}u^{20} + 5t^9u^{23} + 11t^{22}u^9 + 37t^{19}u^{12} + 58t^{16}u^{15} + 46t^{13}u^{18} + 18t^{10}u^{21} + t^7u^{24} + 3t^{23}u^7 + 27t^{20}u^{10} + \\
& 55t^{17}u^{13} + 59t^{14}u^{16} + 38t^{11}u^{19} + 9t^8u^{22} + 2t^{24}u^5 + 17t^{21}u^8 + 46t^{18}u^{11} + 63t^{15}u^{14} + 54t^{12}u^{17} + 27t^9u^{20} + 4t^6u^{23} + 7t^{22}u^6 + \\
& 36t^{19}u^9 + 61t^{16}u^{12} + 63t^{13}u^{15} + 47t^{10}u^{18} + 14t^7u^{21} + 3t^{23}u^4 + 24t^{20}u^7 + 53t^{17}u^{10} + 65t^{14}u^{13} + 59t^{11}u^{16} + 35t^8u^{19} + \\
& 8t^5u^{22} + 9t^{21}u^5 + 42t^{18}u^8 + 63t^{15}u^{11} + 64t^{12}u^{14} + 52t^9u^{17} + 18t^6u^{20} + t^3u^{23} + 4t^{22}u^3 + 29t^{19}u^6 + 58t^{16}u^9 + 66t^{13}u^{12} + \\
& 63t^{10}u^{15} + 41t^7u^{18} + 9t^4u^{21} + tu^{24} + t^{23}u + 9t^{20}u^4 + 45t^{17}u^7 + 65t^{14}u^{10} + 64t^{11}u^{13} + 55t^8u^{16} + 20t^5u^{19} + t^2u^{22} + 4t^{21}u^2 + \\
& 29t^{18}u^5 + 58t^{15}u^8 + 66t^{12}u^{11} + 63t^9u^{14} + 41t^6u^{17} + 9t^3u^{20} + u^{23} + 9t^{19}u^3 + 42t^{16}u^6 + 63t^{13}u^9 + 64t^{10}u^{12} + 52t^7u^{15} + \\
& 18t^4u^{18} + tu^{21} + 3t^{20}u + 24t^{17}u^4 + 53t^{14}u^7 + 65t^{11}u^{10} + 59t^8u^{13} + 35t^5u^{16} + 8t^2u^{19} + 7t^{18}u^2 + 36t^{15}u^5 + 61t^{12}u^8 + \\
& 63t^9u^{11} + 47t^6u^{14} + 14t^3u^{17} + 2t^{19} + 17t^{16}u^3 + 46t^{13}u^6 + 63t^{10}u^9 + 54t^7u^{12} + 27t^4u^{15} + 4tu^{18} + 3t^{17}u + 27t^{14}u^4 + 55t^{11}u^7 + \\
& 59t^8u^{10} + 38t^5u^{13} + 9t^2u^{16} + 11t^{15}u^2 + 37t^{12}u^5 + 58t^9u^8 + 46t^6u^{11} + 18t^3u^{14} + u^{17} + t^{16} + 18t^{13}u^3 + 47t^{10}u^6 + 52t^7u^9 + \\
& 27t^4u^{12} + 5tu^{15} + 6t^{14}u + 27t^{11}u^4 + 52t^8u^7 + 38t^5u^{10} + 11t^2u^{13} + 10t^{12}u^2 + 36t^9u^5 + 42t^6u^8 + 18t^3u^{11} + 2u^{14} + 2t^{13} + \\
& 18t^{10}u^3 + 41t^7u^6 + 27t^4u^9 + 5tu^{12} + 5t^{11}u + 24t^8u^4 + 29t^5u^7 + 11t^2u^{10} + 11t^9u^2 + 29t^6u^5 + 17t^3u^8 + 2u^{11} + 2t^{10} + 14t^7u^3 + \\
& 18t^4u^6 + 5tu^9 + 4t^8u + 18t^5u^4 + 9t^2u^7 + 7t^6u^2 + 9t^3u^5 + u^8 + t^7 + 9t^4u^3 + 4tu^6 + 3t^5u + 3t^2u^4 + 4t^3u^2 + 2u^5 + tu^3 + 2t^2u + t^2u
\end{aligned}$$

$$M_J(t, u)_8 = M_J(u, t)_7$$

$$\begin{aligned}
& M_J(t, u)_9 = (t^{18}u^{15} + t^{15}u^{18} + 2t^{16}u^{16} + 3t^{17}u^{14} + 3t^{14}u^{17} + 3t^{15}u^{15} + 4t^{16}u^{13} + 4t^{13}u^{16} + t^{17}u^{11} + 3t^{14}u^{14} + t^{11}u^{17} + \\
& t^{18}u^9 + 6t^{15}u^{12} + 6t^{12}u^{15} + t^9u^{18} + 4t^{16}u^{10} + 5t^{13}u^{13} + 4t^{10}u^{16} + 2t^{17}u^8 + 7t^{14}u^{11} + 7t^{11}u^{14} + 2t^8u^{17} + 4t^{15}u^9 + 4t^{12}u^{12} + \\
& 4t^9u^{15} + 3t^{16}u^7 + 5t^{13}u^{10} + 5t^{10}u^{13} + 3t^{17}u^{16} + 2t^{17}u^5 + 5t^{14}u^8 + 4t^{11}u^{11} + 5t^8u^{14} + 2t^5u^{17} + t^{18}u^3 + 6t^{15}u^6 + 7t^{12}u^9 + \\
& 7t^9u^{12} + 6t^6u^{15} + t^3u^{18} + 4t^{16}u^4 + 6t^{13}u^7 + 5t^{10}u^{10} + 6t^7u^{13} + 4t^4u^{16} + t^{17}u^2 + 5t^{14}u^5 + 6t^{11}u^8 + 6t^8u^{11} + 5t^5u^{14} + t^2u^{17} + \\
& 3t^{15}u^3 + 4t^{12}u^6 + 3t^9u^9 + 4t^6u^{12} + 3t^3u^{15} + t^{16}u + 5t^{13}u^4 + 6t^{10}u^7 + 6t^7u^{10} + 5t^4u^{13} + tu^{16} + 4t^{14}u^2 + 6t^{11}u^5 + 5t^8u^8 + \\
& 6t^5u^{11} + 4t^2u^{14} + t^{15} + 6t^{12}u^3 + 7t^9u^6 + 7t^6u^9 + 6t^3u^{12} + u^{15} + 2t^{13}u + 5t^{10}u^4 + 4t^7u^7 + 5t^4u^{10} + 2tu^{13} + 3t^{11}u^2 + 5t^8u^5 + \\
& 5t^5u^8 + 3t^2u^{11} + 4t^9u^3 + 4t^6u^6 + 4t^3u^9 + 2t^{10}u + 7t^7u^4 + 7t^4u^7 + 2tu^{10} + 4t^8u^2 + 5t^5u^5 + 4t^2u^8 + t^9 + 6t^6u^3 + 6t^3u^6 + \\
& u^9 + t^7u + 3t^4u^4 + tu^7 + 4t^5u^2 + 4t^2u^5 + 3t^3u^3 + 3t^4u + 3tu^4 + 2t^2u^2 + t^3 + u^3)(u+1)^2(u^2-u+1)^2(t+1)^2(t^2-t+1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_J(t, u)_{10} = (t^{17}u^{16} + t^{18}u^{14} + 2t^{15}u^{17} + 4t^{16}u^{15} + t^{13}u^{18} + 2t^{17}u^{13} + 4t^{14}u^{16} + 4t^{15}u^{14} + t^{12}u^{17} + 3t^{16}u^{12} + 4t^{13}u^{15} + \\
& t^{10}u^{18} + 2t^{17}u^{10} + 5t^{14}u^{13} + 3t^{11}u^{16} + t^{18}u^8 + 6t^{15}u^{11} + 7t^{12}u^{14} + 3t^9u^{17} + 4t^{16}u^9 + 6t^{13}u^{12} + 4t^{10}u^{15} + t^{17}u^7 + 5t^{14}u^{10} + \\
& 6t^{11}u^{13} + 4t^8u^{16} + t^{18}u^5 + 4t^{15}u^8 + 4t^{12}u^{11} + 3t^9u^{14} + t^6u^{17} + 3t^{16}u^6 + 5t^{13}u^9 + 6t^{10}u^{12} + 6t^7u^{15} + t^4u^{18} + 3t^{17}u^4 + \\
& 7t^{14}u^7 + 6t^{11}u^{10} + 5t^8u^{13} + 4t^{15}u^{16} + 4t^{12}u^8 + 7t^9u^{11} + 7t^6u^{14} + 2t^3u^{17} + 4t^{16}u^3 + 6t^{13}u^6 + 5t^{10}u^9 + 4t^7u^{12} + \\
& 4t^4u^{15} + 3t^{14}u^4 + 4t^{11}u^7 + 5t^8u^{10} + 5t^5u^{13} + 2t^2u^{16} + 4t^{15}u^2 + 6t^{12}u^5 + 5t^9u^8 + 4t^6u^{11} + 4t^3u^{14} + 4t^{13}u^3 + 6t^{10}u^6 + 7t^7u^9 + \\
& 7t^4u^{12} + 2tu^{15} + 3t^{14}u + 7t^{11}u^4 + 6t^8u^7 + 5t^5u^{10} + 4t^2u^{13} + 3t^{12}u^2 + 5t^9u^5 + 6t^6u^8 + 6t^3u^{11} + u^{14} + t^{13} + 4t^{10}u^3 + 4t^7u^6 + \\
& 3t^4u^9 + tu^{12} + t^{11}u + 5t^8u^4 + 6t^5u^7 + 4t^2u^{10} + 4t^9u^2 + 6t^6u^5 + 4t^3u^8 + t^{10} + 6t^7u^3 + 7t^4u^6 + 3tu^9 + 2t^8u + 5t^5u^4 + 3t^2u^7 + \\
& 3t^6u^2 + 4t^3u^5 + u^8 + 4t^4u^3 + tu^6 + 2t^5u + 4t^2u^4 + 4t^3u^2 + u^5 + t^4 + 2tu^3 + t^2u)(u+1)^2(u^2-u+1)^2(t+1)^2(t^2-t+1)^2
\end{aligned}$$

$$M_J(t, u)_{11} = M_J(u, t)_{10}$$

$$\begin{aligned}
& M_J(t, u)_{12} = (t^{11}u^{11} + 4t^{10}u^{10} + 2t^{11}u^8 + 2t^8u^{11} + 3t^{12}u^6 + 9t^9u^9 + 3t^6u^{12} + 5t^{10}u^7 + 5t^7u^{10} + 5t^{11}u^5 + 16t^8u^8 + \\
& 5t^5u^{11} + 9t^9u^6 + 9t^6u^9 + 8t^{10}u^4 + 25t^7u^7 + 8t^4u^{10} + t^{11}u^2 + 10t^8u^5 + 10t^5u^8 + t^2u^{11} + 9t^9u^3 + 24t^6u^6 + 9t^3u^9 + t^{10}u + \\
& 10t^7u^4 + 10t^4u^7 + tu^{10} + 8t^8u^2 + 25t^5u^5 + 8t^2u^8 + 9t^6u^3 + 9t^3u^6 + 5t^7u + 16t^4u^4 + 5tu^7 + 5t^5u^2 + 5t^2u^5 + 3t^6 + 9t^3u^3 + \\
& 3u^6 + 2t^4u + 2tu^4 + 4t^2u^2 + tu)(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1) \\
& (u^8 - u^7 + u^5 - u^4 + u^3 - u + 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_J(t, u)_{13} = (t^{10}u^{12} + t^{11}u^{10} + 2t^{12}u^8 + 3t^9u^{11} + 3t^{10}u^9 + 5t^{11}u^7 + 8t^8u^{10} + 6t^9u^8 + 3t^6u^{11} + 10t^{10}u^6 + 15t^7u^9 + \\
& 2t^4u^{12} + 2t^{11}u^4 + 10t^8u^7 + 5t^5u^{10} + t^{12}u^2 + 15t^9u^5 + 20t^6u^8 + 3t^3u^{11} + 3t^{10}u^3 + 15t^7u^6 + 6t^4u^9 + t^{11}u + 16t^8u^4 + \\
& 25t^5u^7 + 4t^2u^{10} + 3t^9u^2 + 15t^6u^5 + 6t^3u^8 + t^{10} + 15t^7u^3 + 20t^4u^6 + 3tu^9 + 2t^8u + 10t^5u^4 + 5t^2u^7 + 10t^6u^2 + 15t^3u^5 + \\
& 2u^8 + 6t^4u^3 + 3tu^6 + 5t^5u + 8t^2u^4 + 3t^3u^2 + 2t^4 + 3tu^3 + t^2u + u^2)(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1) \\
& (u^8 - u^7 + u^5 - u^4 + u^3 - u + 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1)
\end{aligned}$$

$$M_J(t, u)_{14} = M_J(u, t)_{13}$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$P_J(t, 0)_0 = P_J(0, t)_0 = -\frac{t^{24}+t^{12}+1}{(t^4+t^3+t^2+t+1)(t^8-t^7+t^5-t^4+t^3-t+1)(t+1)^2(t^2-t+1)^2(t-1)^3(t^2+t+1)^3}.$$

C.7 Type K

$$D_K(t) = (t-1)^3(t^2+t+1)^3(t^2+1)(t^4-t^2+1)(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)(t^{12}-t^{11}+t^9-t^8+t^6-t^4+t^3-t+1)(t+1)^2(t^2-t+1)^2$$

$$\begin{aligned} M_K(t, u)_0 = & t^{36}u^{36} + t^{35}u^{35} + t^{34}u^{34} + 2t^{33}u^{33} + 3t^{32}u^{32} + t^{33}u^{30} + t^{30}u^{33} + 2t^{34}u^{28} + 4t^{31}u^{31} + 2t^{28}u^{34} + 2t^{32}u^{29} + \\ & 2t^{29}u^{32} + 3t^{33}u^{27} + 6t^{30}u^{30} + 3t^{27}u^{33} + t^{34}u^{25} + 4t^{31}u^{28} + 4t^{28}u^{31} + t^{25}u^{34} + t^{35}u^{23} + 5t^{32}u^{26} + 9t^{29}u^{29} + 5t^{26}u^{32} + t^{23}u^{35} + \\ & 3t^{33}u^{24} + 6t^{30}u^{27} + 6t^{27}u^{30} + 3t^{24}u^{33} + 2t^{34}u^{22} + 8t^{31}u^{25} + 11t^{28}u^{28} + 8t^{25}u^{31} + 2t^{22}u^{34} + 2t^{35}u^{20} + 5t^{32}u^{23} + 9t^{29}u^{26} + \\ & 9t^{26}u^{29} + 5t^{23}u^{32} + 2t^{20}u^{35} + t^{36}u^{18} + 3t^{33}u^{21} + 11t^{30}u^{24} + 14t^{27}u^{27} + 11t^{24}u^{30} + 3t^{21}u^{33} + t^{18}u^{36} + 3t^{34}u^{19} + 8t^{31}u^{22} + \\ & 12t^{28}u^{25} + 12t^{25}u^{28} + 8t^{22}u^{31} + 3t^{19}u^{34} + 2t^{35}u^{17} + 6t^{32}u^{20} + 14t^{29}u^{23} + 18t^{26}u^{26} + 14t^{23}u^{29} + 6t^{20}u^{32} + 2t^{17}u^{35} + \\ & 4t^{33}u^{18} + 11t^{30}u^{21} + 16t^{27}u^{24} + 16t^{24}u^{27} + 11t^{21}u^{30} + 4t^{18}u^{33} + 3t^{34}u^{16} + 9t^{31}u^{19} + 16t^{28}u^{22} + 21t^{25}u^{25} + 16t^{22}u^{28} + \\ & 9t^{19}u^{31} + 3t^{16}u^{34} + t^{35}u^{14} + 6t^{32}u^{17} + 13t^{29}u^{20} + 20t^{26}u^{23} + 20t^{23}u^{26} + 13t^{20}u^{29} + 6t^{17}u^{32} + t^{14}u^{35} + 5t^{33}u^{15} + 11t^{30}u^{18} + \\ & 20t^{27}u^{21} + 24t^{24}u^{24} + 20t^{21}u^{27} + 11t^{18}u^{30} + 5t^{15}u^{33} + 2t^{34}u^{13} + 9t^{31}u^{16} + 16t^{28}u^{19} + 24t^{25}u^{22} + 24t^{22}u^{25} + 16t^{19}u^{28} + \\ & 9t^{16}u^{31} + 2t^{13}u^{34} + t^{35}u^{11} + 7t^{32}u^{14} + 13t^{29}u^{17} + 22t^{26}u^{20} + 27t^{23}u^{23} + 22t^{20}u^{26} + 13t^{17}u^{29} + 7t^{14}u^{32} + t^{11}u^{35} + 3t^{33}u^{12} + \\ & 11t^{30}u^{15} + 19t^{27}u^{18} + 26t^{24}u^{21} + 26t^{21}u^{24} + 19t^{18}u^{27} + 11t^{15}u^{30} + 3t^{12}u^{33} + 3t^{34}u^{10} + 9t^{31}u^{13} + 16t^{28}u^{16} + 24t^{25}u^{19} + \\ & 31t^{22}u^{22} + 24t^{19}u^{25} + 16t^{16}u^{28} + 9t^{13}u^{31} + 3t^{10}u^{34} + 4t^{32}u^{11} + 14t^{29}u^{14} + 22t^{26}u^{17} + 28t^{23}u^{20} + 28t^{20}u^{23} + 22t^{17}u^{26} + \\ & 14t^{14}u^{29} + 4t^{11}u^{32} + 4t^{33}u^9 + 11t^{30}u^{12} + 18t^{27}u^{15} + 26t^{24}u^{18} + 33t^{21}u^{21} + 26t^{18}u^{24} + 18t^{15}u^{27} + 11t^{12}u^{30} + 4t^9u^{33} + \\ & 5t^{31}u^{10} + 15t^{28}u^{13} + 24t^{25}u^{16} + 29t^{22}u^{19} + 29t^{19}u^{22} + 24t^{16}u^{25} + 15t^{13}u^{28} + 5t^{10}u^{31} + t^{35}u^5 + 5t^{32}u^8 + 13t^{29}u^{11} + \\ & 20t^{26}u^{14} + 28t^{23}u^{17} + 32t^{20}u^{20} + 28t^{17}u^{23} + 20t^{14}u^{26} + 13t^{11}u^{29} + 5t^{8}u^{32} + t^{5}u^{35} + t^{33}u^6 + 6t^{30}u^9 + 16t^{27}u^{12} + 26t^{24}u^{15} + \\ & 31t^{21}u^{18} + 31t^{18}u^{21} + 26t^{15}u^{24} + 16t^{12}u^{27} + 6t^9u^{30} + t^6u^{33} + t^{34}u^4 + 5t^{31}u^7 + 13t^{28}u^{10} + 23t^{25}u^{13} + 29t^{22}u^{16} + 32t^{19}u^{19} + \\ & 29t^{16}u^{22} + 23t^{13}u^{25} + 13t^{10}u^{28} + 5t^7u^{31} + t^4u^{34} + t^{32}u^5 + 7t^{29}u^8 + 16t^{26}u^{11} + 26t^{23}u^{14} + 32t^{20}u^{17} + 32t^{17}u^{20} + 26t^{14}u^{23} + \\ & 16t^{11}u^{26} + 7t^8u^{29} + t^5u^{32} + t^{36} + t^{33}u^3 + 6t^{30}u^6 + 13t^{27}u^9 + 24t^{24}u^{12} + 29t^{21}u^{15} + 32t^{18}u^{18} + 29t^{15}u^{21} + 24t^{12}u^{24} + \\ & 13t^9u^{27} + 6t^6u^{30} + t^{33}u^3 + u^6 + t^{31}u^4 + 7t^{28}u^7 + 16t^{25}u^{10} + 26t^{22}u^{13} + 32t^{19}u^{16} + 32t^{16}u^{19} + 26t^{13}u^{22} + 16t^{10}u^{25} + \\ & 7t^7u^{28} + t^4u^{31} + t^{32}u^2 + 5t^{29}u^5 + 13t^{26}u^8 + 23t^{23}u^{11} + 29t^{20}u^{14} + 32t^{17}u^{17} + 29t^{14}u^{20} + 23t^{11}u^{23} + 13t^8u^{26} + 5t^5u^{29} + \\ & t^2u^{32} + t^{30}u^3 + 6t^{27}u^6 + 16t^{24}u^9 + 26t^{21}u^{12} + 31t^{18}u^{15} + 31t^{15}u^{18} + 26t^{12}u^{21} + 16t^9u^{24} + 6t^6u^{27} + t^3u^{30} + t^{31}u + 5t^{28}u^4 + \\ & 13t^{25}u^7 + 20t^{22}u^{10} + 28t^{19}u^{13} + 32t^{16}u^{16} + 28t^{13}u^{19} + 20t^{10}u^{22} + 13t^7u^{25} + 5t^4u^{28} + tu^{31} + 5t^{26}u^5 + 15t^{23}u^8 + 24t^{20}u^{11} + \\ & 29t^{17}u^{14} + 29t^{14}u^{17} + 24t^{11}u^{20} + 15t^8u^{23} + 5t^5u^{26} + 4t^{27}u^3 + 11t^{24}u^6 + 18t^{21}u^9 + 26t^{18}u^{12} + 33t^{15}u^{15} + 26t^{12}u^{18} + \\ & 18t^9u^{21} + 11t^6u^{24} + 4t^3u^{27} + 4t^{25}u^4 + 14t^{22}u^7 + 22t^{19}u^{10} + 28t^{16}u^{13} + 28t^{13}u^{16} + 22t^{10}u^{19} + 14t^7u^{22} + 4t^4u^{25} + 3t^{12}u^2 + \\ & 9t^{23}u^5 + 16t^{20}u^8 + 24t^{17}u^{11} + 31t^{14}u^{14} + 24t^{11}u^{17} + 16t^8u^{20} + 9t^5u^{23} + 3t^2u^{26} + 3t^{24}u^3 + 11t^{21}u^6 + 19t^{18}u^9 + 26t^{15}u^{12} + \\ & 26t^{12}u^{15} + 19t^9u^{18} + 11t^6u^{21} + 3t^3u^{24} + t^{25}u + 7t^{22}u^4 + 13t^{19}u^7 + 22t^{16}u^{10} + 27t^{13}u^{13} + 22t^{10}u^{16} + 13t^7u^{19} + 7t^4u^{22} + \\ & tu^{25} + 2t^{23}u^2 + 9t^{20}u^5 + 16t^{17}u^8 + 24t^{14}u^{11} + 24t^{11}u^{14} + 16t^8u^{17} + 9t^5u^{20} + 2t^2u^{23} + 5t^{21}u^3 + 11t^{18}u^6 + 20t^{15}u^9 + \\ & 24t^{12}u^{12} + 20t^9u^{15} + 11t^6u^{18} + 5t^3u^{21} + t^{22}u + 6t^{19}u^4 + 13t^{16}u^7 + 20t^{13}u^{10} + 20t^{10}u^{13} + 13t^7u^{16} + 6t^4u^{19} + tu^{22} + 3t^{20}u^2 + \\ & 9t^{17}u^5 + 16t^{14}u^8 + 21t^{11}u^{11} + 16t^8u^{14} + 9t^5u^{17} + 3t^2u^{20} + 4t^{18}u^3 + 11t^{15}u^6 + 16t^{12}u^9 + 16t^9u^{12} + 11t^6u^{15} + 4t^3u^{18} + \\ & 2t^{19}u + 6t^{16}u^4 + 14t^{13}u^7 + 18t^{10}u^{10} + 14t^7u^{13} + 6t^4u^{16} + 2tu^{19} + 3t^{17}u^2 + 8t^{14}u^5 + 12t^{11}u^8 + 12t^8u^{11} + 8t^5u^{14} + 3t^2u^{17} + \\ & t^{18} + 3t^{15}u^3 + 11t^{12}u^6 + 14t^9u^9 + 11t^6u^{12} + 3t^3u^{15} + u^{18} + 2t^{16}u + 5t^{13}u^4 + 9t^{10}u^7 + 9t^7u^{10} + 5t^4u^{13} + 2tu^{16} + 2t^{14}u^2 + \\ & 8t^{11}u^5 + 11t^8u^8 + 8t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + 3t^{12}u^3 + 6t^9u^6 + 6t^6u^9 + 3t^3u^{12} + t^{13}u + 5t^{10}u^4 + 9t^7u^7 + 5t^4u^{10} + tu^{13} + t^{11}u^2 + 4t^8u^5 + \\ & 4t^5u^8 + t^2u^{11} + 3t^9u^3 + 6t^6u^6 + 3t^3u^9 + 2t^7u^4 + 2t^4u^7 + 2t^8u^2 + 4t^5u^5 + 2t^2u^8 + t^6u^3 + t^3u^6 + 3t^4u^4 + 2t^3u^3 + t^2u^2 + tu + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_K(t, u)_1 = & t^{32}u^{36} + t^{34}u^{32} + t^{31}u^{35} + t^{36}u^{28} + 2t^{33}u^{31} + 2t^{30}u^{34} + t^{31}u^{32} + t^{28}u^{35} + 2t^{35}u^{27} + 3t^{32}u^{30} + 3t^{29}u^{33} + t^{33}u^{28} + \\ & 2t^{30}u^{31} + t^{27}u^{34} + 3t^{34}u^{26} + 5t^{31}u^{29} + 5t^{28}u^{32} + t^{25}u^{35} + t^{35}u^{24} + 3t^{32}u^{27} + 4t^{29}u^{30} + 3t^{26}u^{33} + t^{36}u^{22} + 4t^{33}u^{25} + 7t^{30}u^{28} + \\ & 7t^{27}u^{31} + 3t^{24}u^{34} + 2t^{34}u^{23} + 5t^{31}u^{26} + 6t^{28}u^{29} + 4t^{25}u^{32} + 2t^{35}u^{21} + 6t^{32}u^{24} + 9t^{29}u^{27} + 10t^{26}u^{30} + 5t^{23}u^{33} + 4t^{33}u^{22} + \\ & 8t^{30}u^{25} + 10t^{27}u^{28} + 7t^{24}u^{31} + 2t^{21}u^{34} + 3t^{34}u^{20} + 9t^{31}u^{23} + 12t^{28}u^{26} + 13t^{25}u^{29} + 7t^{22}u^{32} + t^{19}u^{35} + t^{35}u^{18} + 6t^{32}u^{21} + \\ & 11t^{29}u^{24} + 12t^{26}u^{27} + 10t^{23}u^{30} + 4t^{20}u^{33} + 5t^{33}u^{19} + 11t^{30}u^{22} + 16t^{27}u^{25} + 15t^{24}u^{28} + 9t^{21}u^{31} + 2t^{18}u^{34} + 3t^{34}u^{17} + \\ & 9t^{31}u^{20} + 14t^{28}u^{23} + 16t^{25}u^{26} + 15t^{22}u^{29} + 6t^{19}u^{32} + t^{16}u^{35} + 7t^{32}u^{18} + 14t^{29}u^{21} + 20t^{26}u^{24} + 18t^{23}u^{27} + 12t^{20}u^{30} + \\ & 4t^{17}u^{33} + t^{14}u^{36} + 5t^{33}u^{16} + 12t^{30}u^{19} + 17t^{27}u^{22} + 20t^{24}u^{25} + 17t^{21}u^{28} + 9t^{18}u^{31} + 2t^{15}u^{34} + 2t^{34}u^{14} + 9t^{31}u^{17} + 17t^{28}u^{20} + \\ & 23t^{25}u^{23} + 21t^{22}u^{26} + 14t^{19}u^{29} + 6t^{16}u^{32} + 2t^{13}u^{35} + t^{35}u^{12} + 6t^{32}u^{15} + 15t^{29}u^{18} + 20t^{26}u^{21} + 24t^{23}u^{24} + 20t^{20}u^{27} + \\ & 12t^{17}u^{30} + 3t^{14}u^{33} + 4t^{33}u^{13} + 12t^{30}u^{16} + 19t^{27}u^{19} + 25t^{24}u^{22} + 25t^{21}u^{25} + 17t^{18}u^{28} + 9t^{15}u^{31} + 3t^{12}u^{34} + t^{34}u^{11} + \\ & 8t^{31}u^{14} + 17t^{28}u^{17} + 24t^{25}u^{20} + 27t^{22}u^{23} + 23t^{19}u^{26} + 14t^{16}u^{29} + 5t^{13}u^{32} + t^{10}u^{35} + t^{35}u^9 + 6t^{32}u^{12} + 16t^{29}u^{15} + 21t^{26}u^{18} + \\ & 27t^{23}u^{21} + 27t^{20}u^{24} + 20t^{17}u^{27} + 11t^{14}u^{30} + 4t^{11}u^{33} + t^8u^{36} + 2t^{33}u^{10} + 10t^{30}u^{13} + 19t^{27}u^{16} + 27t^{24}u^{19} + 29t^{21}u^{22} + \\ & 25t^{18}u^{25} + 15t^{15}u^{28} + 7t^{12}u^{31} + t^9u^{34} + 2t^{34}u^8 + 8t^{31}u^{11} + 17t^{28}u^{14} + 24t^{25}u^{17} + 28t^{22}u^{20} + 29t^{19}u^{23} + 23t^{16}u^{26} + \\ & 13t^{13}u^{29} + 5t^{10}u^{32} + t^7u^{35} + 3t^{32}u^9 + 11t^{29}u^{12} + 22t^{26}u^{15} + 28t^{23}u^{18} + 31t^{20}u^{21} + 27t^{17}u^{24} + 18t^{14}u^{27} + 8t^{11}u^{30} + 2t^8u^{33} + \\ & t^{36}u^4 + 2t^{33}u^7 + 10t^{30}u^{10} + 19t^{27}u^{13} + 27t^{24}u^{16} + 29t^{21}u^{19} + 31t^{18}u^{22} + 25t^{15}u^{25} + 15t^{12}u^{28} + 7t^9u^{31} + 2t^6u^{34} + 4t^{31}u^8 + \\ & 12t^{28}u^{11} + 24t^{25}u^{14} + 28t^{22}u^{17} + 31t^{19}u^{20} + 29t^{16}u^{23} + 19t^{13}u^{26} + 8t^{10}u^{29} + 2t^7u^{32} + t^{35}u^3 + 3t^{32}u^6 + 10t^{29}u^9 + 20t^{26}u^{12} + \\ & 29t^{23}u^{15} + 30t^{20}u^{18} + 31t^{17}u^{21} + 25t^{14}u^{24} + 16t^{11}u^{27} + 7t^8u^{30} + 2t^5u^{33} + 4t^{30}u^7 + 13t^{27}u^{10} + 24t^{24}u^{13} + 29t^{21}u^{16} + \\ & 30t^{18}u^{19} + 31t^{15}u^{22} + 20t^{12}u^{25} + 9t^9u^{28} + 2t^6u^{31} + t^{34}u^2 + 4t^{31}u^5 + 10t^{28}u^8 + 21t^{25}u^{11} + 30t^{22}u^{14} + 31t^{19}u^{17} + 31t^{16}u^{20} + \\ & 26t^{13}u^{23} + 17t^{10}u^{26} + 8t^7u^{29} + 3t^4u^{32} + 4t^{29}u^6 + 13t^{26}u^9 + 24t^{23}u^{12} + 29t^{20}u^{15} + 30t^{17}u^{18} + 31t^{14}u^{21} + 20t^{11}u^{24} + 9t^8u^{27} + \\ & 2t^5u^{30} + t^{33}u + 3t^{30}u^4 + 10t^{27}u^7 + 20t^{24}u^{10} + 29t^{21}u^{13} + 30t^{18}u^{16} + 31t^{15}u^{19} + 25t^{12}u^{22} + 16t^9u^{25} + 7t^6u^{28} + 2t^3u^{31} + \\ & 4t^{28}u^5 + 12t^{25}u^8 + 24t^{22}u^{11} + 28t^{19}u^{14} + 31t^{16}u^{17} + 29t^{13}u^{20} + 19t^{10}u^{23} + 8t^7u^{26} + 2t^4u^{29} + t^{32} + 2t^{29}u^3 + 10t^{26}u^6 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 19t^{23}u^9 + 27t^{20}u^{12} + 29t^{17}u^{15} + 31t^{14}u^{18} + 25t^{11}u^{21} + 15t^8u^{24} + 7t^5u^{27} + 2t^2u^{30} + 3t^{27}u^4 + 11t^{24}u^7 + 22t^{21}u^{10} + 28t^{18}u^{13} + \\
& 31t^{15}u^{16} + 27t^{12}u^{19} + 18t^9u^{22} + 8t^6u^{25} + 2t^3u^{28} + 2t^{28}u^2 + 8t^{25}u^5 + 17t^{22}u^8 + 24t^{19}u^{11} + 28t^{16}u^{14} + 29t^{13}u^{17} + 23t^{10}u^{20} + \\
& 13t^7u^{23} + 5t^4u^{26} + tu^{29} + 2t^{26}u^3 + 10t^{23}u^6 + 19t^{20}u^9 + 27t^{17}u^{12} + 29t^{14}u^{15} + 25t^{11}u^{18} + 15t^8u^{21} + 7t^5u^{24} + t^2u^{27} + \\
& t^{27}u + 6t^{24}u^4 + 16t^{21}u^7 + 21t^{18}u^{10} + 27t^{15}u^{13} + 27t^{12}u^{16} + 20t^9u^{19} + 11t^6u^{22} + 4t^3u^{25} + u^{28} + t^{25}u^2 + 8t^{22}u^5 + 17t^{19}u^8 + \\
& 24t^{16}u^{11} + 27t^{13}u^{14} + 23t^{10}u^{17} + 14t^7u^{20} + 5t^4u^{23} + tu^{26} + 4t^{23}u^3 + 12t^{20}u^6 + 19t^{17}u^9 + 25t^{14}u^{12} + 25t^{11}u^{15} + 17t^8u^{18} + \\
& 9t^5u^{21} + 3t^2u^{24} + t^{24}u + 6t^{21}u^4 + 15t^{18}u^7 + 20t^{15}u^{10} + 24t^{12}u^{13} + 20t^9u^{16} + 12t^6u^{19} + 3t^3u^{22} + 2t^{22}u^2 + 9t^{19}u^5 + 17t^{16}u^8 + \\
& 23t^{13}u^{11} + 21t^{10}u^{14} + 14t^7u^{17} + 6t^4u^{20} + 2tu^{23} + 5t^{20}u^3 + 12t^{17}u^6 + 17t^{14}u^9 + 20t^{11}u^{12} + 17t^8u^{15} + 9t^5u^{18} + 2t^2u^{21} + \\
& 7t^{18}u^4 + 14t^{15}u^7 + 20t^{12}u^{10} + 18t^9u^{13} + 12t^6u^{16} + 4t^3u^{19} + u^{22} + 3t^{19}u^2 + 9t^{16}u^5 + 14t^{13}u^8 + 16t^{10}u^{11} + 15t^7u^{14} + 6t^4u^{17} + \\
& tu^{20} + 5t^{17}u^3 + 11t^{14}u^6 + 16t^{11}u^9 + 15t^8u^{12} + 9t^5u^{15} + 2t^2u^{18} + t^{18}u + 6t^{15}u^4 + 11t^{12}u^7 + 12t^9u^{10} + 10t^6u^{13} + 4t^3u^{16} + \\
& 3t^{16}u^2 + 9t^{13}u^5 + 12t^{10}u^8 + 13t^7u^{11} + 7t^4u^{14} + tu^{17} + 4t^{14}u^3 + 8t^{11}u^6 + 10t^8u^9 + 7t^5u^{12} + 2t^2u^{15} + 2t^{15}u + 6t^{12}u^4 + 9t^9u^7 + \\
& 10t^6u^{10} + 5t^3u^{13} + 2t^{13}u^2 + 5t^{10}u^5 + 6t^7u^8 + 4t^4u^{11} + t^{14} + 4t^{11}u^3 + 7t^8u^6 + 7t^5u^9 + 3t^2u^{12} + t^{12}u + 3t^9u^4 + 4t^6u^7 + 3t^3u^{10} + \\
& 3t^{10}u^2 + 5t^7u^5 + 5t^4u^8 + tu^{11} + t^8u^3 + 2t^5u^6 + t^2u^9 + 2t^9u + 3t^6u^4 + 3t^3u^7 + t^4u^5 + tu^8 + t^8 + 2t^5u^3 + 2t^2u^6 + t^4u^2 + tu^5 + u^4
\end{aligned}$$

$$M_K(t, u)_2 = M_K(u, t)_1$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_3 = & t^{33}u^{36} + t^{35}u^{32} + 2t^{32}u^{35} + t^{33}u^{33} + 3t^{34}u^{31} + 3t^{31}u^{34} + t^{35}u^{29} + 3t^{32}u^{32} + 2t^{29}u^{35} + 2t^{36}u^{27} + 5t^{33}u^{30} + \\
& 6t^{30}u^{33} + t^{27}u^{36} + 3t^{34}u^{28} + 7t^{31}u^{31} + 4t^{28}u^{34} + 4t^{35}u^{26} + 9t^{32}u^{29} + 10t^{29}u^{32} + 2t^{26}u^{35} + t^{36}u^{24} + 7t^{33}u^{27} + 12t^{30}u^{30} + \\
& 8t^{27}u^{33} + t^{24}u^{36} + 7t^{34}u^{25} + 16t^{31}u^{28} + 16t^{28}u^{31} + 7t^{25}u^{34} + 4t^{35}u^{23} + 12t^{32}u^{26} + 18t^{29}u^{29} + 13t^{26}u^{32} + 3t^{23}u^{35} + 2t^{36}u^{21} + \\
& 11t^{33}u^{24} + 22t^{30}u^{27} + 23t^{27}u^{30} + 12t^{24}u^{33} + 8t^{34}u^{22} + 20t^{31}u^{25} + 26t^{28}u^{28} + 20t^{25}u^{31} + 7t^{22}u^{34} + 4t^{35}u^{20} + 18t^{32}u^{23} + \\
& 30t^{29}u^{26} + 33t^{26}u^{29} + 19t^{23}u^{32} + 3t^{20}u^{35} + t^{36}u^{18} + 13t^{33}u^{21} + 29t^{30}u^{24} + 35t^{27}u^{27} + 29t^{24}u^{30} + 13t^{21}u^{33} + t^{18}u^{36} + \\
& 8t^{34}u^{19} + 26t^{31}u^{22} + 40t^{28}u^{25} + 41t^{25}u^{28} + 26t^{22}u^{31} + 7t^{19}u^{34} + 4t^{35}u^{17} + 20t^{32}u^{20} + 37t^{29}u^{23} + 45t^{26}u^{26} + 39t^{23}u^{29} + \\
& 19t^{20}u^{32} + 3t^{17}u^{35} + 14t^{33}u^{18} + 34t^{30}u^{21} + 51t^{27}u^{24} + 50t^{24}u^{27} + 36t^{21}u^{30} + 12t^{18}u^{33} + 2t^{15}u^{36} + 8t^{34}u^{16} + 27t^{31}u^{19} + \\
& 46t^{28}u^{22} + 57t^{25}u^{25} + 49t^{22}u^{28} + 27t^{19}u^{31} + 7t^{16}u^{34} + 2t^{35}u^{14} + 20t^{32}u^{17} + 43t^{29}u^{20} + 61t^{26}u^{23} + 60t^{23}u^{26} + 43t^{20}u^{29} + \\
& 19t^{17}u^{32} + 5t^{14}u^{35} + t^{36}u^{12} + 13t^{33}u^{15} + 35t^{30}u^{18} + 55t^{27}u^{21} + 68t^{24}u^{24} + 57t^{21}u^{27} + 35t^{18}u^{30} + 11t^{15}u^{33} + t^{12}u^{36} + \\
& 7t^{34}u^{13} + 27t^{31}u^{16} + 51t^{28}u^{19} + 70t^{25}u^{22} + 71t^{22}u^{25} + 50t^{19}u^{28} + 27t^{16}u^{31} + 8t^{13}u^{34} + 2t^{35}u^{11} + 18t^{32}u^{14} + 43t^{29}u^{17} + \\
& 64t^{26}u^{20} + 77t^{23}u^{23} + 67t^{20}u^{26} + 43t^{17}u^{29} + 17t^{14}u^{32} + 3t^{11}u^{35} + t^{36}u^9 + 11t^{33}u^{12} + 36t^{30}u^{15} + 57t^{27}u^{18} + 78t^{24}u^{21} + \\
& 80t^{21}u^{24} + 59t^{18}u^{27} + 34t^{15}u^{30} + 12t^{12}u^{33} + 2t^9u^{36} + 4t^{34}u^{10} + 24t^{31}u^{13} + 51t^{28}u^{16} + 73t^{25}u^{19} + 84t^{22}u^{22} + 74t^{19}u^{25} + \\
& 50t^{16}u^{28} + 24t^{13}u^{31} + 5t^{10}u^{34} + 3t^{35}u^8 + 16t^{32}u^{11} + 43t^{29}u^{14} + 64t^{26}u^{17} + 84t^{23}u^{20} + 86t^{20}u^{23} + 67t^{17}u^{26} + 39t^{14}u^{29} + \\
& 16t^{11}u^{32} + 3t^8u^{35} + 7t^{33}u^9 + 29t^{30}u^{12} + 57t^{27}u^{15} + 80t^{24}u^{18} + 89t^{21}u^{21} + 80t^{18}u^{24} + 57t^{15}u^{27} + 29t^{12}u^{30} + 7t^9u^{33} + \\
& 4t^{34}u^7 + 20t^{31}u^{10} + 47t^{28}u^{13} + 73t^{25}u^{16} + 87t^{22}u^{19} + 91t^{19}u^{22} + 74t^{16}u^{25} + 46t^{13}u^{28} + 20t^{10}u^{31} + 5t^7u^{34} + t^{35}u^5 + 9t^{32}u^8 + \\
& 33t^{29}u^{11} + 64t^{26}u^{14} + 84t^{23}u^{17} + 92t^{20}u^{20} + 86t^{17}u^{23} + 63t^{14}u^{26} + 32t^{11}u^{29} + 10t^{8}u^{32} + t^{35}u^{35} + 5t^{32}u^3 + 5t^{33}u^6 + 23t^{30}u^9 + \\
& 51t^{27}u^{12} + 80t^{24}u^{15} + 89t^{21}u^{18} + 93t^{18}u^{21} + 78t^{15}u^{24} + 50t^{12}u^{27} + 22t^9u^{30} + 6t^6u^{33} + t^{34}u^4 + 11t^{31}u^7 + 35t^{28}u^{10} + \\
& 67t^{25}u^{13} + 87t^{22}u^{16} + 92t^{19}u^{19} + 91t^{16}u^{22} + 66t^{13}u^{25} + 33t^{10}u^{28} + 11t^7u^{31} + t^4u^{34} + t^{35}u^2 + 7t^{32}u^5 + 23t^{29}u^8 + 54t^{26}u^{11} + \\
& 83t^{23}u^{14} + 92t^{20}u^{17} + 92t^{17}u^{20} + 81t^{14}u^{23} + 53t^{11}u^{26} + 24t^8u^{29} + 7t^5u^{32} + t^{33}u^3 + 12t^{30}u^6 + 36t^{27}u^9 + 68t^{24}u^{12} + 89t^{21}u^{15} + \\
& 92t^{18}u^{18} + 93t^{15}u^{21} + 68t^{12}u^{24} + 35t^9u^{27} + 12t^6u^{30} + 2t^3u^{33} + t^{34}u + 7t^{31}u^4 + 23t^{28}u^7 + 54t^{25}u^{10} + 83t^{22}u^{13} + 92t^{19}u^{16} + \\
& 92t^{16}u^{19} + 81t^{13}u^{22} + 53t^{10}u^{25} + 24t^7u^{28} + 7t^4u^{31} + t^{32}u^2 + 11t^{29}u^5 + 35t^{26}u^8 + 67t^{23}u^{11} + 87t^{20}u^{14} + 92t^{17}u^{17} + 91t^{14}u^{20} + \\
& 66t^{11}u^{23} + 33t^8u^{26} + 11t^5u^{29} + t^2u^{32} + t^{33} + 5t^{30}u^3 + 23t^{27}u^6 + 51t^{24}u^9 + 80t^{21}u^{12} + 89t^{18}u^{15} + 93t^{15}u^{18} + 78t^{12}u^{21} + \\
& 50t^9u^{24} + 22t^6u^{27} + 6t^3u^{30} + t^{31}u + 9t^{28}u^4 + 33t^{25}u^7 + 64t^{22}u^{10} + 84t^{19}u^{13} + 92t^{16}u^{16} + 86t^{13}u^{19} + 63t^{10}u^{22} + 32t^7u^{25} + \\
& 10t^4u^{28} + tu^{31} + 4t^{29}u^2 + 20t^{26}u^5 + 47t^{23}u^8 + 73t^{20}u^{11} + 87t^{17}u^{14} + 91t^{14}u^{17} + 74t^{11}u^{20} + 46t^8u^{23} + 20t^5u^{26} + 5t^2u^{29} + \\
& 7t^{27}u^3 + 29t^{24}u^6 + 57t^{21}u^9 + 80t^{18}u^{12} + 89t^{15}u^{15} + 80t^{12}u^{18} + 57t^9u^{21} + 29t^6u^{24} + 7t^3u^{27} + 3t^{28}u + 16t^{25}u^4 + 43t^{22}u^7 + \\
& 64t^{19}u^{10} + 84t^{16}u^{13} + 86t^{13}u^{16} + 67t^{10}u^{19} + 39t^7u^{22} + 16t^4u^{25} + 3tu^{28} + 4t^{26}u^2 + 24t^{23}u^5 + 51t^{20}u^8 + 73t^{17}u^{11} + 84t^{14}u^{14} + \\
& 74t^{11}u^{17} + 50t^8u^{20} + 24t^5u^{23} + 5t^2u^{26} + t^{27} + 11t^{24}u^3 + 36t^{21}u^6 + 57t^{18}u^9 + 78t^{15}u^{12} + 80t^{12}u^{15} + 59t^9u^{18} + 34t^6u^{21} + \\
& 12t^3u^{24} + 2u^{27} + 2t^{25}u + 18t^{22}u^4 + 43t^{19}u^7 + 64t^{16}u^{10} + 77t^{13}u^{13} + 67t^{10}u^{16} + 43t^7u^{19} + 17t^4u^{22} + 3tu^{25} + 7t^{23}u^2 + \\
& 27t^{20}u^5 + 51t^{17}u^8 + 70t^{14}u^{11} + 71t^{11}u^{14} + 50t^8u^{17} + 27t^5u^{20} + 8t^2u^{23} + t^{24} + 13t^{21}u^3 + 35t^{18}u^6 + 55t^{15}u^9 + 68t^{12}u^{12} + \\
& 57t^9u^{15} + 35t^6u^{18} + 11t^3u^{21} + u^{24} + 2t^{22}u + 20t^{19}u^4 + 43t^{16}u^7 + 61t^{13}u^{10} + 60t^{10}u^{13} + 43t^7u^{16} + 19t^4u^{19} + 5t^{22}u + 8t^{20}u^2 + \\
& 27t^{17}u^5 + 46t^{14}u^8 + 57t^{11}u^{11} + 49t^8u^{14} + 27t^5u^{17} + 7t^2u^{20} + 14t^{18}u^3 + 34t^{15}u^6 + 51t^{12}u^9 + 50t^9u^{12} + 36t^6u^{15} + 12t^3u^{18} + \\
& 2u^{21} + 4t^{19}u + 20t^{16}u^4 + 37t^{13}u^7 + 45t^{10}u^{10} + 39t^7u^{13} + 19t^4u^{16} + 3tu^{19} + 8t^{17}u^2 + 26t^{14}u^5 + 40t^{11}u^8 + 41t^8u^{11} + 26t^5u^{14} + \\
& 7t^2u^{17} + t^{18} + 13t^{15}u^3 + 29t^{12}u^6 + 35t^9u^9 + 29t^6u^{12} + 13t^3u^{15} + u^{18} + 4t^{16}u + 18t^{13}u^4 + 30t^{10}u^7 + 33t^7u^{10} + 19t^4u^{13} + \\
& 3tu^{16} + 8t^{14}u^2 + 20t^{11}u^5 + 26t^8u^8 + 20t^5u^{11} + 7t^2u^{14} + 2t^{15} + 11t^{12}u^3 + 22t^9u^6 + 23t^6u^9 + 12t^3u^{12} + 4t^{13}u + 12t^{10}u^4 + \\
& 18t^7u^7 + 13t^4u^{10} + 3tu^{13} + 7t^{11}u^2 + 16t^8u^5 + 16t^5u^8 + 7t^2u^{11} + t^{12} + 7t^9u^3 + 12t^6u^6 + 8t^3u^9 + u^{12} + 4t^{10}u + 9t^7u^4 + \\
& 10t^4u^7 + 2tu^{10} + 3t^8u^2 + 7t^5u^5 + 4t^2u^8 + 2t^9 + 5t^6u^3 + 6t^3u^6 + u^9 + t^7u + 3t^4u^4 + 2tu^7 + 3t^5u^2 + 3t^2u^5 + t^3u^4 + t^4u + 2tu^4 + u^3
\end{aligned}$$

$$M_K(t, u)_4 = M_K(u, t)_3$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_5 = & t^{35}u^{33} + t^{36}u^{31} + t^{33}u^{34} + t^{34}u^{32} + t^{31}u^{35} + 2t^{35}u^{30} + 3t^{32}u^{33} + t^{29}u^{36} + t^{36}u^{28} + 3t^{33}u^{31} + 2t^{30}u^{34} + 5t^{34}u^{29} + \\
& 7t^{31}u^{32} + 3t^{28}u^{35} + 2t^{35}u^{27} + 6t^{32}u^{30} + 4t^{29}u^{33} + t^{26}u^{36} + t^{36}u^{25} + 8t^{33}u^{28} + 11t^{30}u^{31} + 6t^{27}u^{34} + 5t^{34}u^{26} + 11t^{31}u^{29} + \\
& 9t^{28}u^{32} + 3t^{25}u^{35} + 4t^{35}u^{24} + 14t^{32}u^{27} + 17t^{29}u^{30} + 10t^{26}u^{33} + 2t^{23}u^{36} + 10t^{33}u^{25} + 17t^{30}u^{28} + 16t^{27}u^{31} + 6t^{24}u^{34} + \\
& 8t^{34}u^{23} + 20t^{31}u^{26} + 23t^{28}u^{29} + 16t^{25}u^{32} + 5t^{22}u^{35} + 2t^{35}u^{21} + 16t^{32}u^{24} + 26t^{29}u^{27} + 23t^{26}u^{30} + 11t^{23}u^{33} + t^{20}u^{36} + t^{36}u^{19} + \\
& 14t^{33}u^{22} + 29t^{30}u^{25} + 32t^{27}u^{28} + 24t^{24}u^{31} + 9t^{21}u^{34} + 7t^{34}u^{20} + 24t^{31}u^{23} + 35t^{28}u^{26} + 32t^{25}u^{29} + 18t^{22}u^{32} + 3t^{19}u^{35} + \\
& 3t^{35}u^{18} + 20t^{32}u^{21} + 37t^{29}u^{24} + 41t^{26}u^{27} + 32t^{23}u^{30} + 14t^{20}u^{33} + t^{17}u^{36} + t^{36}u^{16} + 12t^{33}u^{19} + 34t^{30}u^{22} + 44t^{27}u^{25} + \\
& 42t^{24}u^{28} + 26t^{21}u^{31} + 8t^{18}u^{34} + 7t^{34}u^{17} + 27t^{31}u^{20} + 47t^{28}u^{23} + 53t^{25}u^{26} + 40t^{22}u^{29} + 20t^{19}u^{32} + 3t^{16}u^{35} + 4t^{35}u^{15} + \\
& 19t^{32}u^{18} + 44t^{29}u^{21} + 55t^{26}u^{24} + 52t^{23}u^{27} + 35t^{20}u^{30} + 14t^{17}u^{33} + 2t^{36}u^{13} + 12t^{33}u^{16} + 35t^{30}u^{19} + 55t^{27}u^{22} + 64t^{24}u^{25} + \\
& 49t^{21}u^{28} + 27t^{18}u^{31} + 7t^{15}u^{34} + 7t^{34}u^{14} + 27t^{31}u^{17} + 51t^{28}u^{20} + 66t^{25}u^{23} + 61t^{22}u^{26} + 44t^{19}u^{29} + 20t^{16}u^{32} + 3t^{13}u^{35} + \\
& 4t^{35}u^{12} + 18t^{32}u^{15} + 43t^{29}u^{18} + 65t^{26}u^{21} + 73t^{23}u^{24} + 57t^{20}u^{27} + 35t^{17}u^{30} + 12t^{14}u^{33} + t^{11}u^{36} + t^{36}u^{10} + 11t^{33}u^{13} + \\
& 35t^{30}u^{16} + 59t^{27}u^{19} + 77t^{24}u^{22} + 71t^{21}u^{25} + 51t^{18}u^{28} + 26t^{15}u^{31} + 6t^{12}u^{34} + 7t^{34}u^{11} + 26t^{31}u^{14} + 51t^{28}u^{17} + 74t^{25}u^{20} + \\
& 80t^{22}u^{23} + 65t^{19}u^{26} + 44t^{16}u^{29} + 18t^{13}u^{32} + 2t^{10}u^{35} + 3t^{35}u^9 + 16t^{32}u^{12} + 40t^{29}u^{15} + 67t^{26}u^{18} + 84t^{23}u^{21} + 80t^{20}u^{24} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 57t^{17}u^{27} + 34t^{14}u^{30} + 9t^{11}u^{33} + t^8u^{36} + t^{36}u^7 + 9t^{33}u^{10} + 32t^{30}u^{13} + 59t^{27}u^{16} + 80t^{24}u^{19} + 85t^{21}u^{22} + 73t^{18}u^{25} + 51t^{15}u^{28} + \\
& 24t^{12}u^{31} + 5t^9u^{34} + 4t^{34}u^8 + 20t^{31}u^{11} + 46t^{28}u^{14} + 74t^{25}u^{17} + 90t^{22}u^{20} + 85t^{19}u^{23} + 65t^{16}u^{26} + 38t^{13}u^{29} + 12t^{10}u^{32} + \\
& 2t^7u^{35} + 2t^{35}u^6 + 13t^{32}u^9 + 37t^{29}u^{12} + 67t^{26}u^{15} + 86t^{23}u^{18} + 89t^{20}u^{21} + 80t^{17}u^{24} + 57t^{14}u^{27} + 29t^{11}u^{30} + 7t^8u^{33} + t^5u^{36} + \\
& 6t^{33}u^7 + 23t^{30}u^{10} + 52t^{27}u^{13} + 80t^{24}u^{16} + 93t^{21}u^{19} + 87t^{18}u^{22} + 73t^{15}u^{25} + 42t^{12}u^{28} + 16t^9u^{31} + 2t^6u^{34} + 3t^{34}u^5 + 16t^{31}u^8 + \\
& 40t^{28}u^{11} + 71t^{25}u^{14} + 90t^{22}u^{17} + 91t^{19}u^{20} + 85t^{16}u^{23} + 62t^{13}u^{26} + 32t^{10}u^{29} + 9t^7u^{32} + 2t^4u^{35} + 6t^{32}u^6 + 24t^{29}u^9 + 55t^{26}u^{12} + \\
& 84t^{23}u^{15} + 92t^{20}u^{18} + 89t^{17}u^{21} + 77t^{14}u^{24} + 45t^{11}u^{27} + 17t^8u^{30} + 3t^5u^{33} + 4t^{33}u^4 + 17t^{30}u^7 + 42t^{27}u^{10} + 73t^{24}u^{13} + \\
& 93t^{21}u^{16} + 92t^{18}u^{19} + 89t^{15}u^{22} + 64t^{12}u^{25} + 33t^9u^{28} + 11t^6u^{31} + 2t^3u^{34} + 7t^{31}u^5 + 26t^{28}u^8 + 57t^{25}u^{11} + 87t^{22}u^{14} + \\
& 91t^{19}u^{17} + 91t^{16}u^{20} + 78t^{13}u^{23} + 47t^{10}u^{26} + 17t^7u^{29} + 3t^4u^{32} + 4t^{32}u^3 + 17t^{29}u^6 + 42t^{26}u^9 + 73t^{23}u^{12} + 93t^{20}u^{15} + \\
& 92t^{17}u^{18} + 89t^{14}u^{21} + 64t^{11}u^{24} + 33t^8u^{27} + 11t^5u^{30} + 2t^2u^{33} + 6t^{30}u^4 + 24t^{27}u^7 + 55t^{24}u^{10} + 84t^{21}u^{13} + 92t^{18}u^{16} + \\
& 89t^{15}u^{19} + 77t^{12}u^{22} + 45t^9u^{25} + 17t^6u^{28} + 3t^3u^{31} + 3t^{31}u^2 + 16t^{28}u^5 + 40t^{25}u^8 + 71t^{22}u^{11} + 90t^{19}u^{14} + 91t^{16}u^{17} + 85t^{13}u^{20} + \\
& 62t^{10}u^{23} + 32t^7u^{26} + 9t^4u^{29} + 2t^{32}u^6 + 6t^{29}u^9 + 23t^{26}u^{12} + 6t^{23}u^{15} + 52t^{20}u^{18} + 80t^{17}u^{21} + 93t^{14}u^{24} + 87t^{11}u^{27} + 73t^{14}u^{21} + 42t^8u^{24} + \\
& 16t^5u^{27} + 2t^2u^{30} + 2t^{30}u^3 + 13t^{27}u^4 + 37t^{24}u^7 + 67t^{21}u^{10} + 86t^{18}u^{13} + 89t^{15}u^{16} + 80t^{12}u^{19} + 57t^9u^{22} + 29t^6u^{25} + 7t^3u^{28} + \\
& u^{31} + 4t^{28}u^2 + 20t^{25}u^5 + 46t^{22}u^8 + 74t^{19}u^{11} + 90t^{16}u^{14} + 85t^{13}u^{17} + 65t^{10}u^{20} + 38t^7u^{23} + 12t^4u^{26} + 2tu^{29} + t^{29} + 9t^{26}u^3 + \\
& 32t^{23}u^6 + 59t^{20}u^9 + 80t^{17}u^{12} + 85t^{14}u^{15} + 73t^{11}u^{18} + 51t^8u^{21} + 24t^5u^{24} + 5t^2u^{27} + 3t^{27}u + 16t^{24}u^4 + 40t^{21}u^7 + 67t^{18}u^{10} + \\
& 84t^{15}u^{13} + 80t^{12}u^{16} + 57t^9u^{19} + 34t^6u^{22} + 9t^3u^{25} + u^{28} + 7t^{25}u^2 + 26t^{22}u^5 + 51t^{19}u^8 + 74t^{16}u^{11} + 80t^{13}u^{14} + 65t^{10}u^{17} + \\
& 44t^7u^{20} + 18t^4u^{23} + 2tu^{26} + t^{26} + 11t^{23}u^3 + 35t^{20}u^6 + 59t^{17}u^9 + 77t^{14}u^{12} + 71t^{11}u^{15} + 51t^8u^{18} + 26t^5u^{21} + 6t^2u^{24} + 4t^{24}u + \\
& 18t^{21}u^4 + 43t^{18}u^7 + 65t^{15}u^{10} + 73t^{12}u^{13} + 57t^9u^{16} + 35t^6u^{19} + 12t^3u^{22} + u^{25} + 7t^{22}u^2 + 27t^{19}u^5 + 51t^{16}u^8 + 66t^{13}u^{11} + \\
& 61t^{10}u^{14} + 44t^7u^{17} + 20t^4u^{20} + 3tu^{23} + 2t^{23} + 12t^{20}u^3 + 35t^{17}u^6 + 55t^{14}u^9 + 64t^{11}u^{12} + 49t^8u^{15} + 27t^5u^{18} + 7t^2u^{21} + 4t^{21}u + \\
& 19t^{18}u^4 + 44t^{15}u^7 + 55t^{12}u^{10} + 52t^9u^{13} + 35t^6u^{16} + 14t^3u^{19} + 7t^{19}u^2 + 27t^{16}u^5 + 47t^{13}u^8 + 53t^{10}u^{11} + 40t^7u^{14} + 20t^4u^{17} + \\
& 3tu^{20} + t^{20} + 12t^{17}u^3 + 34t^{14}u^6 + 44t^{11}u^9 + 42t^8u^{12} + 26t^5u^{15} + 8t^2u^{18} + 3t^{18}u + 20t^{15}u^4 + 37t^{12}u^7 + 41t^9u^{10} + 32t^6u^{13} + \\
& 14t^3u^{16} + u^{19} + 7t^{16}u^2 + 24t^{13}u^5 + 35t^{10}u^8 + 32t^7u^{11} + 18t^4u^{14} + 3tu^{17} + t^{17} + 14t^{14}u^3 + 29t^{11}u^6 + 32t^8u^9 + 24t^5u^{12} + \\
& 9t^2u^{15} + 2t^{15}u + 16t^{12}u^4 + 26t^9u^7 + 23t^6u^{10} + 11t^3u^{13} + u^{16} + 8t^{13}u^2 + 20t^{10}u^5 + 23t^7u^8 + 16t^4u^{11} + 5tu^{14} + 10t^{11}u^3 + \\
& 17t^8u^6 + 16t^5u^9 + 6t^2u^{12} + 4t^{12}u + 14t^9u^4 + 17t^6u^7 + 10t^3u^{10} + 2u^{13} + 5t^{10}u^2 + 11t^7u^5 + 9t^4u^8 + 3tu^{11} + t^{11} + 8t^8u^3 + 11t^5u^6 + \\
& 6t^2u^9 + 2t^9u + 6t^6u^4 + 4t^3u^7 + u^{10} + 5t^7u^2 + 7t^4u^5 + 3tu^8 + t^8 + 3t^5u^3 + 2t^2u^6 + 2t^6u + 3t^3u^4 + u^7 + t^4u^2 + tu^5 + t^5 + t^2u^3 + t^3u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_6 = & t^{35}u^{36} + t^{34}u^{35} + t^{36}u^{31} + 2t^{33}u^{34} + t^{34}u^{32} + t^{31}u^{35} + t^{35}u^{30} + 4t^{32}u^{33} + 3t^{33}u^{31} + 2t^{30}u^{34} + 4t^{34}u^{29} + 7t^{31}u^{32} + \\
& 2t^{28}u^{35} + 2t^{35}u^{27} + 6t^{32}u^{30} + 6t^{29}u^{33} + t^{36}u^{25} + 8t^{33}u^{28} + 11t^{30}u^{31} + 5t^{27}u^{34} + 4t^{34}u^{26} + 11t^{31}u^{29} + 10t^{28}u^{32} + 2t^{25}u^{35} + \\
& 3t^{35}u^{24} + 13t^{32}u^{27} + 18t^{29}u^{30} + 9t^{26}u^{33} + t^{23}u^{36} + t^{36}u^{22} + 9t^{33}u^{25} + 18t^{30}u^{28} + 16t^{27}u^{31} + 6t^{24}u^{34} + 7t^{34}u^{23} + 20t^{31}u^{26} + \\
& 25t^{28}u^{29} + 16t^{25}u^{32} + 3t^{22}u^{35} + 4t^{35}u^{21} + 16t^{32}u^{24} + 25t^{29}u^{27} + 24t^{26}u^{30} + 11t^{23}u^{33} + 2t^{20}u^{36} + 2t^{36}u^{19} + 11t^{33}u^{22} + \\
& 29t^{30}u^{25} + 33t^{27}u^{28} + 24t^{24}u^{31} + 7t^{21}u^{34} + 8t^{34}u^{20} + 24t^{31}u^{23} + 34t^{28}u^{26} + 33t^{25}u^{29} + 17t^{22}u^{32} + 5t^{19}u^{35} + 5t^{35}u^{18} + \\
& 18t^{32}u^{21} + 38t^{29}u^{24} + 43t^{26}u^{27} + 33t^{23}u^{30} + 12t^{20}u^{33} + 2t^{17}u^{36} + 2t^{36}u^{16} + 13t^{33}u^{19} + 33t^{30}u^{22} + 45t^{27}u^{25} + 43t^{24}u^{28} + \\
& 26t^{21}u^{31} + 8t^{18}u^{34} + 8t^{34}u^{17} + 27t^{31}u^{20} + 47t^{28}u^{23} + 54t^{25}u^{26} + 41t^{22}u^{29} + 19t^{19}u^{32} + 5t^{16}u^{35} + 4t^{35}u^{15} + 19t^{32}u^{18} + \\
& 40t^{29}u^{21} + 56t^{26}u^{24} + 53t^{23}u^{27} + 34t^{20}u^{30} + 12t^{17}u^{33} + t^{14}u^{36} + t^{36}u^{13} + 13t^{33}u^{16} + 34t^{30}u^{19} + 57t^{27}u^{22} + 64t^{24}u^{25} + \\
& 49t^{21}u^{28} + 27t^{18}u^{31} + 9t^{15}u^{34} + 8t^{34}u^{14} + 27t^{31}u^{17} + 49t^{28}u^{20} + 67t^{25}u^{23} + 65t^{22}u^{26} + 41t^{19}u^{29} + 19t^{16}u^{32} + 3t^{13}u^{35} + \\
& 3t^{35}u^{12} + 20t^{32}u^{15} + 41t^{29}u^{18} + 67t^{26}u^{21} + 74t^{23}u^{24} + 58t^{20}u^{27} + 34t^{17}u^{30} + 14t^{14}u^{33} + t^{11}u^{36} + 12t^{33}u^{13} + 34t^{30}u^{16} + \\
& 57t^{27}u^{19} + 76t^{24}u^{22} + 73t^{21}u^{25} + 49t^{18}u^{28} + 26t^{15}u^{31} + 6t^{12}u^{34} + 7t^{34}u^{11} + 26t^{31}u^{14} + 49t^{28}u^{17} + 73t^{25}u^{20} + 83t^{22}u^{23} + \\
& 65t^{19}u^{26} + 41t^{16}u^{29} + 19t^{13}u^{32} + 3t^{10}u^{35} + 2t^{35}u^9 + 16t^{32}u^{12} + 42t^{29}u^{15} + 65t^{26}u^{18} + 84t^{23}u^{21} + 79t^{20}u^{24} + 58t^{17}u^{27} + \\
& 33t^{14}u^{30} + 10t^{11}u^{33} + 11t^{33}u^{10} + 33t^{30}u^{13} + 57t^{27}u^{16} + 79t^{24}u^{19} + 91t^{21}u^{22} + 73t^{18}u^{25} + 49t^{15}u^{28} + 24t^{12}u^{31} + 6t^9u^{34} + \\
& 3t^{34}u^8 + 20t^{31}u^{11} + 48t^{28}u^{14} + 73t^{25}u^{17} + 89t^{22}u^{20} + 84t^{19}u^{23} + 65t^{16}u^{26} + 39t^{13}u^{29} + 13t^{10}u^{32} + t^{35}u^6 + 14t^{32}u^9 + \\
& 38t^{29}u^{12} + 63t^{26}u^{15} + 84t^{23}u^{18} + 93t^{20}u^{21} + 79t^{17}u^{24} + 54t^{14}u^{27} + 29t^{11}u^{30} + 8t^8u^{33} + t^5u^{36} + 5t^{33}u^7 + 24t^{30}u^{10} + \\
& 52t^{27}u^{13} + 79t^{24}u^{16} + 91t^{21}u^{19} + 89t^{18}u^{22} + 71t^{15}u^{25} + 43t^{12}u^{28} + 16t^9u^{31} + 2t^6u^{34} + 3t^{34}u^5 + 16t^{31}u^8 + 41t^{28}u^{11} + \\
& 70t^{25}u^{14} + 89t^{22}u^{17} + 94t^{19}u^{20} + 84t^{16}u^{23} + 60t^{13}u^{26} + 32t^{10}u^{29} + 10t^7u^{32} + t^4u^{35} + 6t^{32}u^6 + 26t^{29}u^9 + 56t^{26}u^{12} + \\
& 82t^{23}u^{15} + 94t^{20}u^{18} + 93t^{17}u^{21} + 76t^{14}u^{24} + 44t^{11}u^{27} + 18t^8u^{30} + 3t^5u^{33} + t^{36}u + 3t^{33}u^4 + 18t^{30}u^7 + 41t^{27}u^{10} + 74t^{24}u^{13} + \\
& 91t^{21}u^{16} + 94t^{18}u^{19} + 85t^{15}u^{22} + 64t^{12}u^{25} + 33t^9u^{28} + 11t^6u^{31} + t^3u^{34} + 7t^{31}u^5 + 27t^{28}u^8 + 57t^{25}u^{11} + 82t^{22}u^{14} + 94t^{19}u^{17} + \\
& 94t^{16}u^{20} + 77t^{13}u^{23} + 44t^{10}u^{26} + 20t^7u^{29} + 3t^4u^{32} + tu^{35} + t^{35} + 3t^{32}u^3 + 18t^{29}u^6 + 41t^{26}u^9 + 74t^{23}u^{12} + 91t^{20}u^{15} + \\
& 94t^{17}u^{18} + 85t^{14}u^{21} + 64t^{11}u^{24} + 33t^8u^{27} + 11t^5u^{30} + t^2u^{33} + 6t^{30}u^4 + 26t^{27}u^7 + 56t^{24}u^{10} + 82t^{21}u^{13} + 94t^{18}u^{16} + 93t^{15}u^{19} + \\
& 76t^{12}u^{22} + 44t^9u^{25} + 18t^6u^{28} + 3t^3u^{31} + 3t^{31}u^2 + 16t^{28}u^5 + 41t^{25}u^8 + 70t^{22}u^{11} + 89t^{19}u^{14} + 94t^{16}u^{17} + 84t^{13}u^{20} + \\
& 60t^{10}u^{23} + 32t^7u^{26} + 10t^4u^{29} + tu^{32} + 5t^{29}u^3 + 24t^{26}u^6 + 52t^{23}u^9 + 79t^{20}u^{12} + 91t^{17}u^{15} + 89t^{14}u^{18} + 71t^{11}u^{21} + 43t^8u^{24} + \\
& 16t^5u^{27} + 2t^2u^{30} + t^{30}u + 14t^{27}u^4 + 38t^{24}u^7 + 63t^{21}u^{10} + 84t^{18}u^{13} + 93t^{15}u^{16} + 79t^{12}u^{19} + 54t^9u^{22} + 29t^6u^{25} + 8t^3u^{28} + \\
& u^{31} + 3t^{28}u^2 + 20t^{25}u^5 + 48t^{22}u^8 + 73t^{19}u^{11} + 89t^{16}u^{14} + 84t^{13}u^{17} + 65t^{10}u^{20} + 39t^7u^{23} + 13t^4u^{26} + 11t^{26}u^3 + 33t^{23}u^6 + \\
& 57t^{20}u^9 + 79t^{17}u^{12} + 91t^{14}u^{15} + 73t^{11}u^{18} + 49t^8u^{21} + 24t^5u^{24} + 6t^2u^{27} + 2t^{27}u + 16t^{24}u^4 + 42t^{21}u^7 + 65t^{18}u^{10} + 84t^{15}u^{13} + \\
& 79t^{12}u^{16} + 58t^9u^{19} + 33t^6u^{22} + 10t^3u^{25} + 7t^{25}u^2 + 26t^{22}u^5 + 49t^{19}u^8 + 73t^{16}u^{11} + 83t^{13}u^{14} + 65t^{10}u^{17} + 41t^7u^{20} + \\
& 19t^4u^{23} + 3tu^{26} + 12t^{23}u^3 + 34t^{20}u^6 + 57t^{17}u^9 + 76t^{14}u^{12} + 73t^{11}u^{15} + 49t^8u^{18} + 26t^5u^{21} + 6t^2u^{24} + 3t^{24}u + 20t^{21}u^4 + \\
& 41t^{18}u^7 + 67t^{15}u^{10} + 74t^{12}u^{13} + 58t^9u^{16} + 34t^6u^{19} + 14t^3u^{22} + u^{25} + 8t^{22}u^2 + 27t^{19}u^5 + 49t^{16}u^8 + 67t^{13}u^{11} + 65t^{10}u^{14} + \\
& 41t^7u^{17} + 19t^4u^{20} + 3tu^{23} + t^{23} + 13t^{20}u^3 + 34t^{17}u^6 + 57t^{14}u^9 + 64t^{11}u^{12} + 49t^8u^{15} + 27t^5u^{18} + 9t^2u^{21} + 4t^{21}u + 19t^{18}u^4 + \\
& 40t^{15}u^7 + 56t^{12}u^{10} + 53t^9u^{13} + 34t^6u^{16} + 12t^3u^{19} + u^{22} + 8t^{19}u^2 + 27t^{16}u^5 + 47t^{13}u^8 + 54t^{10}u^{11} + 41t^7u^{14} + 19t^4u^{17} + \\
& 5tu^{20} + 2t^{20} + 13t^{17}u^3 + 33t^{14}u^6 + 45t^{11}u^9 + 43t^8u^{12} + 26t^5u^{15} + 8t^2u^{18} + 5t^{18}u + 18t^{15}u^4 + 38t^{12}u^7 + 43t^9u^{10} + 33t^6u^{13} + \\
& 12t^3u^{16} + 2u^{19} + 8t^{16}u^2 + 24t^{13}u^5 + 34t^{10}u^8 + 33t^7u^{11} + 17t^4u^{14} + 5tu^{17} + 2t^{17} + 11t^{14}u^3 + 29t^{11}u^6 + 33t^8u^9 + 24t^5u^{12} + \\
& 7t^2u^{15} + 4t^{15}u + 16t^{12}u^4 + 25t^9u^7 + 24t^6u^{10} + 11t^3u^{13} + 2u^{16} + 7t^{13}u^2 + 20t^{10}u^5 + 25t^7u^8 + 16t^4u^{11} + 3tu^{14} + t^{14} + 9t^{11}u^3 + \\
& 18t^8u^6 + 16t^5u^9 + 6t^2u^{12} + 3t^{12}u + 13t^9u^4 + 18t^6u^7 + 9t^3u^{10} + u^{13} + 4t^{10}u^2 + 11t^7u^5 + 10t^4u^8 + 2tu^{11} + t^{11} + 8t^8u^3 + \\
& 11t^5u^6 + 5t^2u^9 + 2t^9u + 6t^6u^4 + 6t^3u^7 + 4t^2u^7 + 7t^4u^5 + 2tu^8 + 3t^5u^3 + 2t^2u^6 + t^6u + 4t^3u^4 + t^4u^2 + tu^5 + t^5 + 2t^2u^3 + tu^2 + u
\end{aligned}$$

$$M_K(t, u)_7 = M_K(u, t)_6$$

$$M_K(t, u)_8 = M_K(u, t)_5$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_9 = & (2t^{28}u^{28} + t^{29}u^{26} + t^{26}u^{29} + 2t^{30}u^{24} + 4t^{27}u^{27} + 2t^{24}u^{30} + 3t^{28}u^{25} + 3t^{25}u^{28} + 5t^{29}u^{23} + 10t^{26}u^{26} + 5t^{23}u^{29} + \\
& 3t^{30}u^{21} + 8t^{27}u^{24} + 8t^{24}u^{27} + t^{21}u^{30} + 8t^{28}u^{22} + 18t^{25}u^{25} + 8t^{22}u^{28} + 4t^{29}u^{20} + 14t^{26}u^{23} + 14t^{23}u^{26} + 4t^{20}u^{29} + t^{30}u^{18} + \\
& 14t^{27}u^{21} + 24t^{24}u^{24} + 14t^{21}u^{27} + t^{18}u^{30} + 8t^{28}u^{19} + 24t^{25}u^{22} + 24t^{22}u^{25} + 8t^{19}u^{28} + 3t^{29}u^{17} + 20t^{26}u^{20} + 30t^{23}u^{23} + \\
& 20t^{20}u^{26} + 3t^{17}u^{29} + t^{30}u^{15} + 13t^{27}u^{18} + 32t^{24}u^{21} + 32t^{21}u^{24} + 13t^{18}u^{27} + t^{15}u^{30} + 8t^{28}u^{16} + 27t^{25}u^{19} + 38t^{22}u^{22} + \\
& 27t^{19}u^{25} + 8t^{16}u^{28} + 3t^{29}u^{14} + 20t^{26}u^{17} + 39t^{23}u^{20} + 39t^{20}u^{23} + 20t^{17}u^{26} + 3t^{14}u^{29} + t^{30}u^{12} + 13t^{27}u^{15} + 34t^{24}u^{18} + \\
& 42t^{21}u^{21} + 34t^{18}u^{24} + 13t^{15}u^{27} + t^{12}u^{30} + 7t^{28}u^{13} + 27t^{25}u^{16} + 42t^{22}u^{19} + 42t^{19}u^{22} + 27t^{16}u^{25} + 7t^{13}u^{28} + 4t^{29}u^{11} + \\
& 19t^{26}u^{14} + 41t^{23}u^{17} + 44t^{20}u^{20} + 41t^{17}u^{23} + 19t^{14}u^{26} + 4t^{11}u^{29} + t^{30}u^9 + 13t^{27}u^{12} + 34t^{24}u^{15} + 45t^{21}u^{18} + 45t^{18}u^{21} + \\
& 34t^{15}u^{24} + 13t^{12}u^{27} + t^9u^{30} + 7t^{28}u^{10} + 27t^{25}u^{13} + 43t^{22}u^{16} + 46t^{19}u^{19} + 43t^{16}u^{22} + 27t^{13}u^{25} + 7t^{10}u^{28} + 4t^{29}u^8 + \\
& 19t^{26}u^{11} + 40t^{23}u^{14} + 45t^{20}u^{17} + 45t^{17}u^{20} + 40t^{14}u^{23} + 19t^{11}u^{26} + 4t^8u^{29} + 2t^{30}u^6 + 12t^{27}u^9 + 34t^{24}u^{12} + 45t^{21}u^{15} + \\
& 46t^{18}u^{18} + 45t^{15}u^{21} + 34t^{12}u^{24} + 12t^9u^{27} + 2t^6u^{30} + 6t^{28}u^7 + 27t^{25}u^{10} + 44t^{22}u^{13} + 46t^{19}u^{16} + 46t^{16}u^{19} + 44t^{13}u^{22} + \\
& 27t^{10}u^{25} + 6t^7u^{28} + 3t^{29}u^5 + 18t^{26}u^8 + 38t^{23}u^{11} + 48t^{20}u^{14} + 44t^{17}u^{17} + 48t^{14}u^{20} + 38t^{11}u^{23} + 18t^8u^{26} + 3t^5u^{29} + \\
& 8t^{27}u^6 + 32t^{24}u^9 + 45t^{21}u^{12} + 46t^{18}u^{15} + 46t^{15}u^{18} + 45t^{12}u^{21} + 32t^9u^{24} + 8t^6u^{27} + 5t^{28}u^4 + 24t^{25}u^7 + 43t^{22}u^{10} + \\
& 47t^{19}u^{13} + 44t^{16}u^{16} + 47t^{13}u^{19} + 43t^{10}u^{22} + 24t^7u^{25} + 5t^4u^{28} + 9t^{26}u^5 + 33t^{23}u^8 + 47t^{20}u^{11} + 46t^{17}u^{14} + 46t^{14}u^{17} + \\
& 47t^{11}u^{20} + 33t^8u^{23} + 9t^5u^{26} + 5t^{27}u^3 + 24t^{24}u^6 + 46t^{21}u^9 + 46t^{18}u^{12} + 46t^{15}u^{15} + 46t^{12}u^{18} + 46t^9u^{21} + 24t^6u^{24} + \\
& 5t^3u^{27} + 9t^{25}u^4 + 33t^{22}u^7 + 47t^{19}u^{10} + 46t^{16}u^{13} + 46t^{13}u^{16} + 47t^{10}u^{19} + 33t^7u^{22} + 9t^4u^{25} + 5t^{26}u^2 + 24t^{23}u^5 + 43t^{20}u^8 + \\
& 47t^{17}u^{11} + 44t^{14}u^{14} + 47t^{11}u^{17} + 43t^8u^{20} + 24t^5u^{23} + 5t^2u^{26} + 8t^{24}u^3 + 32t^{21}u^6 + 45t^{18}u^9 + 46t^{15}u^{12} + 46t^{12}u^{15} + \\
& 45t^9u^{18} + 32t^6u^{21} + 8t^3u^{24} + 3t^{25}u^4 + 18t^{22}u^7 + 38t^{19}u^{10} + 7t^{16}u^{13} + 48t^{13}u^{16} + 38t^{10}u^{19} + 18t^7u^{22} + 3t^{24}u^{25} + \\
& 6t^{23}u^2 + 27t^{20}u^5 + 44t^{17}u^8 + 46t^{14}u^{11} + 46t^{11}u^{14} + 44t^8u^{17} + 27t^5u^{20} + 6t^2u^{23} + 2t^{24} + 12t^{21}u^3 + 34t^{18}u^6 + 45t^{15}u^9 + \\
& 46t^{12}u^{12} + 45t^9u^{15} + 34t^6u^{18} + 12t^3u^{21} + 2u^{24} + 4t^{22}u + 19t^{19}u^4 + 40t^{16}u^7 + 45t^{13}u^{10} + 45t^{10}u^{13} + 40t^7u^{16} + 19t^4u^{19} + \\
& 4tu^{22} + 7t^{20}u^2 + 27t^{17}u^5 + 43t^{14}u^8 + 46t^{11}u^{11} + 43t^8u^{14} + 27t^5u^{17} + 7t^2u^{20} + t^{21} + 13t^{18}u^3 + 34t^{15}u^6 + 45t^{12}u^9 + \\
& 45t^9u^{12} + 34t^6u^{15} + 13t^3u^{18} + u^{21} + 4t^{19}u + 19t^{16}u^4 + 41t^{13}u^7 + 44t^{10}u^{10} + 41t^7u^{13} + 19t^4u^{16} + 4tu^{19} + 7t^{17}u^2 + \\
& 27t^{14}u^5 + 42t^{11}u^8 + 42t^8u^{11} + 27t^5u^{14} + 7t^2u^{17} + t^{18} + 13t^{15}u^3 + 34t^{12}u^6 + 42t^9u^9 + 34t^6u^{12} + 13t^3u^{15} + u^{18} + 3t^{16}u + \\
& 20t^{13}u^4 + 39t^{10}u^7 + 39t^7u^{10} + 20t^4u^{13} + 3tu^{16} + 8t^{14}u^2 + 27t^{11}u^5 + 38t^8u^8 + 27t^5u^{11} + 8t^2u^{14} + t^{15} + 13t^{12}u^3 + 32t^9u^6 + \\
& 32t^6u^9 + 13t^3u^{12} + u^{15} + 3t^{13}u + 20t^{10}u^4 + 30t^7u^7 + 20t^4u^{10} + 3tu^{13} + 8t^{11}u^2 + 24t^8u^5 + 24t^5u^8 + 8t^2u^{11} + t^{12} + \\
& 14t^9u^3 + 24t^6u^6 + 14t^3u^9 + u^{12} + 4t^{10}u + 14t^7u^4 + 14t^4u^7 + 4tu^{10} + 8t^8u^2 + 18t^5u^5 + 8t^2u^8 + t^9 + 8t^6u^3 + 8t^3u^6 + \\
& u^9 + 5t^7u + 10t^4u^4 + 5tu^7 + 3t^5u^2 + 3t^2u^5 + 2t^6 + 4t^3u^3 + 2u^6 + t^4u + tu^4 + 2t^2u^2) (u^2 + 1) (u^4 - u^2 + 1) (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_{10} = & (t^{28}u^{30} + t^{30}u^{26} + 2t^{27}u^{29} + t^{28}u^{27} + 3t^{29}u^{25} + 5t^{26}u^{28} + 4t^{27}u^{26} + 2t^{24}u^{29} + 6t^{28}u^{24} + 9t^{25}u^{27} + t^{22}u^{30} + \\
& 3t^{29}u^{22} + 9t^{26}u^{25} + 6t^{23}u^{28} + 2t^{30}u^{20} + 11t^{27}u^{23} + 16t^{24}u^{26} + 3t^{21}u^{29} + 7t^{28}u^{21} + 18t^{25}u^{24} + 12t^{22}u^{27} + t^{19}u^{30} + \\
& 4t^{29}u^{19} + 18t^{26}u^{22} + 24t^{23}u^{25} + 7t^{20}u^{28} + 2t^{30}u^{17} + 12t^{27}u^{20} + 28t^{24}u^{23} + 18t^{21}u^{26} + 4t^{18}u^{29} + 8t^{28}u^{18} + 27t^{25}u^{21} + \\
& 32t^{22}u^{24} + 13t^{19}u^{27} + t^{16}u^{30} + 5t^{29}u^{16} + 19t^{26}u^{19} + 35t^{23}u^{22} + 27t^{20}u^{25} + 7t^{17}u^{28} + t^{30}u^{14} + 13t^{27}u^{17} + 32t^{24}u^{20} + \\
& 40t^{21}u^{23} + 19t^{18}u^{26} + 4t^{15}u^{29} + 8t^{28}u^{15} + 27t^{25}u^{18} + 40t^{22}u^{21} + 34t^{19}u^{24} + 12t^{16}u^{27} + 2t^{13}u^{30} + 4t^{29}u^{13} + 19t^{26}u^{16} + \\
& 38t^{23}u^{19} + 44t^{20}u^{22} + 27t^{17}u^{25} + 8t^{14}u^{28} + t^{30}u^{11} + 14t^{27}u^{14} + 32t^{24}u^{17} + 46t^{21}u^{20} + 38t^{18}u^{23} + 19t^{15}u^{26} + 4t^{12}u^{29} + \\
& 8t^{28}u^{12} + 27t^{25}u^{15} + 42t^{22}u^{18} + 45t^{19}u^{21} + 34t^{16}u^{24} + 12t^{13}u^{27} + 2t^{10}u^{30} + 3t^{29}u^{10} + 20t^{26}u^{13} + 36t^{23}u^{16} + 47t^{20}u^{19} + \\
& 43t^{17}u^{22} + 27t^{14}u^{25} + 8t^{11}u^{28} + 3t^{29}u^{11} + 34t^{24}u^{14} + 44t^{21}u^{17} + 47t^{18}u^{20} + 38t^{15}u^{23} + 19t^{12}u^{26} + 5t^9u^{29} + \\
& 7t^{28}u^9 + 27t^{25}u^{12} + 42t^{22}u^{15} + 46t^{19}u^{18} + 47t^{16}u^{21} + 32t^{13}u^{24} + 13t^{10}u^{27} + 3t^{29}u^7 + 20t^{26}u^{10} + 39t^{23}u^{13} + 46t^{20}u^{16} + \\
& 47t^{17}u^{19} + 41t^{14}u^{22} + 27t^{11}u^{25} + 8t^8u^{28} + 11t^{27}u^8 + 34t^{24}u^{11} + 43t^{21}u^{14} + 47t^{18}u^{17} + 47t^{15}u^{20} + 38t^{12}u^{23} + 18t^9u^{26} + \\
& 2t^6u^{29} + 6t^{28}u^6 + 27t^{25}u^9 + 42t^{22}u^{12} + 46t^{19}u^{15} + 46t^{16}u^{18} + 46t^{13}u^{21} + 32t^{10}u^{24} + 13t^7u^{27} + t^4u^{30} + t^{29}u^4 + 14t^{26}u^7 + \\
& 41t^{23}u^{10} + 44t^{20}u^{13} + 48t^{17}u^{16} + 46t^{14}u^{19} + 42t^{11}u^{22} + 24t^8u^{25} + 3t^5u^{28} + t^{30}u^2 + 9t^{27}u^5 + 32t^{24}u^8 + 45t^{21}u^{11} + 46t^{18}u^{14} + \\
& 47t^{15}u^{17} + 47t^{12}u^{20} + 36t^9u^{23} + 16t^6u^{26} + t^3u^{29} + t^{28}u^3 + 18t^{25}u^6 + 42t^{22}u^9 + 46t^{19}u^{12} + 46t^{16}u^{15} + 47t^{13}u^{18} + 44t^{10}u^{21} + \\
& 28t^7u^{24} + 4t^4u^{27} + t^{29}u + 10t^{26}u^4 + 34t^{23}u^7 + 45t^{20}u^{10} + 45t^{17}u^{13} + 48t^{14}u^{16} + 46t^{11}u^{19} + 39t^8u^{22} + 18t^5u^{25} + 2t^2u^{28} + \\
& t^{27}u^2 + 18t^{24}u^5 + 42t^{21}u^8 + 46t^{18}u^{11} + 46t^{15}u^{14} + 47t^{12}u^{17} + 44t^9u^{20} + 28t^6u^{23} + 4t^3u^{26} + t^{28} + 9t^{25}u^3 + 32t^{22}u^6 + \\
& 45t^{19}u^9 + 46t^{16}u^{12} + 47t^{13}u^{15} + 47t^{10}u^{18} + 36t^7u^{21} + 16t^4u^{24} + tu^{27} + t^{26}u + 14t^{23}u^4 + 41t^{20}u^7 + 44t^{17}u^{10} + 48t^{14}u^{13} + \\
& 46t^{11}u^{16} + 42t^8u^{19} + 24t^5u^{22} + 3t^2u^{25} + 6t^{24}u^2 + 27t^{21}u^5 + 42t^{18}u^8 + 46t^{15}u^{11} + 46t^{12}u^{14} + 46t^9u^{17} + 32t^6u^{20} + \\
& 13t^3u^{23} + u^{26} + 11t^{22}u^3 + 44t^{19}u^6 + 43t^{16}u^9 + 47t^{13}u^{12} + 47t^{10}u^{15} + 38t^7u^{18} + 18t^4u^{21} + 2tu^{24} + 3t^{23}u + 20t^{20}u^4 + \\
& 39t^{17}u^7 + 46t^{14}u^{10} + 47t^{11}u^{13} + 41t^8u^{16} + 27t^5u^{19} + 8t^2u^{22} + 7t^{21}u^2 + 27t^{18}u^5 + 42t^{15}u^8 + 46t^{12}u^{11} + 47t^9u^{14} + \\
& 32t^6u^{17} + 13t^3u^{20} + t^{22} + 13t^{19}u^3 + 34t^{16}u^6 + 44t^{13}u^9 + 47t^{10}u^{12} + 38t^7u^{15} + 19t^4u^{18} + 5tu^{21} + 3t^{20}u + 20t^{17}u^4 + \\
& 36t^{14}u^7 + 47t^{11}u^{10} + 43t^8u^{13} + 27t^5u^{16} + 8t^2u^{19} + 8t^{18}u^2 + 27t^{15}u^5 + 42t^{12}u^8 + 45t^9u^{11} + 34t^6u^{14} + 12t^3u^{17} + 2u^{20} + \\
& t^{19} + 14t^{16}u^3 + 32t^{13}u^6 + 46t^{10}u^9 + 38t^7u^{12} + 19t^4u^{15} + 4tu^{18} + 4t^{17}u + 19t^{14}u^4 + 38t^{11}u^7 + 44t^8u^{10} + 27t^5u^{13} + 8t^2u^{16} + \\
& 8t^{15}u^2 + 27t^{12}u^5 + 40t^9u^8 + 34t^6u^{11} + 12t^3u^{14} + 2u^{17} + t^{16} + 13t^{13}u^3 + 32t^{10}u^6 + 40t^7u^9 + 19t^4u^{12} + 4tu^{15} + 5t^{14}u + \\
& 19t^{11}u^4 + 35t^8u^7 + 27t^5u^{10} + 7t^2u^{13} + 8t^{12}u^2 + 27t^9u^5 + 32t^6u^8 + 13t^3u^{11} + u^{14} + 2t^{13} + 12t^{10}u^3 + 28t^7u^6 + 18t^4u^9 + \\
& 4tu^{12} + 4t^{11}u + 18t^8u^4 + 24t^5u^7 + 7t^2u^{10} + 7t^9u^2 + 18t^6u^5 + 12t^3u^8 + u^{11} + 2t^{10} + 11t^7u^3 + 16t^4u^6 + 3tu^9 + 3t^8u + 9t^5u^4 + \\
& 6t^2u^7 + 6t^6u^2 + 9t^3u^5 + u^8 + 4t^4u^3 + 2tu^6 + 3t^5u + 5t^2u^4 + t^3u^2 + t^4 + 2tu^3 + u^2) (u^2 + 1) (u^4 - u^2 + 1) (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$M_K(t, u)_{11} = M_K(u, t)_{10}$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_{12} = & (t^{18}u^{15} + t^{15}u^{18} + t^{16}u^{16} + 2t^{17}u^{14} + 2t^{14}u^{17} + 2t^{15}u^{15} + 5t^{16}u^{13} + 5t^{13}u^{16} + 2t^{17}u^{11} + 4t^{14}u^{14} + 2t^{11}u^{17} + \\
& t^{18}u^9 + 8t^{15}u^{12} + 8t^{12}u^{15} + t^9u^{18} + 3t^{16}u^{10} + 6t^{13}u^{13} + 3t^{10}u^{16} + 3t^{17}u^8 + 12t^{14}u^{11} + 12t^{11}u^{14} + 3t^8u^{17} + 5t^{15}u^9 + \\
& 9t^{12}u^{12} + 5t^9u^{15} + 6t^{16}u^7 + 15t^{13}u^{10} + 15t^{10}u^{13} + 6t^{17}u^{16} + t^{17}u^5 + 6t^{14}u^8 + 8t^{11}u^{11} + 6t^8u^{14} + 5t^{17}u^{17} + t^{18}u^3 + 8t^{15}u^6 + \\
& 17t^{12}u^9 + 17t^9u^{12} + 8t^6u^{15} + t^3u^{18} + 2t^{16}u^4 + 8t^{13}u^7 + 9t^{10}u^{10} + 8t^7u^{13} + 2t^4u^{16} + t^{17}u^2 + 10t^{14}u^5 + 18t^{11}u^8 + 18t^8u^{11} + \\
& 10t^5u^{14} + t^2u^{17} + 2t^{15}u^3 + 9t^{12}u^6 + 8t^9u^9 + 9t^6u^{12} + 2t^3u^{15} + t^{16}u + 10t^{13}u^4 + 18t^{10}u^7 + 18t^7u^{10} + 10t^4u^{13} + tu^{16} + \\
& 2t^{14}u^2 + 8t^{11}u^5 + 9t^8u^8 + 8t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + t^{15} + 8t^{12}u^3 + 17t^9u^6 + 17t^6u^9 + 8t^3u^{12} + u^{15} + t^{13}u + 6t^{10}u^4 + 8t^7u^7 + \\
& 6t^4u^{10} + tu^{13} + 6t^{11}u^2 + 15t^8u^5 + 15t^5u^8 + 6t^2u^{11} + 5t^9u^3 + 9t^6u^6 + 5t^3u^9 + 3t^{10}u + 12t^7u^4 + 12t^4u^7 + 3tu^{10} + 3t^8u^2 + \\
& 6t^5u^5 + 3t^2u^8 + t^9 + 8t^6u^3 + 8t^3u^6 + u^9 + 2t^7u + 4t^4u^4 + 2tu^7 + 5t^5u^2 + 5t^2u^5 + 2t^3u^3 + 2t^4u + 2tu^4 + t^2u^2 + t^3 + \\
& u^3) (u^6 + u^5 + u^4 + t^3 + u^2 + u + 1) (u^{12} - u^{11} + u^9 - u^8 + u^6 - u^4 + u^3 - u + 1) \\
& (t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) (t^{12} - t^{11} + t^9 - t^8 + t^6 - t^4 + t^3 - t^2 + t + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_{13} = & (t^{17}u^{16} + t^{15}u^{17} + 3t^{16}u^{15} + t^{13}u^{18} + t^{17}u^{13} + 2t^{14}u^{16} + 2t^{18}u^{11} + 6t^{15}u^{14} + 3t^{12}u^{17} + 3t^{16}u^{12} + 4t^{13}u^{15} + \\
& 3t^{17}u^{10} + 10t^{14}u^{13} + 6t^{11}u^{16} + 4t^{15}u^{11} + 6t^{12}u^{14} + t^9u^{17} + 6t^{16}u^9 + 14t^{13}u^{12} + 9t^{10}u^{15} + 2t^7u^{18} + 2t^{17}u^7 + 6t^{14}u^{10} + \\
& 8t^{11}u^{13} + 3t^8u^{16} + t^{18}u^5 + 9t^{15}u^8 + 16t^{12}u^{11} + 12t^9u^{14} + 3t^6u^{17} + 3t^{16}u^6 + 7t^{13}u^9 + 9t^{10}u^{12} + 4t^7u^{15} + 2t^{17}u^4 + \\
& 12t^{14}u^7 + 18t^{11}u^{10} + 15t^8u^{13} + 5t^5u^{16} + 4t^{15}u^5 + 9t^{12}u^8 + 10t^9u^{11} + 6t^6u^{14} + t^3u^{17} + 3t^{16}u^3 + 14t^{13}u^6 + 18t^{10}u^9 + \\
& 16t^7u^{12} + 6t^4u^{15} + 4t^{14}u^4 + 8t^{11}u^7 + 9t^8u^{10} + 6t^5u^{13} + t^2u^{16} + 3t^{15}u^2 + 14t^{12}u^5 + 18t^9u^8 + 16t^6u^{11} + 6t^3u^{14} + \\
& 4t^{13}u^3 + 9t^{10}u^6 + 10t^7u^9 + 6t^4u^{12} + tu^{15} + 2t^{14}u + 12t^{11}u^4 + 18t^8u^7 + 15t^5u^{10} + 5t^2u^{13} + 3t^{12}u^2 + 7t^9u^5 + 9t^6u^8 + \\
& 4t^3u^{11} + t^{13} + 9t^{10}u^3 + 16t^7u^6 + 12t^4u^9 + 3tu^{12} + 2t^{11}u + 6t^8u^4 + 8t^5u^7 + 3t^2u^{10} + 6t^9u^2 + 14t^6u^5 + 9t^3u^8 + 2u^{11} + \\
& 4t^7u^3 + 6t^4u^6 + tu^9 + 3t^8u + 10t^5u^4 + 6t^2u^7 + 3t^6u^2 + 4t^3u^5 + 2t^7 + 6t^4u^3 + 3tu^6 + t^5u + 2t^2u^4 + 3t^3u^2 + u^5 + tu^3 + \\
& t^2u) (u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1) (u^{12} - u^{11} + u^9 - u^8 + u^6 - u^4 + u^3 - u + 1) \\
& (t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) (t^{12} - t^{11} + t^9 - t^8 + t^6 - t^4 + t^3 - t + 1)
\end{aligned}$$

$$M_K(t, u)_{14} = M_K(u, t)_{13}$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_{15} = & (t^{23}u^{23} + 2t^{22}u^{22} + t^{24}u^{18} + 5t^{21}u^{21} + t^{18}u^{24} + 2t^{22}u^{19} + 2t^{19}u^{22} + 2t^{23}u^{17} + 7t^{20}u^{20} + 2t^{17}u^{23} + 2t^{21}u^{18} + \\
& t^{18}u^{21} + 3t^{22}u^{16} + 5t^{19}u^{19} + 3t^{16}u^{22} + t^{23}u^{14} + 2t^{20}u^{17} + 2t^{17}u^{20} + t^{14}u^{23} + t^{24}u^{12} + 5t^{21}u^{15} + 7t^{18}u^{18} + 5t^{15}u^{21} + \\
& t^{12}u^{24} + 2t^{22}u^{13} + 3t^{19}u^{16} + 3t^{16}u^{19} + 2t^{13}u^{22} + 2t^{23}u^{11} + 4t^{20}u^{14} + 5t^{17}u^{17} + 4t^{14}u^{20} + 2t^{11}u^{23} + 2t^{21}u^{12} + 2t^{18}u^{15} + \\
& 2t^{15}u^{18} + 2t^{12}u^{21} + 3t^{22}u^{10} + 5t^{19}u^{13} + 5t^{16}u^{16} + 5t^{13}u^{19} + 3t^{10}u^{22} + t^{23}u^8 + 3t^{20}u^{11} + 4t^{17}u^{14} + 4t^{14}u^{17} + 3t^{11}u^{20} + \\
& t^8u^{23} + t^{24}u^6 + 4t^{21}u^9 + 5t^{18}u^{12} + 5t^{15}u^{15} + 5t^{12}u^{18} + 4t^9u^{21} + t^6u^{24} + 3t^{22}u^7 + 3t^{19}u^{10} + 2t^{16}u^{13} + 2t^{13}u^{16} + 3t^{10}u^{19} + \\
& 3t^7u^{22} + t^{23}u^5 + 4t^{20}u^8 + 4t^{17}u^{11} + 5t^{14}u^{14} + 4t^{11}u^{17} + 4t^8u^{20} + t^5u^{23} + 3t^{21}u^6 + 4t^{18}u^9 + 3t^{15}u^{12} + 3t^{12}u^{15} + 4t^9u^{18} + \\
& 3t^6u^{21} + 2t^{22}u^4 + 3t^{19}u^7 + 5t^{16}u^{10} + 7t^{13}u^{13} + 5t^{10}u^{16} + 3t^7u^{19} + 2t^4u^{22} + t^{23}u^2 + 5t^{20}u^5 + 4t^{17}u^8 + 2t^{14}u^{11} + 2t^{11}u^{14} + \\
& 4t^8u^{17} + 5t^5u^{20} + t^2u^{23} + 4t^{21}u^3 + 3t^{18}u^6 + 4t^{15}u^9 + 5t^{12}u^{12} + 4t^9u^{15} + 3t^6u^{18} + 4t^3u^{21} + t^{22}u + 5t^{19}u^4 + 4t^{16}u^7 + \\
& 2t^{13}u^{10} + 2t^{10}u^{13} + 4t^7u^{16} + 5t^4u^{19} + tu^{22} + 2t^{20}u^2 + 3t^{17}u^5 + 5t^{14}u^8 + 7t^{11}u^{11} + 5t^8u^{14} + 3t^5u^{17} + 2t^2u^{20} + 3t^{18}u^3 + \\
& 4t^{15}u^6 + 3t^{12}u^9 + 3t^9u^{12} + 4t^6u^{15} + 3t^3u^{18} + t^{19}u + 4t^{16}u^4 + 4t^{13}u^7 + 5t^{10}u^{10} + 4t^7u^{13} + 4t^4u^{16} + tu^{19} + 3t^{17}u^2 + \\
& 3t^{14}u^5 + 2t^{11}u^8 + 2t^8u^{11} + 3t^5u^{14} + 3t^2u^{17} + t^{18} + 4t^{15}u^3 + 5t^{12}u^6 + 5t^9u^9 + 5t^6u^{12} + 4t^3u^{15} + u^{18} + t^{16}u + 3t^{13}u^4 + \\
& 4t^{10}u^7 + 4t^7u^{10} + 3t^4u^{13} + tu^{16} + 3t^{14}u^2 + 5t^{11}u^5 + 5t^8u^8 + 5t^5u^{11} + 3t^2u^{14} + 2t^{12}u^3 + 2t^9u^6 + 2t^6u^9 + 2t^3u^{12} + \\
& 2t^{13}u + 4t^{10}u^4 + 5t^7u^7 + 4t^4u^{10} + 2tu^{13} + 2t^{11}u^2 + 3t^8u^5 + 3t^5u^8 + 2t^2u^{11} + t^{12} + 5t^9u^3 + 7t^6u^6 + 5t^3u^9 + u^{12} + t^{10}u + \\
& 2t^7u^4 + 2t^4u^7 + tu^{10} + 3t^8u^2 + 5t^5u^5 + 3t^2u^8 + t^6u^3 + t^3u^6 + 2t^7u + 7t^4u^4 + 2tu^7 + 2t^5u^2 + 2t^2u^5 + t^6 + 5t^3u^3 + u^6 + \\
& 2t^2u^2 + tu) (u^2 + 1) (u^4 - u^2 + 1) (u + 1)^2 (u^2 - u + 1)^2 (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1) (t + 1)^2 (t^2 - t + 1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_K(t, u)_{16} = & (t^{23}u^{22} + t^{24}u^{20} + t^{21}u^{23} + 3t^{22}u^{21} + t^{19}u^{24} + t^{23}u^{19} + 2t^{20}u^{22} + 3t^{21}u^{20} + 2t^{18}u^{23} + 2t^{22}u^{18} + 2t^{19}u^{21} + \\
& 2t^{23}u^{16} + 5t^{20}u^{19} + 3t^{17}u^{22} + 4t^{21}u^{17} + 3t^{18}u^{20} + t^{15}u^{23} + 3t^{22}u^{15} + 5t^{19}u^{18} + 4t^{16}u^{21} + t^{13}u^{24} + 2t^{20}u^{16} + 3t^{17}u^{19} + \\
& 3t^{14}u^{22} + t^{24}u^{11} + 5t^{21}u^{14} + 4t^{18}u^{17} + 4t^{15}u^{20} + t^{12}u^{23} + 2t^{22}u^{12} + 3t^{19}u^{15} + 4t^{16}u^{18} + 3t^{13}u^{21} + 2t^{23}u^{10} + 7t^{20}u^{13} + \\
& 5t^{17}u^{16} + 3t^{14}u^{19} + 2t^{11}u^{22} + t^{21}u^{11} + 2t^{18}u^{14} + 4t^{15}u^{17} + 5t^{12}u^{20} + 2t^9u^{23} + 3t^{22}u^9 + 5t^{19}u^{12} + 4t^{16}u^{15} + 3t^{13}u^{18} + \\
& 4t^{10}u^{21} + t^{23}u^7 + 2t^{20}u^{10} + 2t^{17}u^{13} + 4t^{14}u^{16} + 5t^{11}u^{19} + 3t^8u^{22} + t^{24}u^5 + 5t^{21}u^8 + 7t^{18}u^{11} + 5t^{15}u^{14} + 3t^{12}u^{17} + \\
& 2t^9u^{20} + 2t^{22}u^6 + 3t^{19}u^9 + 3t^{16}u^{12} + 4t^{13}u^{15} + 4t^{10}u^{18} + 5t^7u^{21} + t^4u^{24} + 2t^{23}u^4 + 4t^{20}u^7 + 5t^{17}u^{10} + 4t^{14}u^{13} + \\
& 4t^{11}u^{16} + 3t^8u^{19} + 2t^5u^{22} + 2t^{21}u^5 + 2t^{18}u^8 + 2t^{15}u^{11} + 3t^{12}u^{14} + 5t^9u^{17} + 7t^6u^{20} + 2t^3u^{23} + 3t^{22}u^3 + 5t^{19}u^6 + \\
& 5t^{16}u^9 + 5t^{13}u^{12} + 4t^{10}u^{15} + 2t^7u^{18} + t^4u^{21} + 3t^{20}u^4 + 4t^{17}u^7 + 4t^{14}u^{10} + 3t^{11}u^{13} + 4t^8u^{16} + 5t^5u^{19} + 2t^2u^{22} + \\
& 3t^{21}u^2 + 5t^{18}u^5 + 5t^{15}u^8 + 5t^{12}u^{11} + 4t^9u^{14} + 2t^6u^{17} + t^3u^{20} + 2t^{19}u^3 + 2t^{16}u^6 + 2t^{13}u^9 + 3t^{10}u^{12} + 5t^7u^{15} + 7t^4u^{18} + \\
& 2tu^{21} + 2t^{20}u + 4t^{17}u^4 + 5t^{14}u^7 + 4t^{11}u^{10} + 4t^8u^{13} + 3t^5u^{16} + 2t^2u^{19} + 2t^{18}u^2 + 3t^{15}u^5 + 3t^{12}u^8 + 4t^9u^{11} + 4t^6u^{14} + \\
& 5t^3u^{17} + u^{20} + t^{19} + 5t^{16}u^3 + 7t^{13}u^6 + 5t^{10}u^9 + 3t^7u^{12} + 2t^4u^{15} + t^{17}u + 2t^{14}u^4 + 2t^{11}u^7 + 4t^8u^{10} + 5t^5u^{13} + 3t^2u^{16} + \\
& 3t^{15}u^2 + 5t^{12}u^5 + 4t^9u^8 + 3t^6u^{11} + 4t^3u^{14} + t^{13}u^3 + 2t^{10}u^6 + 4t^7u^9 + 5t^4u^{12} + 2tu^{15} + 2t^{14}u + 7t^{11}u^4 + 5t^8u^7 + \\
& 3t^5u^{10} + 2t^2u^{13} + 2t^{12}u^2 + 3t^9u^5 + 4t^6u^8 + 3t^3u^{11} + t^{13} + 5t^{10}u^3 + 4t^7u^6 + 4t^4u^9 + tu^{12} + 2t^8u^4 + 3t^5u^7 + 3t^2u^{10} + \\
& 3t^9u^2 + 5t^6u^5 + 4t^3u^8 + u^{11} + 4t^7u^3 + 3t^4u^6 + tu^9 + 2t^8u + 5t^5u^4 + 3t^2u^7 + 2t^6u^2 + 2t^3u^5 + 3t^4u^3 + 2tu^6 + t^5u + \\
& 2t^2u^4 + 3t^3u^2 + u^5 + t^4 + tu^3 + t^2u) (u^2 + 1) (u^4 - u^2 + 1) (u + 1)^2 (u^2 - u + 1)^2 (t^2 + 1) (t^4 - t^2 + 1) (t + 1)^2 (t^2 - t + 1)^2
\end{aligned}$$

$$M_K(t, u)_{17} = M_K(u, t)_{16}$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$\begin{aligned}
P_K(t, 0)_0 = P_K(0, t)_0 = \\
\frac{-t^{36} - t^{18} - 1}{(t-1)^3(t^2+t+1)^3(t^2+1)(t^4-t^2+1)(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)(t^{12}-t^{11}+t^9-t^8+t^6-t^4+t^3-t+1)(t+1)^2(t^2-t+1)^2}.
\end{aligned}$$

C.8 Type L

$$\begin{aligned}
D_L(t) = & (t-1)^3 (t^2+t+1)^3 (t^2+1) (t^4-t^2+1) (t^4+t^3+t^2+t+1) (t^8-t^7+t^5-t^4+t^3-t+1) \\
& (t+1)^2 (t^2-t+1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_0 = & t^{30}u^{30} + t^{29}u^{29} + t^{28}u^{28} + t^{27}u^{27} + 2t^{26}u^{26} + t^{28}u^{22} + 3t^{25}u^{25} + t^{22}u^{28} + 2t^{27}u^{21} + 4t^{24}u^{24} + 2t^{21}u^{27} + \\
& t^{25}u^{22} + t^{22}u^{25} + 3t^{26}u^{20} + 5t^{23}u^{23} + 3t^{20}u^{26} - t^{30}u^{15} + t^{27}u^{18} + 2t^{24}u^{21} + 2t^{21}u^{24} + t^{18}u^{27} - t^{15}u^{30} + t^{28}u^{16} + 4t^{25}u^{19} + \\
& 6t^{22}u^{22} + 4t^{19}u^{25} + t^{16}u^{28} + 2t^{26}u^{17} + 4t^{23}u^{20} + 4t^{20}u^{23} + 2t^{17}u^{26} + 2t^{27}u^{15} + 5t^{24}u^{18} + 7t^{21}u^{21} + 5t^{18}u^{24} + 2t^{15}u^{27} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3t^{25}u^{16} + 5t^{22}u^{19} + 5t^{19}u^{22} + 3t^{16}u^{25} + t^{29}u^{11} + 3t^{26}u^{14} + 7t^{23}u^{17} + 9t^{20}u^{20} + 7t^{17}u^{23} + 3t^{14}u^{26} + t^{11}u^{29} + t^{27}u^{12} + \\
& 5t^{24}u^{15} + 7t^{21}u^{18} + 7t^{18}u^{21} + 5t^{15}u^{24} + t^{12}u^{27} + 2t^{28}u^{10} + 4t^{25}u^{13} + 8t^{22}u^{16} + 11t^{19}u^{19} + 8t^{16}u^{22} + 4t^{13}u^{25} + 2t^{10}u^{28} + \\
& t^{26}u^{11} + 6t^{23}u^{14} + 8t^{20}u^{17} + 8t^{17}u^{20} + 6t^{14}u^{23} + t^{11}u^{26} + 2t^{27}u^9 + 5t^{24}u^{12} + 9t^{21}u^{15} + 12t^{18}u^{18} + 9t^{15}u^{21} + 5t^{12}u^{24} + \\
& 2t^9u^{27} + 2t^{25}u^{10} + 7t^{22}u^{13} + 11t^{19}u^{16} + 11t^{16}u^{19} + 7t^{13}u^{22} + 2t^{10}u^{25} + t^{29}u^5 + 3t^{26}u^8 + 6t^{23}u^{11} + 10t^{20}u^{14} + 14t^{17}u^{17} + \\
& 10t^{14}u^{20} + 6t^{11}u^{23} + 3t^8u^{26} + t^5u^{29} + 2t^{24}u^9 + 7t^{21}u^{12} + 12t^{18}u^{15} + 12t^{15}u^{18} + 7t^{12}u^{21} + 2t^9u^{24} + t^{28}u^{14} + 3t^{25}u^7 + \\
& 6t^{22}u^{10} + 11t^{19}u^{13} + 14t^{16}u^{16} + 11t^{13}u^{19} + 6t^{10}u^{22} + 3t^7u^{25} + t^4u^{28} + 2t^{23}u^8 + 7t^{20}u^{11} + 13t^{17}u^{14} + 13t^{14}u^{17} + 7t^{11}u^{20} + \\
& 2t^8u^{23} + t^{30} + t^{27}u^3 + 4t^{24}u^6 + 7t^{21}u^9 + 12t^{18}u^{12} + 16t^{15}u^{15} + 12t^{12}u^{18} + 7t^9u^{21} + 4t^6u^{24} + t^3u^{27} + u^{30} + 2t^{22}u^7 + \\
& 7t^{19}u^{10} + 13t^{16}u^{13} + 13t^{13}u^{16} + 7t^{10}u^{19} + 2t^7u^{22} + t^6u^2 + 3t^{23}u^5 + 6t^{20}u^8 + 11t^{17}u^{11} + 14t^{14}u^{14} + 11t^{11}u^{17} + 6t^8u^{20} + \\
& 3t^5u^{23} + t^2u^{26} + 2t^{21}u^6 + 7t^{18}u^9 + 12t^{15}u^{12} + 12t^{12}u^{15} + 7t^9u^{18} + 2t^6u^{21} + t^{25}u + 3t^{22}u^4 + 6t^{19}u^7 + 10t^{16}u^{10} + 14t^{13}u^{13} + \\
& 10t^{10}u^{16} + 6t^7u^{19} + 3t^4u^{22} + tu^{25} + 2t^{20}u^5 + 7t^{17}u^8 + 11t^{14}u^{11} + 11t^{11}u^{14} + 7t^8u^{17} + 2t^5u^{20} + 2t^{21}u^3 + 5t^{18}u^6 + \\
& 9t^{15}u^9 + 12t^{12}u^{12} + 9t^9u^{15} + 5t^6u^{18} + 2t^3u^{21} + t^{19}u^{14} + 6t^{16}u^{17} + 8t^{13}u^{10} + 8t^{10}u^{13} + 6t^7u^{16} + t^4u^{19} + 2t^{20}u^2 + 4t^{17}u^5 + \\
& 8t^{14}u^8 + 11t^{11}u^{11} + 8t^8u^{14} + 4t^5u^{17} + 2t^2u^{20} + t^{18}u^3 + 5t^{15}u^6 + 7t^{12}u^9 + 7t^9u^{12} + 5t^6u^{15} + t^3u^{18} + t^{19}u + 3t^{16}u^4 + \\
& 7t^{13}u^7 + 9t^{10}u^{10} + 7t^7u^{13} + 3t^4u^{16} + tu^{19} + 3t^{14}u^5 + 5t^{11}u^8 + 5t^8u^{11} + 3t^5u^{14} + 2t^{15}u^3 + 5t^{12}u^6 + 7t^9u^9 + 5t^6u^{12} + \\
& 2t^3u^{15} + 2t^{13}u^4 + 4t^{10}u^7 + 4t^7u^{10} + 2t^4u^{13} + t^{14}u^2 + 4t^{11}u^5 + 6t^8u^8 + 4t^5u^{11} + t^2u^{14} - t^{15} + t^{12}u^3 + 2t^9u^6 + 2t^6u^9 + \\
& t^3u^{12} - u^{15} + 3t^{10}u^4 + 5t^7u^7 + 3t^4u^{10} + t^8u^5 + t^5u^8 + 2t^9u^3 + 4t^6u^6 + 2t^3u^9 + t^8u^2 + 3t^5u^5 + t^2u^8 + 2t^4u^4 + t^3u^3 + t^2u^2 + tu + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_1 &= t^{30}u^{25} + t^{27}u^{28} + t^{29}u^{24} + 2t^{26}u^{27} + t^{23}u^{30} + t^{27}u^{25} + 3t^{28}u^{23} + 4t^{25}u^{26} + 2t^{22}u^{29} + t^{29}u^{21} + 2t^{26}u^{24} + \\
& 2t^{23}u^{27} + 4t^{27}u^{22} + 5t^{24}u^{25} + 3t^{21}u^{28} + 2t^{28}u^{20} + 5t^{25}u^{23} + 4t^{22}u^{26} + t^{19}u^{29} + 2t^{29}u^{18} + 7t^{26}u^{21} + 8t^{23}u^{24} + 5t^{20}u^{27} + \\
& t^{17}u^{30} + 4t^{27}u^{19} + 8t^{24}u^{22} + 7t^{21}u^{25} + 3t^{18}u^{28} + 4t^{28}u^{17} + 10t^{25}u^{20} + 11t^{22}u^{23} + 8t^{19}u^{26} + 2t^{16}u^{29} + t^{29}u^{15} + 7t^{26}u^{18} + \\
& 11t^{23}u^{21} + 10t^{20}u^{24} + 5t^{17}u^{27} + t^{30}u^{13} + 6t^{27}u^{16} + 15t^{24}u^{19} + 16t^{21}u^{22} + 12t^{18}u^{25} + 4t^{15}u^{28} + 3t^{12}u^{31} + 11t^{25}u^{17} + \\
& 15t^{22}u^{20} + 14t^{19}u^{23} + 8t^{16}u^{26} + 2t^{13}u^{29} + 2t^{29}u^{12} + 9t^{26}u^{15} + 18t^{23}u^{18} + 20t^{20}u^{21} + 16t^{17}u^{24} + 6t^{14}u^{27} + 5t^{11}u^{30} + 9t^{13}u^{13} + \\
& 16t^{24}u^{16} + 20t^{21}u^{19} + 19t^{18}u^{22} + 11t^{15}u^{25} + 3t^{12}u^{28} + 3t^{28}u^{11} + 12t^{25}u^{14} + 22t^{22}u^{17} + 25t^{19}u^{20} + 19t^{16}u^{23} + 9t^{13}u^{26} + \\
& t^{10}u^{29} + t^{29}u^9 + 7t^{26}u^{12} + 19t^{23}u^{15} + 26t^{20}u^{18} + 24t^{17}u^{21} + 16t^{14}u^{24} + 4t^{11}u^{27} + t^{30}u^7 + 5t^{27}u^{10} + 16t^{24}u^{13} + 26t^{21}u^{16} + \\
& 30t^{18}u^{19} + 23t^{15}u^{22} + 12t^{12}u^{25} + 3t^9u^{28} + t^{28}u^8 + 8t^{25}u^{11} + 22t^{22}u^{14} + 31t^{19}u^{17} + 29t^{16}u^{20} + 17t^{13}u^{23} + 5t^{10}u^{26} + t^{29}u^6 + \\
& 7t^{26}u^9 + 18t^{23}u^{12} + 31t^{20}u^{15} + 34t^{17}u^{18} + 26t^{14}u^{21} + 15t^{11}u^{24} + 4t^8u^{27} + t^{5u^{30}} + 2t^{27}u^7 + 10t^{24}u^{10} + 24t^{21}u^{13} + 35t^{18}u^{16} + \\
& 33t^{15}u^{19} + 19t^{12}u^{22} + 7t^9u^{25} + 2t^{28}u^5 + 8t^{25}u^8 + 20t^{22}u^{11} + 34t^{19}u^{14} + 38t^{16}u^{17} + 29t^{13}u^{20} + 16t^{10}u^{23} + 5t^7u^{26} + t^{4u^{29}} + \\
& 2t^{26}u^6 + 11t^{23}u^9 + 26t^{20}u^{12} + 38t^{17}u^{15} + 35t^{14}u^{18} + 20t^{11}u^{21} + 2t^8u^{24} + t^5u^{27} + 2t^{27}u^4 + 8t^{24}u^7 + 20t^{21}u^{10} + 34t^{18}u^{13} + \\
& 41t^{15}u^{16} + 30t^{12}u^{19} + 16t^9u^{22} + 5t^6u^{25} + t^3u^{28} + 3t^{25}u^5 + 12t^{22}u^8 + 27t^{19}u^{11} + 40t^{16}u^{14} + 35t^{13}u^{17} + 21t^{10}u^{20} + 9t^7u^{23} + \\
& t^4u^{26} + 2t^{26}u^3 + 8t^{23}u^6 + 20t^{20}u^9 + 34t^{17}u^{12} + 41t^{14}u^{15} + 30t^{11}u^{18} + 16t^8u^{21} + 5t^5u^{24} + t^2u^{27} + 2t^{24}u^4 + 11t^{21}u^7 + \\
& 26t^{18}u^{10} + 38t^{15}u^{13} + 35t^{12}u^{16} + 20t^9u^{19} + 8t^6u^{22} + 3t^{25}u^2 + 2t^{25}u^2 + 8t^{22}u^5 + 20t^{19}u^8 + 34t^{16}u^{11} + 38t^{13}u^{14} + 29t^{10}u^{17} + \\
& 16t^7u^{20} + 5t^4u^{23} + tu^{26} + 2t^{23}u^3 + 2t^{23}u^3 + 6t^{24}u^6 + 24t^{17}u^9 + 35t^{14}u^{12} + 33t^{11}u^{15} + 19t^8u^{18} + 7t^5u^{21} + t^{24}u + 7t^{21}u^4 + 18t^{18}u^7 + \\
& 31t^{15}u^{10} + 34t^{12}u^{13} + 26t^9u^{16} + 15t^6u^{19} + 4t^3u^{22} + u^{25} + t^{22}u^2 + 8t^{19}u^5 + 22t^{16}u^8 + 31t^{13}u^{11} + 29t^{10}u^{14} + 17t^7u^{17} + \\
& 5t^4u^{20} + t^{23} + 5t^{20}u^3 + 16t^{17}u^6 + 26t^{14}u^9 + 30t^{11}u^{12} + 23t^8u^{15} + 12t^5u^{18} + 3t^2u^{21} + t^{21}u + 7t^{18}u^4 + 19t^{15}u^7 + 26t^{12}u^{10} + \\
& 24t^9u^{13} + 16t^6u^{16} + 4t^3u^{19} + 3t^{19}u^2 + 12t^{16}u^5 + 22t^{13}u^8 + 25t^{10}u^{11} + 19t^7u^{14} + 9t^4u^{17} + tu^{20} + 5t^{17}u^3 + 16t^{14}u^6 + 20t^{11}u^9 + \\
& 19t^8u^{12} + 11t^5u^{15} + 3t^2u^{18} + 2t^{18}u + 9t^{15}u^4 + 18t^{12}u^7 + 20t^9u^{10} + 16t^6u^{13} + 6t^3u^{16} + 3t^{16}u^2 + 11t^{13}u^5 + 15t^{10}u^8 + 14t^7u^{11} + \\
& 8t^4u^{14} + 2tu^{17} + t^{17} + 6t^{14}u^3 + 15t^{11}u^6 + 16t^8u^9 + 12t^5u^{12} + t^2u^{15} + t^{15}u + 7t^{12}u^4 + 11t^9u^7 + 10t^6u^{10} + 5t^3u^{13} + 4t^{13}u^2 + \\
& 10t^{10}u^5 + 11t^7u^8 + 8t^4u^{11} + 2tu^{14} + 4t^{11}u^3 + 8t^8u^6 + 7t^5u^9 + 3t^2u^{12} + 2t^{12}u + 7t^9u^4 + 8t^6u^7 + 5t^3u^{10} + u^{13} + 2t^{10}u^2 + \\
& 5t^7u^5 + 4t^4u^8 + tu^{11} + 4t^8u^3 + 5t^5u^6 + 3t^2u^9 + t^9u + 2t^6u^4 + 2t^3u^7 + 3t^7u^2 + 4t^4u^5 + 2tu^8 + t^5u^3 + t^6u + 2t^3u^4 + u^7 + t^5 + t^2u^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_2 &= t^{29}u^{30} + t^{28}u^{29} + t^{30}u^{25} + t^{27}u^{28} + t^{25}u^{29} + t^{29}u^{24} + 2t^{26}u^{27} + t^{27}u^{25} + t^{24}u^{28} + 2t^{28}u^{23} + 4t^{25}u^{26} + t^{22}u^{29} + \\
& t^{29}u^{21} + 2t^{26}u^{24} + 2t^{23}u^{27} + t^{30}u^{19} + 4t^{27}u^{22} + 6t^{24}u^{25} + 3t^{21}u^{28} + 2t^{28}u^{20} + 4t^{25}u^{23} + 4t^{22}u^{26} + t^{19}u^{29} + t^{29}u^{18} + 7t^{26}u^{21} + \\
& 9t^{23}u^{24} + 5t^{20}u^{27} + 4t^{27}u^{19} + 7t^{24}u^{22} + 7t^{21}u^{25} + 2t^{18}u^{28} + 3t^{28}u^{17} + 10t^{25}u^{20} + 12t^{22}u^{23} + 8t^{19}u^{26} + t^{16}u^{29} + t^{29}u^{15} + \\
& 7t^{26}u^{18} + 11t^{23}u^{21} + 11t^{20}u^{24} + 5t^{17}u^{27} + 6t^{27}u^{16} + 14t^{24}u^{19} + 16t^{21}u^{22} + 11t^{18}u^{25} + 4t^{15}u^{28} + 3t^{12}u^{31} + 10t^{25}u^{17} + \\
& 15t^{22}u^{20} + 15t^{19}u^{23} + 8t^{16}u^{26} + t^{29}u^{12} + 9t^{26}u^{15} + 18t^{23}u^{18} + 20t^{20}u^{21} + 15t^{17}u^{24} + 6t^{14}u^{27} + t^{11}u^{30} + 5t^{27}u^{13} + 15t^{24}u^{16} + \\
& 20t^{21}u^{19} + 20t^{18}u^{22} + 11t^{15}u^{25} + 2t^{12}u^{28} + 4t^{17}u^{11} + 12t^{25}u^{14} + 23t^{22}u^{17} + 26t^{19}u^{20} + 20t^{16}u^{23} + 9t^{13}u^{26} + 2t^{10}u^{29} + \\
& t^{29}u^9 + 7t^{26}u^{12} + 19t^{23}u^{15} + 25t^{20}u^{18} + 24t^{17}u^{21} + 15t^{14}u^{24} + 4t^{11}u^{27} + 5t^{27}u^{10} + 15t^{24}u^{13} + 26t^{21}u^{16} + 30t^{18}u^{19} + \\
& 23t^{15}u^{22} + 11t^{12}u^{25} + 3t^9u^{28} + t^{28}u^8 + 9t^{25}u^{11} + 22t^{22}u^{14} + 30t^{19}u^{17} + 29t^{16}u^{20} + 18t^{13}u^{23} + 5t^{10}u^{26} + t^{29}u^6 + 7t^{26}u^9 + \\
& 18t^{23}u^{12} + 31t^{20}u^{15} + 36t^{17}u^{18} + 26t^{14}u^{21} + 14t^{11}u^{24} + 4t^8u^{27} + t^{5u^{30}} + 2t^{27}u^7 + 11t^{24}u^{10} + 24t^{21}u^{13} + 36t^{18}u^{16} + \\
& 33t^{15}u^{19} + 20t^{12}u^{22} + 7t^9u^{25} + t^6u^{28} + 2t^{28}u^5 + 8t^{25}u^8 + 19t^{22}u^{11} + 33t^{19}u^{14} + 39t^{16}u^{17} + 28t^{13}u^{20} + 15t^{10}u^{23} + 5t^7u^{26} + \\
& t^4u^{29} + 2t^{26}u^6 + 11t^{23}u^9 + 25t^{20}u^{12} + 38t^{17}u^{15} + 36t^{14}u^{18} + 20t^{11}u^{21} + 7t^8u^{24} + t^5u^{27} + t^{30}u + 2t^{27}u^4 + 9t^{24}u^7 + 20t^{21}u^{10} + \\
& 36t^{18}u^{13} + 41t^{15}u^{16} + 30t^{12}u^{19} + 16t^9u^{22} + 6t^6u^{25} + t^3u^{28} + 3t^{25}u^5 + 12t^{22}u^8 + 26t^{19}u^{11} + 40t^{16}u^{14} + 38t^{13}u^{17} + 21t^{10}u^{20} + \\
& 8t^7u^{23} + t^4u^{26} + tu^{29} + t^{29} + 2t^{26}u^3 + 9t^{23}u^6 + 20t^{20}u^9 + 36t^{17}u^{12} + 41t^{14}u^{15} + 30t^{11}u^{18} + 16t^8u^{21} + 6t^5u^{24} + t^2u^{27} + 2t^{24}u^4 + \\
& 11t^{21}u^7 + 25t^{18}u^{10} + 38t^{15}u^{13} + 36t^{12}u^{16} + 20t^9u^{19} + 7t^6u^{22} + t^3u^{25} + 2t^{25}u^2 + 8t^{22}u^5 + 19t^{19}u^8 + 33t^{16}u^{11} + 39t^{13}u^{14} + \\
& 28t^{10}u^{17} + 15t^7u^{20} + 5t^4u^{23} + tu^{26} + 2t^{23}u^3 + 11t^{20}u^6 + 24t^{17}u^9 + 36t^{14}u^{12} + 33t^{11}u^{15} + 20t^8u^{18} + 7t^5u^{21} + t^2u^{24} + t^{24}u + \\
& 7t^{21}u^4 + 18t^{18}u^7 + 31t^{15}u^{10} + 36t^{12}u^{13} + 26t^9u^{16} + 14t^6u^{19} + 4t^3u^{22} + u^{25} + t^{22}u^2 + 9t^{19}u^5 + 22t^{16}u^8 + 30t^{13}u^{11} + 29t^{10}u^{14} + \\
& 18t^7u^{17} + 5t^4u^{20} + 5t^{20}u^3 + 15t^{17}u^6 + 26t^{14}u^9 + 30t^{11}u^{12} + 23t^8u^{15} + 11t^5u^{18} + 3t^2u^{21} + t^{21}u + 7t^{18}u^4 + 19t^{15}u^7 + 25t^{12}u^{10} + \\
& 24t^9u^{13} + 15t^6u^{16} + 4t^3u^{19} + 4t^{19}u^2 + 12t^{16}u^5 + 23t^{13}u^8 + 26t^{10}u^{11} + 20t^7u^{14} + 9t^4u^{17} + 2tu^{20} + 5t^{17}u^3 + 15t^{14}u^6 + 20t^{11}u^9 + \\
& 20t^8u^{12} + 11t^5u^{15} + 2t^2u^{18} + t^{18}u + 9t^{15}u^4 + 18t^{12}u^7 + 20t^9u^{10} + 15t^6u^{13} + 6t^3u^{16} + u^{19} + 3t^{16}u^2 + 10t^{13}u^5 + 15t^{10}u^8 + \\
& 15t^7u^{11} + 8t^4u^{14} + 6t^{14}u^3 + 14t^{11}u^6 + 16t^8u^9 + 11t^5u^{12} + 4t^2u^{15} + t^{15}u + 7t^{12}u^4 + 11t^9u^7 + 11t^6u^{10} + 5t^3u^{13} + 3t^{13}u^2 + \\
& 10t^{10}u^5 + 12t^7u^8 + 8t^4u^{11} + tu^{14} + 4t^{11}u^3 + 7t^8u^6 + 7t^5u^9 + 2t^2u^{12} + t^{12}u + 7t^9u^4 + 9t^6u^7 + 5t^3u^{10} + 2t^{10}u^2 + 4t^7u^5 + 4t^4u^8 + \\
& tu^{11} + t^{11} + 4t^8u^3 + 6t^5u^6 + 3t^2u^9 + t^9u + 2t^6u^4 + 2t^3u^7 + 2t^7u^2 + 4t^4u^5 + tu^8 + t^5u^3 + t^2u^6 + t^6u + 2t^3u^4 + tu^5 + t^5 + t^2u^3 + tu^2 + u
\end{aligned}$$

$$M_L(t, u)_3 = M_L(u, t)_2$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_4 &= t^{28}u^{27} + t^{25}u^{30} + t^{30}u^{23} + 2t^{27}u^{26} + t^{24}u^{29} + t^{25}u^{27} + 2t^{29}u^{22} + 4t^{26}u^{25} + 3t^{23}u^{28} + 2t^{27}u^{23} + 2t^{24}u^{26} + \\
& t^{21}u^{29} + 3t^{28}u^{21} + 5t^{25}u^{24} + 4t^{22}u^{27} + t^{29}u^{19} + 4t^{26}u^{22} + 5t^{23}u^{25} + 2t^{20}u^{28} + t^{30}u^{17} + 5t^{27}u^{20} + 8t^{24}u^{23} + 7t^{21}u^{26} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2t^{18}u^{29} + 3t^{28}u^{18} + 7t^{25}u^{21} + 8t^{22}u^{24} + 4t^{19}u^{27} + 2t^{29}u^{16} + 8t^{26}u^{19} + 11t^{23}u^{22} + 10t^{20}u^{25} + 4t^{17}u^{28} + 5t^{27}u^{17} + 10t^{24}u^{20} + \\
& 11t^{21}u^{23} + 7t^{18}u^{26} + t^{15}u^{29} + 4t^{28}u^{15} + 12t^{25}u^{18} + 16t^{22}u^{21} + 15t^{19}u^{24} + 6t^{16}u^{27} + t^{13}u^{30} + 2t^{29}u^{13} + 8t^{26}u^{16} + 14t^{23}u^{19} + \\
& 15t^{20}u^{22} + 11t^{17}u^{25} + 3t^{14}u^{28} + 6t^{27}u^{14} + 16t^{24}u^{17} + 20t^{21}u^{20} + 18t^{18}u^{23} + 9t^{15}u^{26} + 2t^{12}u^{29} + 3t^{28}u^{12} + 11t^{25}u^{15} + \\
& 19t^{22}u^{18} + 20t^{19}u^{21} + 16t^{16}u^{24} + 5t^{13}u^{27} + t^{29}u^{10} + 9t^{26}u^{13} + 19t^{23}u^{16} + 25t^{20}u^{19} + 22t^{17}u^{22} + 12t^{14}u^{25} + 3t^{11}u^{28} + \\
& 4t^{27}u^{11} + 16t^{24}u^{14} + 24t^{21}u^{17} + 26t^{18}u^{20} + 19t^{15}u^{23} + 7t^{12}u^{26} + t^{29}u^{9} + 3t^{28}u^{12} + 12t^{25}u^{15} + 23t^{22}u^{18} + 30t^{19}u^{21} + \\
& 26t^{16}u^{24} + 16t^{13}u^{27} + 5t^{10}u^{30} + t^{27}u^{30} + 5t^{26}u^{10} + 17t^{23}u^{13} + 29t^{20}u^{16} + 31t^{17}u^{19} + 22t^{14}u^{22} + 8t^{11}u^{25} + t^{28}u^{28} + t^{30}u^5 + \\
& 4t^{27}u^8 + 15t^{24}u^{11} + 26t^{21}u^{14} + 34t^{18}u^{17} + 31t^{15}u^{20} + 18t^{12}u^{23} + 7t^9u^{26} + t^{29}u^{29} + 7t^{25}u^9 + 19t^{22}u^{12} + 33t^{19}u^{15} + 35t^{16}u^{18} + \\
& 24t^{13}u^{21} + 10t^{10}u^{24} + 2t^7u^{27} + t^{29}u^4 + 5t^{26}u^7 + 16t^{23}u^{10} + 29t^{20}u^{13} + 38t^{17}u^{16} + 34t^{14}u^{19} + 20t^{11}u^{22} + 8t^8u^{25} + 2t^5u^{28} + \\
& t^{27}u^5 + 8t^{24}u^8 + 20t^{21}u^{11} + 35t^{18}u^{14} + 38t^{15}u^{17} + 26t^{12}u^{20} + 11t^9u^{23} + 2t^6u^{26} + t^{28}u^3 + 5t^{25}u^6 + 16t^{22}u^9 + 30t^{19}u^{12} + \\
& 41t^{16}u^{15} + 34t^{13}u^{18} + 20t^{10}u^{21} + 8t^7u^{24} + 2t^4u^{27} + t^{26}u^4 + 9t^{23}u^7 + 21t^{20}u^{10} + 35t^{17}u^{13} + 40t^{14}u^{16} + 27t^{11}u^{19} + 12t^8u^{22} + \\
& 3t^5u^{25} + t^{27}u^2 + 5t^{24}u^5 + 16t^{21}u^8 + 30t^{18}u^{11} + 41t^{15}u^{14} + 34t^{12}u^{17} + 20t^9u^{20} + 8t^6u^{23} + 2t^3u^{26} + t^{25}u^3 + 8t^{22}u^6 + \\
& 20t^{19}u^9 + 35t^{16}u^{12} + 38t^{13}u^{15} + 26t^{10}u^{18} + 11t^7u^{21} + 2t^4u^{24} + t^{26}u^7 + 5t^{23}u^{10} + 16t^{20}u^{13} + 29t^{17}u^{16} + 38t^{14}u^{19} + 34t^{11}u^{22} + \\
& 20t^8u^{25} + 8t^5u^{28} + 2t^2u^{31} + 7t^{21}u^5 + 19t^{18}u^8 + 33t^{15}u^{11} + 35t^{12}u^{14} + 24t^9u^{17} + 10t^6u^{20} + 2t^3u^{23} + t^{25}u^3 + 4t^{22}u^6 + 15t^{19}u^9 + \\
& 26t^{16}u^{12} + 34t^{13}u^{15} + 31t^{10}u^{18} + 18t^7u^{21} + tu^{24} + 5t^{20}u^4 + 17t^{17}u^7 + 29t^{14}u^{10} + 31t^{11}u^{13} + 22t^8u^{16} + 8t^5u^{19} + \\
& t^2u^{22} + 3t^{21}u^2 + 12t^{18}u^5 + 23t^{15}u^8 + 30t^{12}u^{11} + 26t^9u^{14} + 16t^6u^{17} + 5t^3u^{20} + u^{23} + 4t^{19}u^3 + 16t^{16}u^6 + 24t^{13}u^9 + 26t^{10}u^{12} + \\
& 19t^7u^{15} + 7t^4u^{18} + tu^{21} + t^{20}u + 9t^{17}u^4 + 19t^{14}u^7 + 25t^{11}u^{10} + 22t^8u^{13} + 12t^5u^{16} + 3t^2u^{19} + 3t^{18}u^2 + 11t^{15}u^5 + 19t^{12}u^8 + \\
& 20t^9u^{11} + 16t^6u^{14} + 5t^{16}u^3 + 16t^{13}u^6 + 20t^{10}u^9 + 18t^7u^{12} + 9t^4u^{15} + 2t^{18}u^{18} + 2t^{17}u + 8t^{14}u^4 + 14t^{11}u^7 + 15t^8u^{10} + \\
& 11t^5u^{13} + 3t^2u^{16} + 4t^{15}u^2 + 12t^{12}u^5 + 16t^9u^8 + 15t^6u^{11} + 6t^3u^{14} + u^{17} + 5t^{13}u^3 + 10t^{10}u^6 + 11t^7u^9 + 7t^4u^{12} + tu^{15} + \\
& 2t^{14}u + 8t^{11}u^4 + 11t^8u^7 + 10t^5u^{10} + 4t^2u^{13} + 3t^{12}u^2 + 7t^9u^5 + 8t^6u^8 + 4t^3u^{11} + t^{13} + 5t^{10}u^3 + 8t^7u^6 + 7t^4u^9 + 2tu^{12} + t^{11}u + \\
& 4t^8u^4 + 5t^5u^7 + 2t^2u^{10} + 3t^9u^2 + 5t^6u^5 + 4t^3u^8 + 2t^7u^3 + 2t^4u^6 + tu^9 + 2t^8u + 4t^5u^4 + 3t^2u^7 + t^3u^5 + t^7 + 2t^4u^3 + tu^6 + t^3u^2 + u^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_5 &= M_L(t, u)_6 = (t^{16}u^{16} + t^{18}u^{12} + 2t^{15}u^{15} + t^{12}u^{18} + 2t^{17}u^{11} + 4t^{14}u^{14} + 2t^{11}u^{17} - t^{18}u^9 - t^9u^{18} + 3t^{16}u^{10} + \\
& 6t^{13}u^{13} + 3t^{10}u^{16} + t^{18}u^6 + 5t^{15}u^9 + 7t^{12}u^{12} + 5t^9u^{15} + t^6u^{18} + t^{17}u^5 + 6t^{14}u^8 + 8t^{11}u^{11} + 6t^8u^{14} + t^5u^{17} + t^{12}u^9 + t^9u^{12} + \\
& 2t^{16}u^4 + 8t^{13}u^7 + 9t^{10}u^{10} + 8t^7u^{13} + 2t^4u^{16} + 2t^{15}u^3 + 7t^{12}u^6 + 8t^9u^9 + 7t^6u^{12} + 2t^3u^{15} + 2t^{14}u^2 + 8t^{11}u^5 + 9t^8u^8 + 8t^5u^{11} + \\
& 2t^2u^{14} + t^9u^6 + t^6u^9 + t^{13}u + 6t^{10}u^4 + 8t^7u^7 + 6t^4u^{10} + tu^{13} + t^{12} + 5t^9u^3 + 7t^6u^6 + 5t^3u^9 + u^{12} + 3t^8u^2 + 6t^5u^5 + 3t^2u^8 - t^9 - u^9 + \\
& 2t^7u + 4t^4u^4 + 2tu^7 + t^6 + 2t^3u^3 + u^6 + t^2u^2)(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)(u^8 - u^7 + u^5 - u^4 + u^3 - u + 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) \\
& (t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_7 &= (t^{24}u^{22} + t^{23}u^{21} + t^{20}u^{24} + 3t^{22}u^{20} + 2t^{19}u^{23} + t^{23}u^{18} + t^{20}u^{21} + 5t^{21}u^{19} + 3t^{18}u^{22} + 2t^{22}u^{17} + 3t^{19}u^{20} + \\
& t^{16}u^{23} + 2t^{23}u^{15} + 8t^{20}u^{18} + 6t^{17}u^{21} + t^{14}u^{24} + 5t^{21}u^{16} + 7t^{18}u^{19} + 3t^{15}u^{22} + 4t^{22}u^{14} + 12t^{19}u^{17} + 9t^{16}u^{20} + 2t^{13}u^{23} + \\
& t^{23}u^{12} + 8t^{20}u^{15} + 11t^{17}u^{18} + 6t^{14}u^{21} + t^{24}u^{10} + 6t^{21}u^{13} + 16t^{18}u^{16} + 13t^{15}u^{19} + 4t^{12}u^{22} + 3t^{22}u^{11} + 13t^{19}u^{14} + 16t^{16}u^{17} + \\
& 9t^{13}u^{20} + 2t^{10}u^{23} + 2t^{23}u^9 + 9t^{20}u^{12} + 18t^{17}u^{15} + 15t^{14}u^{18} + 6t^{11}u^{21} + 6t^{21}u^{10} + 17t^{18}u^{13} + 19t^{15}u^{16} + 13t^{12}u^{19} + \\
& 3t^9u^{22} + 3t^{22}u^8 + 12t^{19}u^{11} + 19t^{16}u^{14} + 17t^{13}u^{17} + 9t^{10}u^{20} + t^7u^{23} + t^{23}u^6 + 8t^{20}u^9 + 20t^{17}u^{12} + 21t^{14}u^{15} + 17t^{11}u^{18} + \\
& 5t^8u^{21} + t^{24}u^4 + 6t^{21}u^7 + 15t^{18}u^{10} + 21t^{15}u^{13} + 19t^{12}u^{16} + 13t^9u^{19} + 3t^6u^{22} + t^{22}u^5 + 10t^{19}u^8 + 21t^{16}u^{11} + 21t^{13}u^{14} + \\
& 18t^{10}u^{17} + 6t^7u^{20} + t^{23}u^3 + 8t^{20}u^6 + 18t^{17}u^9 + 22t^{14}u^{12} + 21t^{11}u^{15} + 16t^8u^{18} + 5t^5u^{21} + t^2u^{24} + t^{21}u^4 + 11t^{18}u^7 + \\
& 21t^{15}u^{10} + 20t^{12}u^{13} + 19t^9u^{16} + 7t^6u^{19} + 2t^{22}u^2 + 10t^{19}u^5 + 20t^{16}u^8 + 23t^{13}u^{11} + 22t^{10}u^{14} + 18t^7u^{17} + 6t^4u^{20} + tu^{23} + \\
& t^{20}u^3 + 11t^{17}u^6 + 21t^{14}u^9 + 20t^{11}u^{12} + 19t^8u^{15} + 7t^5u^{18} + t^{21}u + 8t^{18}u^4 + 18t^{15}u^7 + 22t^{12}u^{10} + 21t^9u^{13} + 16t^6u^{16} + \\
& 5t^3u^{19} + u^{22} + t^{19}u^2 + 10t^{16}u^5 + 21t^{13}u^8 + 21t^{10}u^{11} + 18t^7u^{14} + 6t^4u^{17} + t^{20} + 6t^{17}u^3 + 15t^{14}u^6 + 21t^{11}u^9 + 19t^8u^{12} + \\
& 13t^5u^{15} + 3t^2u^{18} + t^{18}u + 8t^{15}u^4 + 20t^{12}u^7 + 21t^9u^{10} + 17t^6u^{13} + 5t^3u^{16} + 3t^{16}u^2 + 12t^{13}u^5 + 19t^{10}u^8 + 17t^7u^{11} + \\
& 9t^4u^{14} + tu^{17} + 6t^{14}u^3 + 17t^{11}u^6 + 19t^8u^9 + 13t^5u^{12} + 3t^2u^{15} + 2t^{15}u + 9t^{12}u^4 + 18t^9u^7 + 15t^6u^{10} + 6t^3u^{13} + 3t^{13}u^2 + \\
& 3t^{10}u^5 + 16t^7u^8 + 9t^4u^{11} + 2tu^{14} + t^{14} + 6t^{11}u^3 + 16t^8u^6 + 13t^5u^9 + 4t^2u^{12} + t^{12}u + 8t^9u^4 + 11t^6u^7 + 6t^3u^{10} + 4t^{10}u^2 + \\
& 12t^7u^5 + 9t^4u^8 + 2tu^{11} + 5t^8u^3 + 7t^5u^6 + 3t^2u^9 + 2t^9u + 8t^6u^4 + 6t^3u^7 + u^{10} + 2t^7u^2 + 3t^4u^5 + tu^8 + 5t^5u^3 + 3t^2u^6 + \\
& t^6u + t^3u^4 + 3t^4u^2 + 2tu^5 + t^3u + u^4 + t^2)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$M_L(t, u)_8 = M_L(u, t)_7$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_9 &= (t^{16}u^{16} + t^{17}u^{14} + t^{14}u^{17} + 2t^{15}u^{15} + t^{16}u^{13} + t^{13}u^{16} + t^{14}u^{14} + t^{18}u^9 + 2t^{15}u^{12} + 2t^{12}u^{15} + t^9u^{18} + t^{16}u^{10} + \\
& 2t^{13}u^{13} + t^{10}u^{16} + t^{17}u^8 + 3t^{14}u^{11} + 3t^{11}u^{14} + t^8u^{17} + t^{12}u^{12} + t^{16}u^7 + 2t^{13}u^{10} + 2t^{10}u^{13} + t^7u^{16} + t^{17}u^5 + t^{14}u^8 + \\
& t^{11}u^{11} + t^8u^{14} + t^5u^{17} + 2t^{15}u^6 + 3t^{12}u^9 + 3t^9u^{12} + 2t^6u^{15} + 2t^{16}u^4 + 2t^{13}u^7 + 2t^{10}u^{10} + 2t^7u^{13} + 2t^4u^{16} + t^{14}u^5 + \\
& 2t^{11}u^8 + 2t^8u^{11} + t^5u^{14} + 2t^{15}u^3 + t^{12}u^6 + t^9u^9 + t^6u^{12} + 2t^3u^{15} + t^{13}u^4 + 2t^{10}u^7 + 2t^7u^{10} + t^4u^{13} + 2t^{14}u^2 + 2t^{11}u^5 + \\
& 2t^8u^8 + 2t^5u^{11} + 2t^2u^{14} + 2t^{12}u^3 + 3t^9u^6 + 3t^6u^9 + 2t^3u^{12} + t^{13}u + t^{10}u^4 + t^7u^7 + t^4u^{10} + tu^{13} + t^{11}u^2 + 2t^8u^5 + 2t^5u^8 + \\
& t^2u^{11} + t^6u^6 + t^{10}u + 3t^7u^4 + 3t^4u^7 + tu^{10} + t^8u^2 + 2t^5u^5 + t^2u^8 + t^9 + 2t^6u^3 + 2t^3u^6 + u^9 + t^4u^4 + t^5u^2 + t^2u^5 + 2t^3u^3 + \\
& t^4u + tu^4 + t^2u^2)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(u + 1)^2(u^2 - u + 1)^2(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_{10} &= (t^{17}u^{17} + t^{16}u^{16} - t^{17}u^{14} - t^{14}u^{17} + t^{18}u^{12} + 2t^{15}u^{15} + t^{12}u^{18} + t^{16}u^{13} + t^{13}u^{16} + 2t^{17}u^{11} + 5t^{14}u^{14} + \\
& 2t^{11}u^{17} - t^{18}u^9 - t^9u^{18} + t^{16}u^{10} + 2t^{13}u^{13} + t^{10}u^{16} - t^{14}u^{11} - t^{11}u^{14} + t^{18}u^6 + 4t^{15}u^9 + 4t^{12}u^{12} + 4t^9u^{15} + t^6u^{18} + \\
& 2t^{16}u^7 + 2t^{13}u^{10} + 2t^{10}u^{13} + 2t^7u^{16} + 3t^{14}u^8 + 4t^{11}u^{11} + 3t^8u^{14} - t^{12}u^9 - t^9u^{12} + t^{13}u^7 + 2t^{10}u^{10} + t^7u^{13} + t^{17}u^2 + \\
& 3t^{14}u^5 + t^{11}u^8 + t^8u^{11} + 3t^5u^{14} + t^2u^{17} + 2t^{15}u^3 + 4t^{12}u^6 + 5t^9u^9 + 4t^6u^{12} + 2t^3u^{15} + t^{16}u + 3t^{13}u^4 + t^{10}u^7 + t^7u^{10} + \\
& 3t^4u^{13} + tu^{16} + t^{11}u^5 + 2t^8u^8 + t^5u^{11} - t^9u^6 - t^6u^9 + 3t^{10}u^4 + 4t^7u^7 + 3t^4u^{10} + 2t^{11}u^2 + 2t^8u^5 + 2t^5u^8 + 2t^2u^{11} + t^{12} + \\
& 4t^9u^3 + 4t^6u^6 + 4t^3u^9 + u^{12} - t^7u^4 - t^4u^7 + t^8u^2 + 2t^5u^5 + t^2u^8 - t^9 - u^9 + 2t^7u + 5t^4u^4 + 2tu^7 + t^5u^2 + t^2u^5 + t^6 + \\
& 2t^3u^3 + u^6 - t^4u - tu^4 + t^2u^2 + tu)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(u + 1)^2(u^2 - u + 1)^2(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_{11} &= t^{28}u^{28} + t^{29}u^{26} + t^{26}u^{29} + t^{30}u^{24} + 3t^{27}u^{27} + t^{24}u^{30} + 2t^{28}u^{25} + 2t^{25}u^{28} + 3t^{29}u^{23} + 7t^{26}u^{26} + 3t^{23}u^{29} + t^{30}u^{21} + \\
& 6t^{27}u^{24} + 6t^{24}u^{27} + t^{21}u^{30} + 7t^{28}u^{22} + 12t^{25}u^{25} + 7t^{22}u^{28} + 3t^{29}u^{20} + 11t^{26}u^{23} + 11t^{23}u^{26} + 3t^{20}u^{29} + 2t^{30}u^{18} + 12t^{27}u^{21} + \\
& 19t^{24}u^{24} + 12t^{21}u^{27} + 2t^{18}u^{30} + 8t^{28}u^{19} + 20t^{25}u^{22} + 20t^{22}u^{25} + 8t^{19}u^{28} + 6t^{29}u^{17} + 20t^{26}u^{20} + 38t^{23}u^{23} + 20t^{20}u^{26} + \\
& 6t^{17}u^{29} + t^{30}u^{15} + 15t^{27}u^{18} + 29t^{24}u^{21} + 29t^{21}u^{24} + 15t^{18}u^{27} + t^{15}u^{30} + 11t^{28}u^{16} + 31t^{25}u^{19} + 29t^{22}u^{22} + 31t^{19}u^{25} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 11t^{16}u^{28} + 5t^{29}u^{14} + 24t^{26}u^{17} + 41t^{23}u^{20} + 41t^{20}u^{23} + 24t^{17}u^{26} + 5t^{14}u^{29} + 2t^{30}u^{12} + 18t^{27}u^{15} + 43t^{24}u^{18} + 52t^{21}u^{21} + \\
& 43t^{18}u^{24} + 18t^{15}u^{27} + 2t^{12}u^{30} + 10t^{28}u^{13} + 36t^{25}u^{16} + 54t^{22}u^{19} + 54t^{19}u^{22} + 36t^{16}u^{25} + 10t^{13}u^{28} + 4t^{29}u^{11} + 26t^{26}u^{14} + \\
& 55t^{23}u^{17} + 66t^{20}u^{20} + 55t^{17}u^{23} + 26t^{14}u^{26} + 4t^{11}u^{29} + t^{30}u^9 + 15t^{27}u^{12} + 47t^{24}u^{15} + 69t^{21}u^{18} + 69t^{18}u^{21} + 47t^{15}u^{24} + \\
& 15t^{12}u^{27} + t^9u^{30} + 8t^{28}u^{10} + 36t^{25}u^{13} + 67t^{22}u^{16} + 82t^{19}u^{19} + 67t^{16}u^{22} + 36t^{13}u^{25} + 8t^{10}u^{28} + 3t^{29}u^8 + 20t^{26}u^{11} + \\
& 57t^{23}u^{14} + 84t^{20}u^{17} + 84t^{17}u^{20} + 57t^{14}u^{23} + 20t^{11}u^{26} + 3t^8u^{29} + t^{30}u^6 + 12t^{27}u^9 + 43t^{24}u^{12} + 79t^{21}u^{15} + 96t^{18}u^{18} + \\
& 79t^{15}u^{21} + 43t^{12}u^{24} + 12t^9u^{27} + t^6u^{30} + 4t^{28}u^7 + 25t^{25}u^{10} + 63t^{22}u^{13} + 98t^{19}u^{16} + 98t^{16}u^{19} + 63t^{13}u^{22} + 25t^{10}u^{25} + \\
& 4t^7u^{28} + 2t^{29}u^5 + 16t^{26}u^8 + 49t^{23}u^{11} + 89t^{20}u^{14} + 108t^{17}u^{17} + 89t^{14}u^{20} + 49t^{11}u^{23} + 16t^8u^{26} + 2t^5u^{29} + 6t^{27}u^6 + 29t^{24}u^9 + \\
& 69t^{21}u^{12} + 108t^{18}u^{15} + 108t^{15}u^{18} + 69t^{12}u^{21} + 29t^9u^{24} + 6t^6u^{27} + 3t^{28}u^4 + 18t^{25}u^7 + 51t^{22}u^{10} + 95t^{19}u^{13} + 119t^{16}u^{16} + \\
& 95t^{13}u^{19} + 51t^{10}u^{22} + 18t^7u^{25} + 3t^4u^{28} + 7t^{26}u^5 + 31t^{23}u^8 + 72t^{20}u^{11} + 113t^{17}u^{14} + 113t^{14}u^{17} + 72t^{11}u^{20} + 31t^8u^{23} + \\
& 7t^5u^{26} + 3t^{27}u^3 + 19t^{24}u^6 + 52t^{21}u^9 + 96t^{18}u^{12} + 124t^{15}u^{15} + 96t^{12}u^{18} + 52t^9u^{21} + 19t^6u^{24} + 3t^3u^{27} + 7t^{25}u^4 + 31t^{22}u^7 + \\
& 72t^{19}u^{10} + 113t^{16}u^{13} + 113t^{13}u^{16} + 72t^{10}u^{19} + 31t^7u^{22} + 7t^4u^{25} + 3t^{26}u^2 + 18t^{23}u^5 + 51t^{20}u^8 + 95t^{17}u^{11} + 119t^{14}u^{14} + \\
& 95t^{11}u^{17} + 51t^8u^{20} + 18t^5u^{23} + 3t^2u^{26} + 6t^{24}u^3 + 29t^{21}u^6 + 69t^{18}u^9 + 108t^{15}u^{12} + 108t^{12}u^{15} + 69t^9u^{18} + 29t^6u^{21} + 6t^3u^{24} + \\
& 2t^{25}u + 16t^{22}u^4 + 49t^{19}u^7 + 89t^{16}u^{10} + 108t^{13}u^{13} + 89t^{10}u^{16} + 49t^7u^{19} + 16t^4u^{22} + 2tu^{25} + 4t^{23}u^2 + 25t^{20}u^5 + 63t^{17}u^8 + \\
& 98t^{14}u^{11} + 98t^{11}u^{14} + 63t^8u^{17} + 25t^5u^{20} + 4t^2u^{23} + t^{24} + 12t^{21}u^3 + 43t^{18}u^6 + 79t^{15}u^9 + 96t^{12}u^{12} + 79t^9u^{15} + 43t^6u^{18} + \\
& 12t^3u^{21} + u^{24} + 3t^{22}u + 20t^{19}u^4 + 57t^{16}u^7 + 84t^{13}u^{10} + 84t^{10}u^{13} + 57t^7u^{16} + 20t^4u^{19} + 3tu^{22} + 8t^{20}u^2 + 36t^{17}u^5 + 67t^{14}u^8 + \\
& 82t^{11}u^{11} + 67t^8u^{14} + 36t^5u^{17} + 8t^2u^{20} + t^{21} + 15t^{18}u^3 + 47t^{15}u^6 + 69t^{12}u^9 + 69t^9u^{12} + 47t^6u^{15} + 15t^3u^{18} + u^{21} + 4t^{19}u + \\
& 26t^{16}u^4 + 55t^{13}u^7 + 66t^{10}u^{10} + 55t^7u^{13} + 26t^4u^{16} + 4tu^{19} + 10t^{17}u^2 + 36t^{14}u^5 + 54t^{11}u^8 + 54t^8u^{11} + 36t^5u^{14} + 10t^2u^{17} + \\
& 2t^{18} + 18t^{15}u^3 + 43t^{12}u^6 + 52t^9u^9 + 43t^6u^{12} + 18t^3u^{15} + 2u^{18} + 5t^{16}u + 24t^{13}u^4 + 41t^{10}u^7 + 41t^7u^{10} + 24t^4u^{13} + 5tu^{16} + \\
& 11t^{14}u^2 + 31t^{11}u^5 + 39t^8u^8 + 31t^5u^{11} + 11t^2u^{14} + t^{15} + 15t^{12}u^3 + 29t^9u^6 + 29t^6u^9 + 15t^3u^{12} + u^{15} + 6t^{13}u + 20t^{10}u^4 + 28t^7u^7 + \\
& 20t^4u^{10} + 6tu^{13} + 8t^{11}u^2 + 20t^8u^5 + 20t^5u^8 + 8t^2u^{11} + 2t^{12} + 12t^9u^3 + 19t^6u^6 + 12t^3u^9 + 2u^{12} + 3t^{10}u + 11t^7u^4 + 11t^4u^7 + \\
& 3tu^{10} + 7t^8u^2 + 12t^5u^5 + 7t^2u^8 + t^9 + 6t^6u^3 + 6t^3u^6 + u^9 + 3t^7u + 7t^4u^4 + 3tu^7 + 2t^5u^2 + 2t^2u^5 + t^6 + 3t^3u^3 + u^6 + t^4u + tu^4 + t^2u^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_{12} = & t^{29}u^{27} + t^{26}u^{30} + t^{27}u^{28} + 3t^{28}u^{26} + 2t^{25}u^{29} + t^{29}u^{24} + 3t^{26}u^{27} + 2t^{30}u^{22} + 6t^{27}u^{25} + 5t^{24}u^{28} + 4t^{28}u^{23} + \\
& 7t^{25}u^{26} + 3t^{22}u^{29} + 4t^{29}u^{21} + 11t^{26}u^{24} + 9t^{23}u^{27} + t^{20}u^{30} + t^{30}u^{19} + 9t^{27}u^{22} + 13t^{24}u^{25} + 6t^{21}u^{28} + 8t^{28}u^{20} + 18t^{25}u^{23} + \\
& 16t^{22}u^{26} + 4t^{19}u^{29} + 5t^{29}u^{18} + 16t^{26}u^{21} + 22t^{23}u^{24} + 12t^{20}u^{27} + 2t^{17}u^{30} + 2t^{30}u^{16} + 15t^{27}u^{19} + 27t^{24}u^{22} + 25t^{21}u^{25} + \\
& 10t^{18}u^{28} + 10t^{28}u^{17} + 25t^{25}u^{20} + 31t^{22}u^{23} + 20t^{19}u^{26} + 5t^{16}u^{29} + 5t^{29}u^{15} + 24t^{26}u^{18} + 38t^{23}u^{21} + 36t^{20}u^{24} + 17t^{17}u^{27} + \\
& 2t^{14}u^{30} + 2t^{30}u^{13} + 17t^{27}u^{16} + 37t^{24}u^{19} + 43t^{21}u^{22} + 32t^{18}u^{25} + 10t^{15}u^{28} + 11t^{28}u^{14} + 36t^{25}u^{17} + 51t^{22}u^{20} + 49t^{19}u^{23} + \\
& 26t^{16}u^{26} + 6t^{13}u^{29} + 5t^{29}u^{12} + 25t^{26}u^{15} + 50t^{23}u^{18} + 56t^{20}u^{21} + 44t^{17}u^{24} + 17t^{14}u^{27} + t^{11}u^{30} + t^{30}u^{10} + 17t^{27}u^{13} + \\
& 47t^{24}u^{16} + 65t^{21}u^{19} + 61t^{18}u^{22} + 37t^{15}u^{25} + 10t^{12}u^{28} + 8t^{28}u^{11} + 36t^{25}u^{14} + 63t^{22}u^{17} + 72t^{19}u^{20} + 57t^{16}u^{23} + 24t^{13}u^{26} + \\
& 3t^{10}u^{29} + 4t^{29}u^9 + 24t^{26}u^{12} + 59t^{23}u^{15} + 80t^{20}u^{18} + 75t^{17}u^{21} + 47t^{14}u^{24} + 15t^{11}u^{27} + 2t^8u^{30} + 12t^{27}u^{10} + 44t^{24}u^{13} + \\
& 77t^{21}u^{16} + 88t^{18}u^{19} + 67t^{15}u^{22} + 32t^{12}u^{25} + 6t^9u^{28} + 7t^{28}u^{11} + 31t^{25}u^{14} + 67t^{22}u^{17} + 95t^{19}u^{20} + 55t^{16}u^{23} + \\
& 20t^{10}u^{26} + 3t^7u^{29} + t^{29}u^6 + 16t^{26}u^9 + 50t^{23}u^{12} + 89t^{20}u^{15} + 101t^{17}u^{18} + 77t^{14}u^{21} + 37t^{11}u^{24} + 9t^8u^{27} + t^{30}u^4 + 9t^{27}u^7 + \\
& 36t^{24}u^{10} + 75t^{21}u^{13} + 107t^{18}u^{16} + 101t^{15}u^{19} + 61t^{12}u^{22} + 25t^9u^{25} + 5t^6u^{28} + 2t^{28}u^5 + 20t^{25}u^8 + 54t^{22}u^{11} + 98t^{19}u^{14} + \\
& 113t^{16}u^{17} + 84t^{13}u^{20} + 41t^{10}u^{23} + 11t^7u^{26} + t^4u^{29} + t^{29}u^3 + 11t^{26}u^6 + 38t^{23}u^9 + 80t^{20}u^{12} + 116t^{17}u^{15} + 107t^{14}u^{18} + \\
& 65t^{11}u^{21} + 27t^{28}u^{24} + 6t^{25}u^{27} + 3t^{27}u^4 + 22t^{24}u^7 + 56t^{21}u^{10} + 101t^{18}u^{13} + 121t^{15}u^{16} + 88t^{12}u^{19} + 43t^9u^{22} + 13t^6u^{25} + \\
& t^3u^{28} + t^{28}u^2 + 12t^{25}u^5 + 39t^{22}u^8 + 82t^{19}u^{11} + 119t^{16}u^{14} + 108t^{13}u^{17} + 66t^{10}u^{20} + 28t^7u^{23} + 7t^4u^{26} + 3t^{26}u^3 + 22t^{23}u^6 + \\
& 56t^{20}u^9 + 101t^{17}u^{12} + 121t^{14}u^{15} + 88t^{11}u^{18} + 43t^8u^{21} + 13t^5u^{24} + t^2u^{27} + t^{27}u + 11t^{24}u^4 + 38t^{21}u^7 + 80t^{18}u^{10} + 116t^{15}u^{13} + \\
& 107t^{12}u^{16} + 65t^9u^{19} + 27t^6u^{22} + 6t^3u^{25} + 2t^{25}u^2 + 20t^{22}u^5 + 54t^{19}u^8 + 98t^{16}u^{11} + 113t^{13}u^{14} + 84t^{10}u^{17} + 41t^7u^{20} + \\
& 11t^4u^{23} + tu^{26} + t^{26} + 9t^{23}u^3 + 36t^{20}u^6 + 75t^{17}u^9 + 107t^{14}u^{12} + 101t^{11}u^{15} + 61t^8u^{18} + 25t^5u^{21} + 5t^2u^{24} + t^{24}u + 16t^{21}u^4 + \\
& 50t^{18}u^7 + 89t^{15}u^{10} + 101t^{12}u^{13} + 77t^9u^{16} + 37t^6u^{19} + 9t^3u^{22} + 7t^{22}u^2 + 31t^{19}u^5 + 67t^{16}u^8 + 95t^{13}u^{11} + 89t^{10}u^{14} + 55t^7u^{17} + \\
& 20t^4u^{20} + 3t^{23}u + 12t^{20}u^3 + 44t^{17}u^6 + 77t^{14}u^9 + 88t^{11}u^{12} + 67t^8u^{15} + 32t^5u^{18} + 6t^2u^{21} + 4t^{21}u + 24t^{18}u^4 + 59t^{15}u^7 + \\
& 80t^{12}u^{10} + 75t^9u^{13} + 47t^6u^{16} + 15t^3u^{19} + 2u^{22} + 8t^{19}u^2 + 36t^{16}u^5 + 63t^{13}u^8 + 72t^{10}u^{11} + 57t^7u^{14} + 24t^4u^{17} + 3tu^{20} + t^{20} + \\
& 17t^{17}u^3 + 47t^{14}u^6 + 65t^{11}u^9 + 61t^8u^{12} + 37t^5u^{15} + 10t^2u^{18} + 5t^{18}u + 25t^{15}u^4 + 50t^{12}u^7 + 56t^9u^{10} + 44t^6u^{13} + 17t^3u^{16} + u^{19} + \\
& 11t^{16}u^2 + 36t^{13}u^5 + 51t^{10}u^8 + 49t^7u^{11} + 26t^4u^{14} + 6tu^{17} + 2t^{17} + 17t^{14}u^3 + 37t^{11}u^6 + 43t^8u^9 + 32t^5u^{12} + 10t^2u^{15} + 5t^{15}u + \\
& 24t^{12}u^4 + 38t^9u^7 + 36t^6u^{10} + 17t^3u^{13} + 2u^{16} + 10t^{13}u^2 + 25t^{10}u^5 + 31t^7u^8 + 20t^4u^{11} + 5tu^{14} + 2t^{14} + 15t^{11}u^3 + 27t^8u^6 + \\
& 25t^5u^9 + 10t^2u^{12} + 5t^{12}u + 16t^9u^4 + 22t^6u^7 + 12t^3u^{10} + 2u^{13} + 8t^{10}u^2 + 18t^7u^5 + 16t^4u^8 + 4tu^{11} + t^{11} + 9t^8u^3 + 13t^5u^6 + \\
& 6t^2u^9 + 4t^9u + 11t^6u^4 + 9t^3u^7 + u^{10} + 4t^7u^2 + 7t^4u^5 + 3tu^8 + 2t^8 + 6t^5u^3 + 5t^2u^6 + t^6u + 3t^3u^4 + 3t^4u^2 + 2tu^5 + t^2u^3 + t^3u + u^4
\end{aligned}$$

$$M_L(t, u)_{13} = M_L(u, t)_{12}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_{14} = & (t^{12}u^9 + t^9u^{12} + 2t^{11}u^8 + 2t^8u^{11} - t^{12}u^6 - t^6u^{12} + 5t^{10}u^7 + 5t^7u^{10} + t^{12}u^3 + 7t^9u^6 + 7t^6u^9 + t^3u^{12} + \\
& t^{11}u^2 + 10t^8u^5 + 10t^5u^8 + t^2u^{11} + 4t^6u^6 + t^{10}u + 10t^7u^4 + 10t^4u^7 + tu^{10} + t^9 + 7t^6u^3 + 7t^3u^6 + u^9 + 5t^5u^2 + 5t^2u^5 - \\
& t^6 - u^6 + 2t^4u + 2tu^4 + t^3 + u^3)(u^2 + 1)(u^4 - u^2 + 1)(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1) \\
& (u^8 - u^7 + u^5 - u^4 + u^3 - u + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_L(t, u)_{15} = & (t^{16}u^{17} + t^{17}u^{15} + t^{18}u^{13} + 3t^{15}u^{16} + 2t^{16}u^{14} + t^{13}u^{17} + 3t^{17}u^{12} + 6t^{14}u^{15} + 2t^{11}u^{18} + 4t^{15}u^{13} + 3t^{12}u^{16} + \\
& 6t^{16}u^{11} + 10t^{13}u^{14} + 3t^{10}u^{17} + t^{17}u^9 + 6t^{14}u^{12} + 4t^{11}u^{15} + 2t^{18}u^7 + 9t^{15}u^{10} + 14t^{12}u^{13} + 6t^9u^{16} + 3t^{16}u^8 + 8t^{13}u^{11} + \\
& 6t^{10}u^{14} + 2t^7u^{17} + 3t^{17}u^6 + 12t^{14}u^9 + 16t^{11}u^{12} + 9t^8u^{15} + t^5u^{18} + 4t^{15}u^7 + 9t^{12}u^{10} + 7t^9u^{13} + 3t^6u^{16} + 5t^{16}u^5 + \\
& 15t^{13}u^8 + 18t^{10}u^{11} + 12t^7u^{14} + 2t^4u^{17} + t^{17}u^3 + 6t^{14}u^6 + 10t^{11}u^9 + 9t^8u^{12} + 4t^5u^{15} + 6t^{15}u^4 + 16t^{12}u^7 + 18t^9u^{10} + \\
& 14t^6u^{13} + 3t^3u^{16} + t^{16}u^2 + 6t^{13}u^5 + 9t^{10}u^8 + 8t^7u^{11} + 4t^4u^{14} + 6t^{14}u^3 + 16t^{11}u^6 + 18t^8u^9 + 14t^5u^{12} + 3t^2u^{15} + t^{15}u + \\
& 6t^{12}u^4 + 10t^9u^7 + 9t^6u^{10} + 4t^3u^{13} + 5t^{13}u^2 + 15t^{10}u^5 + 18t^7u^8 + 12t^4u^{11} + 2tu^{14} + 4t^{11}u^3 + 9t^8u^6 + 7t^5u^9 + 3t^2u^{12} + \\
& 3t^{12}u + 12t^9u^4 + 16t^6u^7 + 9t^3u^{10} + u^{13} + 3t^{10}u^2 + 8t^7u^5 + 6t^4u^8 + 2tu^{11} + 2t^{11} + 9t^8u^3 + 14t^5u^6 + 6t^2u^9 + t^9u + \\
& 6t^6u^4 + 4t^3u^7 + 6t^7u^2 + 10t^4u^5 + 3tu^8 + 4t^5u^3 + 3t^2u^6 + 3t^6u + 6t^3u^4 + 2u^7 + 2t^4u^2 + tu^5 + t^5 + 3t^2u^3 + t^3u + \\
& tu^2)(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)(u^8 - u^7 + u^5 - u^4 + u^3 - u + 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) \\
& (t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1)
\end{aligned}$$

$$M_L(t, u)_{16} = M_L(u, t)_{15}$$

La série de Poincaré de l'anneau des invariants est

$$P_L(t, 0)_0 = P_L(0, t)_0 = \frac{-t^{30} + t^{15} - 1}{(t-1)^3(t^2+t+1)^3(t^2+1)(t^4-t^2+1)(t^4+t^3+t^2+t+1)(t^8-t^7+t^5-t^4+t^3-t+1)(t+1)^2(t^2-t+1)^2}.$$

Bibliographie

- [AF09] Jacques Alev and Loïc Foissy, *Le groupe des traces de Poisson de la variété quotient $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^* / W$ en rang 2*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 1, 368–388, arXiv :math/0603142.
- [AFLS00] Jacques Alev, Marco A. Farinati, Thierry Lambre, and Andrea L. Solotar, *Homologie des invariants d’une algèbre de Weyl sous l’action d’un groupe fini*, Journal of Algebra **232** (2000), 564–577.
- [AL98] Jacques Alev and Thierry Lambre, *Comparaison de l’homologie de Hochschild et de l’homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein*, Algebra and operator theory (Tashkent, 1997), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [AL99] ———, *Homologie des invariants d’une algèbre de Weyl*, K-Theory **18** (1999), 401–411.
- [AMA76] L. Abellanas and L. Martinez-Alonso, *Quantization from the algebraic viewpoint*, J. Math. Phys. **17** (1976), no. 8, 1363–1365.
- [AVGZ86] V. Arnold, A. Varchenko, and S. Goussein-Zadé, *Singularités des applications différentiables, première partie*, éditions Mir, Moscou, 1986.
- [Bar62] M. Barr, *Cohomology of commutative algebras*, Dissertation, U.Penn. (1962).
- [Bar68] ———, *Harrison homology, Hochschild homology and triples*, J.Algebra **8** (1968), 314–323.
- [BB82] W. Borho and J.-L. Brylinski, *Differential operators on homogeneous spaces I : irreducibility of the associated variety*, Inv. Math. **69** (1982), 437–476.
- [BCKT05] A. Bruguières, A. Cattaneo, B. Keller, and C. Torossian, *Déformation, Quantification, Théorie de Lie*, Panoramas et Synthèses, SMF, 2005.
- [BEG04] Yuri Berest, Pavel Etingof, and Victor Ginzburg, *Morita equivalence of Cherednik algebras*, J. Reine Angew. Math. **568** (2004), 81–98.
- [Ber75] F.A. Berezin, *General concept of quantization*, Commun. Math. Phys. **40** (1975), 153–174.

- [Bez95] R. Bezrukavnikov, *Koszul property and Frobenius splitting of Schubert varieties*, arXiv :alg-geom/9502021v1, 1995.
- [BF81] F. Bayen and C. Fronsdal, *Quantization on the sphere*, J. Math. Phys. **22** (1981), 1345–1349.
- [BFF⁺78] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization. I and II. Physical applications*, Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 61–110 and 111–151.
- [BGS88] A. Beilinson, V. Ginsburg, and V. Schechtman, *Koszul Duality*, J. Geom. Phys. **5** (1988), 317–350.
- [BJ98] A. Braverman and A. Joseph, *The minimal realization from Deformation Theory*, J. Algebra **205** (1998), 13–16.
- [BKR01] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 535–554.
- [Bli17] H. F. Blichfeldt, *Finite collineation groups*, The Univ. Chicago Press, Chicago, 1917.
- [Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Masson, Paris, 1981.
- [BP09] Frédéric Butin and Gadi S. Perets, *McKay correspondence and the branching law for finite subgroups of $\mathbf{SL}_3\mathbb{C}$* , arXiv :0909.0578, 2009.
- [Bry88] Jean-Luc Brylinsky, *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Differential Geometry **28** (1988), 93–114.
- [Bry98] R. Brylinski, *Geometric Quantization of Real Minimal Nilpotent Orbits, Symplectic geometry*, Differential Geom. Appl. **9** (1998), no. 1-2, 5–58, arXiv :math/9811033v1[math.SG].
- [But08a] Frédéric Butin, *Hochschild Cohomology of Klein Surfaces*, poster pour le colloque *Poisson 2008* à Lausanne en juillet 2008, 2008.
- [But08b] ———, *Hochschild Homology and Cohomology of Klein Surfaces*, SIGMA **4** (2008), 64–89, arXiv :0804.4324[math-ph].
- [But09] ———, *Poisson Homology in Degree 0 for some Rings of Symplectic Invariants*, Journal of Algebra **322** (2009), 3580–3613, arXiv :0809.4983[math-ph].
- [BZ91] B. Binegar and R. Zierau, *Unitarization of a singular representation of $\mathbf{SO}(p, q)$* , Commun. Math. Phys. **138** (1991), 245–258.
- [CBH98] W. Crawley-Boevey and M.P. Holland, *Noncommutative Deformations of Kleinian Singularities*, Duke Mathematical Journal **92** (1998), no. 3.
- [CCK99] L. Chiang, H. Chu, and M.C. Kang, *Generation of Invariants*, Journal of Algebra **221** (1999), no. 1, 232–241.
- [CGR96] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley, *On Tangential Star Products for the Coadjoint Poisson Structure*, Commun. Math. Phys. **180** (1996), 99–108.
- [CL04] A. Chambert-Loir, *Groupes et algèbres de Lie*, 2004.
- [CM93] D.H. Collingwood and W.M. McGovern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [DCP76] C. De Concini and C. Procesi, *A characteristic-free approach to invariant theory*, Adv. Math. **21** (1976), 330–354.

-
- [Del01] Jean Delcourt, *Théorie des groupes*, Dunod, Paris, 2001.
 - [DHZ06] D. I. Dais, M. Henk, and G. M. Ziegler, *On the Existence of Crepant Resolutions of Gorenstein Abelian Quotient Singularities in Dimensions 4*, arXiv :math/0512619v2 [math.AG], 2006.
 - [Dir26] P. A. M. Dirac, *On the theory of quantum mechanics*, Proceedings of the Royal Society A **112** (1926), 661–677.
 - [Dix74] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars Editeur, Paris, 1974.
 - [DL83] M. DeWilde and P. B. A. Lecomte, *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. **6** (1983), 487–496.
 - [Duf77] M. Duflo, *Sur la classification des idéaux primitifs dans l’algèbre enveloppante d’une algèbre de Lie semi-simple*, Ann. of Math. **105** (1977), 107–120.
 - [EM53] S. Eilenberg and S. MacLane, *On the groups $H(\pi, n)$, I*, Ann. Math. **58** (1953), 55–106.
 - [ES09] Pavel Etingof and Travis Schedler, *Zeroth Poisson Homology of Symmetric Powers of Isolated Quasihomogeneous Surface Singularities*, arXiv :0907.1715v1 [math.SG], 2009.
 - [Fed94] B.V. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Diff. Geom. **40** (1994), 213–238.
 - [Fer04] D. Ferrand, *Représentations linéaires des groupes finis — Une introduction*, <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.ferrand/RepFinal.pdf>, 2004.
 - [Fer05] ———, *Note sur les polynômes à plusieurs indéterminées*, 2005.
 - [FG99] C. Frønsdal and A. Galindo, *The ideals of free differential algebras*, J. Algebra **222** (1999), 708–746, arXiv :math/9806069v2 [math.QA].
 - [FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation Theory : A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1991.
 - [FK07] C. Frønsdal and M. Kontsevich, *Quantization on Curves*, Lett. Math. Phys. **79** (2007), 109–129, math-ph/0507021.
 - [FL01] R. Fiorese and M.A. Lledo, *On the deformation quantization of coadjoint orbits of semisimple Lie groups*, Pacific. J. Math. **198** (2001), no. 2, 411–436.
 - [FL02] ———, *A Comparison between Star Products on Regular Orbits of Compact Lie Groups*, J. Phys. A **35** (2002), 5687–5700, arXiv :math/0106129v3 [math.QA].
 - [Fle71] P.J. Fleury, *Splittings of Hochschild’s complex for commutative algebras*, Proc. AMS **30** (1971), 405–323.
 - [FLL02] R. Fiorese, A. Levvero, and M.A. Lledo, *Algebraic and Differential Star Products on Regular Orbits of Compact Lie Groups*, Pacific J. Math. **206** (2002), 321–337, arXiv :math/0011172v2 [math.QA].
 - [FLS74] M. Flato, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, *Déformations 1-différentiables d’algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A **279** (1974), 877–881.
 - [FLS76] ———, *Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications*, J. Math. Phys. **17** (1976), 1754–1762.

- [FLV05] R. Fioresi, M.A. Lledo, and V.S. Varadarajan, *On the deformation quantization of affine algebraic varieties*, Int. J. Math. **16** (2005), 419–436, arXiv :math/0406196v1 [math.QA].
- [FRB09] Christian Frønsdal, Claude Roger, and Frédéric Butin, *Deformation Quantization on the Closure of Minimal Coadjoint Orbits*, Lett. Math. Phys. **88** (2009), 271–320.
- [Fre02] Benoît Fresse, *Structures de Poisson sur une intersection complète à singularités isolées*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), no. 1, 5–10.
- [Frø78] C. Frønsdal, *Some ideas about quantization*, Rep. Math. Phys. **15** (1978), 111–145.
- [Frø01] ———, *Abelian Deformations, Proceedings of the IX'th International Conference on Symmetry Methods in Physics*, July 2001, Yerevan.
- [Frø02] ———, *Harrison Cohomology and Abelian Deformation Quantization on Algebraic Varieties, Deformation quantization*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **1** (2002), 149–161, de Gruyter, Berlin, arXiv :hep-th/0109001v3.
- [Gar90] A.M. Garsia, *Combinatorics of the free Lie algebra and the symmetric group*, Analysis, et cetera, Research Papers Published in Honor of Jürgen Moser's 60'th Birthday (1990), 209–362, Academic Press, New York.
- [Ger63] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Annals of Math. (2) **78** (1963), 267–288.
- [Ger64] ———, *On the deformations of rings and algebras*, Annals of Math. **79** (1964), 59–103.
- [Ger99] ———, *Developments from Barr's thesis, presented at the celebration of the 60'th birthday of Michael Barr*, J.Pure Appl. Algebra **143** (1999), 205–220.
- [GK04] Sudhir R. Ghorpade and Christian Krattenthaler, *The Hilbert Serie of Pfaffien Rings*, 2004, Springer, Berlin, pp. 337–356.
- [GNS04] Y. Gomi, I. Nakamura, and K. Shinoda, *Coinvariant Algebras of Finite Subgroups of $SL_3\mathbb{C}$* , Canad. J. Math. **56** (2004), no. 3, 495–528.
- [GRS07] Laurent Guieu, Claude Roger, and Vlad Sergiescu, *L'Algèbre et le Groupe de Virasoro : aspects géométriques et algébriques, généralisations*, Monographies, notes de cours et Actes de conférences, no. PM28, Centre de Recherches Mathématiques de Montréal, 2007.
- [GS87] M. Gerstenhaber and S.D. Schack, *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure and Applied Algebra **48** (1987), 229–247.
- [GS04] W. T. Gan and G. Savin, *Uniqueness of the Joseph ideal*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 589–597.
- [GSV83] G. Gonzalez-Sprinberg and J.-L. Verdier, *Construction géométrique de la correspondance de McKay*, Annales scientifiques de l'E. N. S., 4ème série **16** (1983), no. 3, 409–449.
- [Gut83] S. Gutt, *An explicit star-product on the cotangent bundle of a Lie group*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), 249–258.
- [GW00] Claude Gasquet and Patrick Witomski, *Analyse de Fourier et applications*, Dunod, Paris, 2000.
- [GW08] S. Gukov and E. Witten, *Branes and Quantization*, arXiv :0809.0305v2[hep-th], 2008.

-
- [Har62] D.K. Harrison, *Commutative algebras and cohomology*, Trans. Am. Math. Soc. **104** (1962), 191–204.
 - [HH98] A. Hanany and Y.-H. He, *Non-Abelian Gauge Theories*, arXiv :hep-th/9811183v3, 1998.
 - [HKR62] G. Hochschild, B. Kostant, and A. Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 383–408.
 - [HOT08] G. Halbout, J.-M. Oudom, and X. Tang, *Deformations of Linear Poisson Orbifolds*, arXiv :0807.0027v1[math.QA], 2008.
 - [HT06] G. Halbout and X. Tang, *Noncommutative Poisson Structures on Orbifolds*, arXiv :math/0606436v2[math.QA], 2006.
 - [Hum72] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 1972.
 - [IR96] Yukari Ito and Miles Reid, *The McKay Correspondence for finite Subgroups of $\mathbf{SL}(3, \mathbb{C})$* , arXiv :alg-geom/9411010v2, 1996.
 - [Ito94] Y. Ito, *Crepant Resolution of Trihedral Singularities*, arXiv :alg-geom/9404008v1, 1994.
 - [Jos74] A. Joseph, *Minimal Realizations and Spectrum Generating Algebras*, Commun. math. Phys. **36** (1974), 325–338.
 - [Jos76] ———, *The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **9** (1976), 1–30.
 - [Jos79] ———, *Dixmier’s problem for Verma and principal series submodules*, J. London Math. Soc. **20** (1979), 193–204.
 - [Jos85] ———, *On the associated variety of a primitive ideal*, J. Alg. **93** (1985), 509–523.
 - [Kac83] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Birkhäuser, 1983.
 - [Kir74] A.A. Kirillov, *Eléments de la Théorie des Représentations*, Editions Mir, Moscou, 1974.
 - [Kir04] ———, *Lectures on the Orbit Method*, Graduates Studies in Mathematics, vol. 64, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.
 - [Kle72] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen*, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der Universität zu Erlangen, A. Deichert, Erlangen, 1872.
 - [Kon99] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys. **48** (1999), 35–72, arXiv :math/9904055v1 [math.QA].
 - [Kon01] ———, *Deformation Quantization of algebraic varieties, Euro Conference Moshé Flato 2000, Part III (Dijon)*, Lett. Math. Phys. **56** (2001), 271–294, arXiv :math/0106006v1 [math.AG].
 - [Kon03] ———, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), 157–216, Preprint IHES (1997), arXiv :q-alg/9709040v1.
 - [Kos63] B. Kostant, *Lie Group Representations on Polynomial Rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404.

- [Kos70] ———, *Quantization and unitary representations, Lectures in Modern Analysis and Applications III*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 170, Springer-Verlag, Berlin, 1970, pp. 87–208.
- [Kos85] ———, *The McKay Correspondence, the Coxeter Element and Representation Theory*, SMF, Astérisque, hors série (1985), 209–255.
- [Kos06] ———, *The Coxeter element and the branching law for the finite subgroups of $\mathbf{SU}(2)$* , 2006, arXiv :math/0411142v1 [math.RT].
- [KR84] J. P. S. Kung and G.-C. Rota, *The invariant theory of bilinear forms*, Bull. Am. Math. Soc. **10** (1984), 27–85.
- [KS05] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et symétries*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005.
- [Lle01] M.A. Lledo, *Deformation Quantization of Non Regular Orbits of Compact Lie Groups*, Lett. Math. Phys. **58** (2001), 57–67, arXiv :math/0105191v3 [math.QA].
- [Lod89] J.-L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. math. **96** (1989), 205–230.
- [Lod94] ———, *Série de Hausdorff, idempotents Eulériens et algèbres de Hopf*, Expositiones Mathematicae **12** (1994), 165–178.
- [Lod98] ———, *Cyclic homology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [Mas04] Thierry Masson, *Introduction à l'homologie et à la cohomologie, avec exemples*, http://www.th.u-psud.fr/page_perso/Masson/TELECHARGEMENTS/courshomologie-2x1.pdf, 2004.
- [McK99] J. McKay, *Semi-Affine Coxeter-Dynkin Graphs and $G \subseteq \mathbf{SU}_2\mathbb{C}$* , Canad. J. Math. **51** (1999), no. 6, 1226–1229.
- [Mne06] Rached Mneimné, *Réduction des endomorphismes*, Calvage et Mounet, Paris, 2006.
- [Mon02] Philippe Monnier, *Poisson cohomology in dimension two*, Israel J. Math. **129** (2002), 189–207.
- [Moy49] J.E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949), 99–124.
- [MP04] J.A. Macfarlane and H. Pfeiffer, *Development of a unified tensor calculus for exceptional lie algebras*, Int. J. Mod. Phys. **19** (2004), 287–316, arXiv :math-ph/0212047v1.
- [MR99] J.E. Marsden and T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry, second edition*, Springer, 1999.
- [Pic05] Anne Pichereau, *Cohomologie de Poisson en dimension trois*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **340** (2005).
- [Pic06] ———, *Poisson (co)homology and isolated singularities*, Journal of Algebra **299** (2006), no. 2, 747–777.
- [Pin07] Georges Pinczon, *On Two Theorems about Symplectic Reflection Algebras*, Lett. Math. Phys. **82** (2007), 237–253.
- [Pos82] M. Postnikov, *Leçons de Géométrie, Groupes et Algèbres de Lie*, Editions Mir, Moscou, 1982.

-
- [Rau00] G. Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*, Editions Ellipses, 2000.
 - [REGT90] C. Roger, M. El Galiou, and A. Tihami, *Une cohomologie pour les algèbres de Lie de Poisson quadratiques*, Publ. Dépt. Maths. Univ. Claude Bernard - Lyon I (1990).
 - [Rei02] M. Reid, *La correspondance de McKay*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. Astérisque **276** (2002), 53–72.
 - [Roa96] S.-S. Roan, *Minimal resolutions of Gorenstein orbifolds in dimension three*, Topology **35** (1996), 489–508.
 - [Rob02] H. Robbins, *Invariant and Covariant Rings of Finite Pseudo-Reflection Groups*, <http://people.reed.edu/~davidp/homepage/seniors/robbins.pdf> (2002), 2002.
 - [RSP02] E. Rannou and P. Saux-Picart, *Cours de calcul formel, partie II*, Editions Ellipses, 2002.
 - [RV02] C. Roger and P. Vanhaecke, *Poisson cohomology of the affine plane*, Journal of Algebra **251** (2002), no. 1, 448–460.
 - [Skl82] E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, Funct. Anal. Appl. **16** (1982), 263–270.
 - [Sou70] J. M. Souriau, *Structures des Systèmes Dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
 - [Spr77] T.A. Springer, *Invariant theory*, Lecture Notes in Math., vol. 585, Springer-Verlag, 1977.
 - [Ste05] Daniel Sternheimer, *Quantization : Deformation and/or Functor ?*, Lett. Math. Phys. **74** (2005), 293–309.
 - [Ste08] R. Stekolshchik, *Notes on Coxeter Transformations and the McKay Correspondence*, Springer-Verlag, 2008.
 - [Stu93] B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer Verlag, Wien, New-York, 1993.
 - [Tam98] D.E. Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich' formality theorem for \mathbb{R}^n* , math.QA/9803025v4, 1998.
 - [Tih93] A. Tihami, *Une cohomologie pour les algèbres de Poisson quadratiques, Classification, Déformations*, Thèse (1993), Marrakech.
 - [TP08] Serge Roméo Tagne Pelap, *Poisson (co)homology of polynomial Poisson algebras in dimension four : Sklyanin case*, LAREMA, 2008.
 - [TP09] ———, *On the Hochschild Homology of Elliptic Sklyanin Algebras*, Lett. Math. Phys. **87** (2009), 267–281.
 - [VdB94] Michel Van den Bergh, *Noncommutative homology of some three-dimensional quantum spaces*, Proceedings of Conference on Algebraic Geometry and Ring Theory in honor of Michael Artin, Part III (Antwerp, 1992) **8** (1994), 213–230.
 - [Vey75] J. Vey, *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 421–454.
 - [Wei95] A. Weinstein, *Deformation quantization*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque **227** (1995), 389–409, Exp. No. 789, 5.
 - [Wey31] H. Weyl, *Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1931.

- [Wey46] ———, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [Wig32] E.P. Wigner, *Quantum corrections for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40** (1932), 749–759.
- [Yek99] A. Yekutieli, *Deformation Quantization in Algebraic Geometry*, Adv. Math. **198** (1999), 383–432.
- [YY93] S. S.-T. Yau and Y. Yu, *Gorenstein Quotient Singularities in Dimension Three*, Mem. AMS **105** (1993).